448

高等学校试用教材

液压流体力学

浙江大学 盛敬超 编

机械工业出版社

高等学校试用教材

液压流体力学

浙江大学　盛敬超　编





机械工业出版社

液压流体力学

浙江大学 盛敬超 编

*

机械工业出版社出版（北京阜成门外百万庄南街一号）

（北京市书刊出版业营业许可证出字第117号）

机械工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

*

开本 $787\times1092\ ^1/_{16}$·印张 $21^1/_4$·字数520千字

1980年6月北京第一版·1981年5月北京第二次印刷

印数 18,801—26,300·定价2.00元

*

统一书号：15033·4855

编 者 的 话

流体力学内容十分广泛，各工程技术部门对它的要求不尽相同，因此需要有不同类型的教材。本书是为机械类液压传动及控制专业编写的，在阐明基本理论的基础上，适当地应用这些理论来研究专业中有关的问题，并反映当前科学的发展水平。这样不仅使它与专业实际有所结合，而且也使基础理论得到加强。因此本书内容力求系统地讲述流体运动的基本规律，着重阐明基本概念和处理问题的方法，对液压技术中某些流体力学问题也作了一定程度的探讨。

本书共十章，前六章为基础部分，每周讲授3～4学时，一学期可以修毕，这部分也可供机械制造类专业选作“工程流体力学”的教材。后四章如缝隙流动、往复运动密封、静压支承和管道非恒定流（管道动特性）都是液压技术中经常遇到的问题，虽属专题性质，本书用流体力学的基本理论予以探讨，这部分每周讲授2～3学时可供一学期之用。如果学时较少，可以略去打*号的节段，不会影响全书的连贯性。由于液压技术的应用日趋广泛，本书也可供有关技术人员作参考。

本书是根据1978年9月在兰州召开的第一机械工业部高等院校水力机械、液压传动专业教材编审会议通过的教学大纲编写的。编写过程中参考了吕世磐同志和我合写的“水力学”讲义和洪逮吉同志编写的“流体力学”讲义，并承林建亚、蒋泳泉、沈之敏、杨余庆、凌俊杰、路甬祥等同志校阅了部分手稿，梁钧陶同志给我很多帮助。全书由哈尔滨工业大学许耀铭同志负责审阅。最后，第一机械工业部教材编辑室孙祥根同志对本书作了细致的校订工作。以上同志提出了很多宝贵意见，一并在此致谢！

一九七九年三月于杭州求是邨

目　　录

第一章 绪　论

自然界中各种物体都是相互联系、相互作用的，有作用必有反作用，物体间的作用和反作用这一对矛盾的斗争，就引起了物体的机械运动，并且我们把引起运动的原因抽象为力。所谓力学就是研究物体机械运动的科学，由于研究的对象不同，力学有许多分支，流体力学是以流体为对象，主要研究流体和流体及流体和固体之间的作用和反作用，也就是研究流体机械运动的规律，并把这些规律应用到有关的工程技术部门中去的力学分支。涉及流体的工程技术部门是多方面的，例如农田排灌、水利水电、城市给排水、船舶航运、石油开采、流体输送、液压传动等等，这些部门不仅流体种类各异，而且外界条件也有差别，这都对流体的运动有一定的制约，因此各部门都有不同的特殊问题。本书供液压专业应用，除了讨论流体机械运动的普遍规律外，还针对液压领域中某些特殊问题作原则性的论述。

液压传动是以油液为工作介质，通过人为的控制，达到按预定要求有控制的传递和转换能量。例如一台机床装置了由液压元件，管道等所组成的液压系统，将输入能量（动力机械输出的机械能）有控制的加以转换和传递，就能完成装夹、送进等动作；一台挖掘机装置了液压系统，就能有控制的进行挖掘、回转、卸料和行走等动作，尽管机器各式各样，动作千差万别，但通过油液进行能量转换和传递却是共同的。在液压元件或整个液压系统的特定环境下，油液的能量转换或传递过程中，不可避免地将出现一些不同于其他部门的特殊问题，了解这些问题使我们在设计使用液压元件和液压系统时，增加合理性，减少盲目性。

§1-1　研究流体力学的方法

人的认识是客观存在的事物在人的主观意识里的反映，即认识依赖于实践。自然科学是人类在改造自然界的实践过程中建立和发展起来的，我们的祖先在与洪水搏斗，在开河修渠、引水灌溉、水能利用，在海上航行等等与自然界的斗争过程中，逐渐地发现了流体运动的规律而建立了本门学科，我们要有批判地继承前人的科学遗产，在这个基础上通过自己不断的实践，包括观察，实验和生产实践，获得丰富的材料，加以分析、综合、归纳、演绎，从中找出规律性。

自然现象往往是错综复杂的，仅凭观察、实验和实践只能建立感性认识，必须根据十分丰富的感觉材料分析事物的矛盾，并加以抽象简化，即抽出现象中的主要矛盾和矛盾的主要方面，略去其它次要矛盾，然后综合起来，加以归纳，形成概念，得出普遍的原理或定律，这就是将感觉材料加以去粗取精，去伪存真，由此及彼，由表及里的改造制作，也就是感性认识跃进到理性认识的过程。

为了得出进一步的结论，更好地为生产实际服务，我们还需在所得到的普遍原理或定律的基础上，针对不同的具体条件，加以推理演绎，得出某些具体的结论来。归纳和演绎，正如分析和综合一样，也是相互联系、相互补充的，研究了许多不同事物的特殊本质后，用归纳的办法进行概括，帮助我们找出事物的共同本质，对于那些特定条件下的具体事物，则又可在归纳所得的基础上，利用推理演绎的办法来进行研究。由于流体力学中所注意的主要是

量的关系，因此在推理演绎时，往往要广泛采用数学工具，例如从经典力学的几个基本定律，经过数学演绎而得出反映流体运动普遍规律的连续性方程，能量方程和动量方程，又从这些基本方程中推演出各种具体的计算公式。由于许多现象极为复杂，以及对它们的研究不够充分，严格的数学演绎推理并不能完全解决问题，流体力学往往还要依靠科学实验的方法，统计、分析、综合实验所得的数据，归纳成修正理论公式的系数，或直接建立经验的或半经验的计算公式。

人类认识一件事物总不能立刻完全无遗地接触到所有各个方面，所以经过实践得到的理论认识还须再回到实践中去，在实践中继续更深入地揭露事物的本质，从而检验理论是否正确，进一步深化我们的认识，推进学科的发展。

§1-2 流体的概念

流体是由分子所组成的，分子之间有一定的空隙（气体的空隙较大，液体较小），这样就产生空间点上运动参数（速度、压强、密度等）不定的问题，例如空间内某点（图1-1），刚好在分子空隙中，这点的运动速度为零，但当某个分子运动到该点时，该点突然具有该分子的运动速度，这就给我们处理问题带来了困难，但是我们知道分子是很小的，分子之间的空隙尺度也是很小的，就分子间空隙较大的气体来讲，在标准状态下（$t=0°C$，$p=1atm$）22.4升的体积中含有6.02×10^{23}个分子，即在$1cm^3$的体积中有$n=\frac{6.02}{2.24}\times10^{19}=2.69\times10^{19}$个分子，因此气体分子之间的空隙尺度约为$n^{-\frac{1}{3}}cm$，即$3.34\times10^{-7}cm$的数量级（液体分子间的空隙尺度则更小），它与分子本身的尺度比较起来可能是较大的，但与常用的宏观尺寸比较起来就微不足道，由于流体力学是研究流体宏观表象的运动，并不顾问它的内部微观结构，因此，我们以宏观的质点作为介质的基本单位，一个质点可包含着一群分子，质点的运动参数即为该群分子运动参数的统计平均值，并且认为介质质点与质点间没有间断的空隙，而是连绵不断的组成，即把液体和气体都看成具有绵续性的连续介质。这样，在流体中运动参数将为空间点座标轴和时间的连续函数，使我们有可能采用数学工具来处理解决问题。

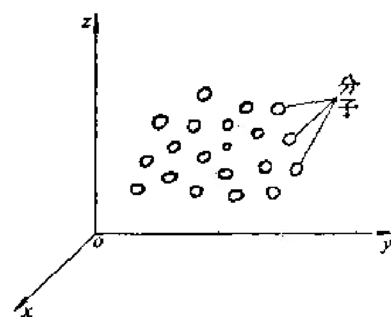


图1-1 流体分子在空间分布的模式

流体分子之间存在着相互吸引的内聚力，流体分子与固体分子之间又作用着附着力，如果流体与固体的接触附着力大于内聚力，则流体将为固体壁面吸附而湿润固体，水和油液都能被绝大多数固体所吸附，吸附于固体壁面的流体层原则上将具有与固体壁面相同的速度。如果附着力小于内聚力，则流体不会吸附于固体，例如汞和玻璃。

流体能承受较大的压应力，却几乎不能承受张应力。对切应力的抵抗极弱，不管作用的剪切力是怎样的微小，流体总会发生连续地变形，这就是流体的易流性，它使流体本身不能保持一定的形状，只能取得所在容器的形状。

流体在流动时呈现出内摩擦力，这个力的大小一方面取决于流体的种类，另一方面也与运动状态有关，但在流体中不存在起始运动前的静摩擦力，在相对静止的流体中也不存在内摩擦力。

流体具有抗压缩能力，液体的抗压缩能力极大，在很大压强作用下，液体的体积变化却极微小，例如增加180个大气压，油液的体积仅缩小约1%，就是说把油液封闭在长100cm，断面积为$1cm^2$的厚壁管中，在一端用活塞封闭，要使油柱缩短1cm，需加1764N（牛顿）的力。除去这个力，它也能恢复到原来的长度，这说明液体具有很小的压缩性，也具有很小的体积弹性。因此，在绝大多数情况下，我们常忽略液体体积的变化，认为液体具有不可压缩性，这时也就不考虑液体的体积弹性。只有在某些特殊情况下，例如高压领域，液压冲击等方面，液体的压缩性和体积弹性才显示出它的影响，这时就必须予以重视。

易流性是液体和气体区别于固体的基本宏观表象，而不可压缩性（严格地讲应为少压缩性）则是液体区别于气体的基本宏观表象。

由于液体的易流性和不可压缩性或少压缩性，它才可以作为液压传动的介质，迅速和正确地传递力和运动。但是事物总是有两面性的，液体有了易流性，也就不可避免地带来了渗漏和泄漏问题，在液压系统中必须采用各种密封装置，以防止漏油。密封装置又带来了摩擦阻力，造成能量损失。由于液体的少压缩性，在运动状态变换时，往往产生较大的液压冲击，影响元件的使用寿命和系统的可靠性，这就逼使我们采取适当的措施，减少冲击以便使液压元件和液压系统有较高的效能和良好的工作条件。

§1-3 关于单位制

不论计量什么物理量都必须有一个标准，物理量的计量就是将被量度的量与标准量进行比较，以确定被量度的物理量为标准量的多少倍数，通常称该标准量为单位尺度，或简称为单位。一般来说，物理量的计量单位是可以任意选择的，由于某些物理量之间存在着相互联系，我们可以用一些物理量的单位来量度另一些物理量，例如选定了长度和时间单位后，速度和加速度的量度就可以用长度和时间组合起来的单位来计量。这样，对某些量选定了一些独立的基本单位后，其他量的单位就可以通过基本单位来组合。组合后的单位称为导出单位。基本单位和导出单位的总和称为单位制。由于历史原因，使得目前科技领域内存在着不同的单位制，单位制的混乱对国内外科学技术的交流和经济贸易都有一定的障碍，因此各方面都愿望能建立一种国际通用的统一单位制。从第九届国际度量衡会议（1948年）开始讨论这个问题，陆续制订出7个基本单位和新单位制草案，7个基本单位如下：

米〔长度单位〕 m；

千克〔质量单位〕 kg；

秒〔时间单位〕 s；

安培〔电流单位〕 A；

开尔文〔热力学温度单位〕 K；

坎德拉〔光强度单位〕 cd；

摩尔〔物理量单位〕 mol。

1956年国际度量衡局常会通过了这个新单位制，并命名为国际单位制（Systéme International d'Unités），规定用SI为其国际符号，1960年第11届国际度量衡会议批准了这个单位制。由于某些物理量在各个科技和经济领域内，在数值上可以相差亿万倍，为了实用起见，在应用SI单位的同时，允许应用以它为基础所导出的分单位和倍单位，在主单位符号

前加词冠，组成分单位或倍单位的符号，例如毫米（mm），微安（μA）等，词冠及符号如表 1-1 所示。

表1-1 国际单位（SI）词冠

倍数与分数	词冠名称	国际名称	中文符号	国际符号	备注
10^{18}	艾克萨	Exa	艾	E	
10^{15}	拍它	Peta	拍	P	
10^{12}	太拉	tera	太	T	
10^{9}	吉咖	giga	吉(千兆)	G	
10^{6}	兆	mega	兆	M	
10^{3}	千	kilo	千	k	
10^{2}	百	hecto	百	h	
10	十	deca	十	da	
10^{-1}	分	deci	分	d	
10^{-2}	厘	centi	厘	c	
10^{-3}	毫	milli	毫	m	
10^{-6}	微	micro	微	μ	
10^{-9}	纳诺	nano	纳(毫微)	n	
10^{-12}	皮可	pico	皮(微微)	p	
10^{-15}	非姆托	femto	非	f	
10^{-18}	阿托	atto	阿	a	

目前世界上已有不少国家先后以政府命令的方式，或以国家标准的型式，采用国际单位制。我国于 1959 年国务院发布了《关于统一计量制度的命令》确定国际公制（米制）为我国的基本计量制度，并保留原来以国际公制为基础而制定的市制，废除了英制。1977 年 7 月国务院又颁发《计量管理条例(试行)》，明确规定"我国的基本计量制是米制(即公制)，逐步采用国际单位制"。由于米制的力学物理量单位中有 CGS 制，MKS 制和重力制三种，它们的差别是选取了不同的基本单位（见表 1-2）。由于我国目前在工程技术领域中习惯采用重

表1-2 不同单位制的基本单位

物理量名称	基本单位			
	CGS制	MKS制	重力制	SI制
长度	厘米(cm)	米(m)	米(m)	米(m)
质量	克(g)	千克(kg)	—	千克(kg)
力	—	—	公斤力(kgf)	—
时间	秒(s)	秒(s)	秒(s)	秒(s)

力制，这个单位制中力的单位尺度公斤力(1kgf)定义为：处于 45° 纬度海平面上（重力加速度 $g=9.80665\text{m/s}^2$）在真空中国际千克原器所受的重力。国际单位制中力是导出单位，选取使 1kg 质量的物体能获得 1m/s^2 加速度的力作为它的单位尺度，并命名为牛顿，用符号 N 表示，即

$$1\,\text{N}=1\text{kg}\cdot\text{m/s}^2=100\text{kg}\cdot\text{cm/s}^2 \tag{1-1}$$

按这样的定义，在上述条件下国际千克（公斤）原器所受的重力为 $9.80665\,\text{N}\approx 9.81\,\text{N}$，由

此可见二种单位制中力的单位有以下的关系：

$$1\text{kgf} = 9.81\text{N} \tag{1-2}$$

重力制中选择量度力的单位作为基本单位，并且又是用重力来定义，由于重力加速度随地方而异，因此在不同的地方，确定的公斤力（kgf）就要求不同的质量，这对贸易上带来了一定的麻烦，因为人类的贸易活动中买卖的应该是质量，并不是地球对它的吸引力，而且重力制对空间技术也是不适合的，所以国际单位制中把基本单位 kg 作为质量的量度单位，它的力学物理量单位基本上与已获广泛应用的 MKS 制相一致。

重力制是将被废止的单位制，但在目前逐步采用 SI 制的过渡时期就要求我们了解二种单位制，要熟悉 SI 制，也要了解重力制，并能掌握它们之间的换算方法，本书采用 SI 制单位。某些常用物理量的 SI 制与重力制单位的对照换算关系如表 1-3。

表1-3　常用物理量的单位换算

物理量名称	SI制		重力制		换算关系
	名称	符号	名称	符号	
长度	米	m	米	m	
时间	秒	s	秒	s	
质量	千克	kg	质量工程单位	$kgf \cdot s^2/m$	
力	牛顿	N		kgf	$1kgf = 9.81N$
压强	帕斯卡	$Pa = N/m^2$		kgf/cm^2	$1kgf/cm^2 = 9.81 \times 10^4 Pa$
密度		kg/m^3		$kgf \cdot s^2/m^4$	$1kgf \cdot s^2/m^4 = 9.81kg/m^3$
粘度		$Pa \cdot s$		$kgf \cdot s/m^2$	$1kgf \cdot s/m^2 = 9.81Pa \cdot s$
能，功	焦耳	$J = N \cdot m$		$kgf \cdot m$	$1kgf \cdot m = 9.81J$
功率	瓦	$W = J/s$		$kgf \cdot m/s$	$1kgf \cdot m/s = 9.81W$
频率	赫	Hz		Hz	

国际单位制中压强用 N/m^2 为单位称为帕斯卡，因为这个单位量值太小，在某些工程技术上使用不便，因此欧洲油空压协会（CETOP）建议采用其倍单位巴（bar）为油空压技术的压强单位：

$$1\text{bar} = 10^5\text{N/m}^2 = 10\text{N/cm}^2 = 1000\ \text{kg/cm}\cdot\text{s}^2 \tag{1-3}$$

它与重力制单位的关系为

$$1\text{bar} = 1.02\ \text{kgf/cm}^2$$

$$1\text{kgf/cm}^2 = 0.98\ \text{bar}$$

§1-4　流体中的作用力

力是引起物质机械运动的原因，因此要研究流体的相对静止和运动规律，首先必须明确流体上的作用力。在流体中取出任意一块体积为 ΔV 的流体，它的质量为 Δm，这块流体上作用力可以分为质量力与表面力两类，质量力作用在该体积 ΔV 内所有流体质点上，力的大小与该 ΔV 体积内的流体质量 Δm 成正比，而与 ΔV 以外的流体无关。重力、离心力及一切由于加速度存在而产生的惯性力均为质量力。单位质量的质量力称为单位质量力，单位质量力数值上就等于加速度，设单位质量力在座标轴 x、y、z 的投影 X、Y、Z，则 X、Y、

Z 就相当于座标轴 x、y、z 向的加速度。例如体积为 ΔV 的流体上受到重力作用，且 xoy 为一水平面，如果该流体只受到地球引力的作用则单位质量力在 x，y，z 座标轴上的投影为：

$$X=0,\quad Y=0,\quad Z=-\frac{\Delta mg}{\Delta m}=-g$$

式中的负号表示重力加速度 g 与座标轴 z 方向相反。

流体是连续介质，被研究的流体 ΔV 是由四周的流体所包围，这些流体与 ΔV 流体的表面相互接触，相互之间将引起作用力，例如摩擦力，压力等。这些作用力的特点是只与接触表面积有关，而与流体的质量或体积无关，所以称为表面力，单位表面积上的表面力通常称为应力，它是表面力在表面积上的强度。按表面力作用在表面上的方向不同，可将表面力分为法向力和切向力，法向力与表面的法线方向一致，切向力则与表面相切。例如在 ΔA 的表面上作用着 ΔF_n 的法向力和 ΔF_τ 的切向力（图 1-2），则 ΔA 上的平均法向应力 p_m 和切向应力 τ_m 为：

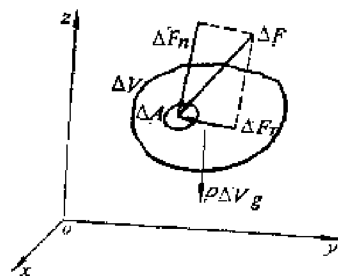


图1-2　流体中的作用力

$$p_m=\frac{\Delta F_n}{\Delta A},\quad \tau_m=\frac{\Delta F_\tau}{\Delta A}$$

将微小面积 ΔA 趋近于零为极限，则可得流体内某定点处的应力

$$\begin{aligned} p&=\lim_{\Delta A\to 0}\frac{\Delta F_n}{\Delta A}=\frac{dF_n}{dA}\\ \tau&=\lim_{\Delta A\to 0}\frac{\Delta F_\tau}{\Delta A}=\frac{dF_\tau}{dA}\end{aligned}\tag{1-4}$$

流体中的切应力 τ 是由于流体的粘性和流体具有相对运动，发生内摩擦而产生的，当流体相对静止时，切应力 τ 就不再存在，流体表面上就只有法向力，又因为流体不能承受张力，所以法向力只能向着流体表面内法线方向，即为压力，在这种情况下，法向应力即为单位面积上的压力，是相对静止流体表面积上的压力强度，称为静压强㊀。

必须指出，如果略去流体的粘性，这种流体称为理想流体，理想流体内也不存在切应力，因此理想流体内的压强和静压强具有相同的性质。

§1-5　密度、重度、比容和比重

流体是物质，它具有质量。单位体积流体内的质量称为密度，用符号 ρ 表示。在流体内任意点处取某一微小体积 ΔV，该体积内包含的流体质量为 Δm，则平均密度为 $\rho_m=\frac{\Delta m}{\Delta V}$，因为流体是连续介质，将体积 ΔV 无限缩小趋近于零为极限，则可得该任意点处的流体密度为

$$\rho=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta V}=\frac{dm}{dV}\tag{1-5}$$

㊀ 在工程技术上习惯地把表示压力强度的压强称为压力，而把压力称为总压力，我们认为压强的名词更为合理，因此本书中把压力强度称为压强。

密度的倒数称为比容，用符号 v 表示，即 $v=\frac{1}{\rho}$，它是单位质量流体所占的体积。流体的密度 ρ 和比容 v 将随着它所处的压强 p 和温度 T 而变，即 $\rho=\rho(p, T)$，$v=v(p, T)$。因为压强与温度均是空间点座标和时间的函数，因此，密度和比容也将是空间点座标和时间的函数，即

$$\rho=\rho(x, y, z, t)$$
$$v=v(x, y, z, t)$$

由此可见，密度的全微分为

$$d\rho=\frac{\partial\rho}{\partial x}dx+\frac{\partial\rho}{\partial y}dy+\frac{\partial\rho}{\partial z}dz+\frac{\partial\rho}{\partial t}dt \tag{1-6}$$

液体的密度随温度和压强的变化极为微小，一般情况下可以忽略不计，因此在液压技术中常把液压油液的密度看作常数，即 $\rho=C$ 或 $d\rho=0$。

对于气体，如果不计气体分子之间的相互作用力和分子本身的尺寸，把气体作为完全气体（也称理想气体），则它的密度 ρ，绝对温度 T（$T=273+t$）及绝对压强 p 之间的关系，可用状态方程表示：

$$pv=RT$$

或

$$p=\rho RT$$

空气、氦、氩、氢、氧、氮、二氧化碳等气体，除了高压和低温状态外（例如压强不超过 200 bar，绝对温度不低于 253K），基本上都能遵循上述规律，这样，气体的密度 ρ 为

$$\rho=\frac{p}{RT} \tag{1-7}$$

式中 R 为气体常数，不同气体具有不同的 R 值，但气体常数与气体分子量 M_w 的乘积则为一恒定值，称为普适气体常数，用 R_M 表示。必须指出，R 是有量纲的，它的单位将随压强，密度和温度所取的单位而定，当压强以 Pa 计，密度以 kg/m³ 计，温度以 K 计时，R 的单位为 J/kg·K，这时气体普适常数 $R_M=M_wR=8.3143\times10^3$ J/kgmol·K $=8.3143$kJ/kgmol·K。如果压强以 bar 计，则 R 的单位为 bar·m³/kg·K，普适常数 $R_M=8.3143\times10^{-2}\frac{\text{bar}\cdot\text{m}^3}{\text{kgmol}\cdot\text{K}}$。表 1-4 示出了各种气体的 R 值。

表1-4 气体的物理性质

气体名称	分子式	分子量	R kJ/kg·K	$R\times10^3$ bar·m³/kg·K	0℃时的等压比热 c_p kJ/kg·K	绝热指数 $k=c_p/c_v$
空气	—	28.98	0.2869	2.869	1.004	1.40
氦	He	4.003	2.077	20.77	5.236	1.66
氩	Ar	39.95	0.2081	2.081	0.523	1.67
氢	H_2	2.016	4.124	41.24	14.24	1.41
氧	O_2	32.00	0.2598	2.598	0.914	1.40
氮	N_2	28.01	0.2968	2.968	1.04	1.40
一氧化碳	CO	28.01	0.2968	2.968	1.041	1.40
二氧化碳	CO_2	44.00	0.1889	1.889	0.819	1.301

由（1-7）式可知，气体密度并不完全取决于压强，这对气体力学的分析带来了不便，但

我们知道，气体的状态变化又遵循 $p/\rho^n=C$ 的规律，而且很多工程问题可以归属于下列二种特殊情况：

（1）等温变化过程，$n=1$，即 $p/\rho=C$；

（2）等熵变化过程，$n=k$，即 $p/\rho^k=C$。

这里 k 称为等熵指数，各种气体的 k 值见表 1-4。

在 SI 制中，质量以千克（kg）计，体积用立方米（m^3）计，则密度 ρ 的单位是 kg/m^3，比容的单位为 m^3/kg。

在重力制中，质量的单位是$公斤力\cdot秒^2/米$（$kgf\cdot s^2/m$），体积以立方米计，则密度 ρ 的单位为 $kgf\cdot s^2/m^4$。

由于地球的引力，质量为 Δm 的物体产生 ΔG 的重力，重力是质量和重力加速度 g 的乘积

$$\Delta G=\Delta mg$$

地球对单位体积内质量的吸引而产生的重力称为重度，用符号 γ 表示

$$\gamma=\frac{\Delta G}{\Delta V}=\frac{\Delta mg}{\Delta V}=\rho g \tag{1-8}$$

在重力制中，重度的单位是 kgf/m^3，在 SI 制中以质量为基本物理量，所以不推荐使用重度这一名词，只用密度 ρ 来作有关的计算。

SI 制中密度的单位是 kg/m^3（或 kg/cm^3），在重力制中，重度的单位是 kgf/m^3（或 kgf/cm^3），因此 SI 制中的密度与重力制中的重度具有相同的数值，如表 1-5。

物质与同体积 4℃的水的重量的比率，称为比重，用符号 S 表示，即

$$S=\frac{\gamma V}{\gamma_{H_2O}V}=\frac{\gamma}{\gamma_{H_2O}}=\frac{\rho}{\rho_{H_2O}} \tag{1-9}$$

比重 S 是没有量纲的纯量。

表1-5　液体的密度与比重

液　体	温　度　℃	SI制，ρ，kg/m^3 重力制，γ，kgf/m^3	SI制，ρ，kg/cm^3 重力制，γ，kgf/cm^3	比　重　S
水	4	1000	10^{-3}	1
汞	15	13600	13.6×10^{-3}	13.6
液压矿物油	15	850～900	0.85×10^{-3}～0.9×10^{-3}	0.85～0.9
汽油	15	700～800	0.7×10^{-3}～0.8×10^{-3}	0.7～0.8
酒精	18	790	0.79×10^{-3}	0.79
熔化生铁	1200	7000	7×10^{-3}	7

§1-6　流体的压缩性和热膨胀性

所有流体将随着压强和温度的变化而发生体积变化，前者表征为压缩性，而后者则为热膨胀性。前已述及，压强和温度对液体的体积影响甚微，但气体则很显著。

一定体积 V 的流体，当压强增大 dp 时，体积减少了 dV，则表征流体压缩性的压缩系数 β 为

$$\beta = -\frac{dV}{V}\frac{1}{dp} = -\frac{d\mathrm{v}}{\mathrm{v}}\frac{1}{dp} \tag{1-10}$$

压缩系数β的倒数称为体积弹性模量，用符号K表示，即

$$K = \frac{1}{\beta} = -V\frac{dp}{dV} = -\mathrm{v}\frac{dp}{d\mathrm{v}} \tag{1-11}$$

由于压强增大时体积必然减小，所以在式中加上负号后就可获得正的β或K值。由于气体压强变化的同时，可能产生温度的变化，因此必需知道变化过程，才能确定β或K值，在工程上常遇到的是等温和等熵过程，如果用下角标T表示等温过程，s表示等熵过程，则

$$\beta_T = -\frac{1}{\mathrm{v}}\left(\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial p}\right)_T \quad 或K_T = -\mathrm{v}\left(\frac{\partial p}{\partial \mathrm{v}}\right)_T$$

$$\beta_s = -\frac{1}{\mathrm{v}}\left(\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial p}\right)_s \quad 或K_s = -\mathrm{v}\left(\frac{\partial p}{\partial \mathrm{v}}\right)_s$$

因为在等温过程时$p\mathrm{v} = C$，所以$\left(\frac{\partial p}{\partial \mathrm{v}}\right)_T = -\frac{p}{\mathrm{v}}$，而等熵过程时$p\mathrm{v}^k = C$，则$\left(\frac{\partial p}{\partial \mathrm{v}}\right)_s = -\frac{kp}{\mathrm{v}}$，代入上式得气体的体积弹性模量为：

$$\left.\begin{aligned} K_T &= p \\ K_s &= kp \end{aligned}\right\} \tag{1-12}$$

对于液体来说，即使在绝热条件下，压强改变而引起温度的变化是极为微小的，因此可以不考虑温度的变化。纯液体的压缩系数很小，即体积弹性模量很大，例如压强为1～500bar时，纯水的平均$K \approx 2.1\times10^4$bar，纯液压用油的平均K值则在1.4×10^4～2×10^4bar范围内，但如果液体中混有不溶解的气体，则体积弹性模量就有很大的降低。液压系统计算中常用$K \approx 7000$bar。

体积为V_m的混气油液中，如果气体的体积为V_G，则纯油液的体积$V_f = V_m - V_G$，当压强增加Δp时，混气油液的体积减小ΔV_m，应为气体体积减小ΔV_G和纯油液体积减小ΔV_f的总和，即

$$\Delta V_m = \Delta V_G + \Delta V_f$$

因为体积弹性模量为：$K_m = \frac{-V_m\Delta p}{\Delta V_m}$，$K_G = -\frac{V_G\Delta p}{\Delta V_G}$及$K_f = -\frac{V_f\Delta p}{\Delta V_f}$，代入上式得

$$\frac{V_m\Delta p}{K_m} = \frac{V_G\Delta p}{K_G} + \frac{V_f\Delta p}{K_f}$$

或

$$\frac{1}{K_m} = \frac{V_G}{V_m}\left(\frac{1}{K_G}\right) + \frac{V_f}{V_m}\left(\frac{1}{K_f}\right) = \frac{V_G}{V_m}\left(\frac{1}{K_G}\right) + \left(1 - \frac{V_G}{V_m}\right)\left(\frac{1}{K_f}\right) \tag{1-13}$$

例如某油液（$K_f = 1.8\times10^4$bar），混有一定的气体，作用100bar压强后油液的温度不变，则$K_G = 100$bar，这样，混气油液的体积弹性模量K_m为

$$\frac{1}{K_m} = \frac{V_G/V_m}{100} + \frac{1 - V_G/V_m}{1.8\times10^4}$$

由此可以计算出不同混入气体量时的体积弹性模量如表1-6。

上例说明，在一定压强下油液夹带1%气体时弹性模量降为纯油的35.6%，夹带4%气体时则仅为纯油液的12.2%。由此可见，在需要大体积弹性模量的场合下必需严格排除油液中夹带的气体。实际计算中常用$K = 7000$bar是有根据的。

表1-6 混入气体对K的影响

V_G/V_m	K_m, bar	V_G/V_m	K_m, bar
0	1.8×10^4	0.04	2.70×10^3
0.005	9.50×10^3	0.06	1.53×10^3
0.01	6.42×10^3	0.08	1.17×10^3
0.02	3.91×10^3	0.10	9.50×10^2

上面我们说明了在一定压强下油液中夹带气体对体积弹性模量的影响。如果在大气压强下混入油液的气体体积为 V_a，纯油液的体积为 V_f，则在 p 压强下的混气油液的体积弹性模量 K_m 值可按下式[1]计算：

$$K_m=\left[\frac{V_f/V_a+p_a/p}{V_f/V_a+K_f p_a/p^2}\right]K_f \qquad (1-14)$$

式中 p_a——大气压强；

K_f——纯油液体积弹性模量。

流体体积随温度变化而变化的性质称为热膨胀性，热膨胀性的大小可用热膨胀系数 α 表示，它是指流体在恒定压强的条件下温度改变所引起的相对体积变化率：

$$\alpha=\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right) \qquad (1-15)$$

对于液压用油 α 只决定于油液本身而与压强和温度无关，其数值可参看表 1-7。

表1-7 不同密度的油液的α[2]

$\rho_{15°}$	0.70	0.80	0.85	0.90	0.92
α	8.2×10^{-4}	7.7×10^{-4}	7.2×10^{-4}	6.4×10^{-4}	6.0×10^{-4}

对于气体则由状态方程 $pV=RT$ 可得

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p=\frac{R}{p}$$

则

$$\alpha=\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p=\frac{R}{pv}=\frac{R}{RT}=\frac{1}{T} \qquad (1-16)$$

§1-7 流体的粘性

流体流动时，由于流体与固体壁面的附着力和流体本身之间的分子运动和内聚力，使流体各处的速度产生差异。例如两平面间充满流体，设下平面固定不动，而上平面以速度 U 运动，贴近两平面的流体必粘附于平面上，紧贴于运动面上的流体质点必以与运动平面相同的速度 U 运动，而紧贴于下平面的流体质点的速度为零，平面间流体层的速度各不相同，但按一定规律分布。运动较快的流层可以带动较慢的流层，反之运动较慢的流层则又阻滞运动较快的流层，不同速度流层之间相互制约，产生类似固体摩擦过程的力，称为内摩擦力。流体

[1] Hayward A. T. J., Aeration in hydraulic Systems—its assesment and control, I. Mech. E. Proc. Conf. Oil Hydraulic Power Transmission, Nov. 1961 pp. 216~224.

[2] 上海煤矿机械研究所编：液压传动设计手册，上海人民出版社，1976 p. 1020。

流动时产生内摩擦力的这种性质叫做流体的粘性。由此可见内摩擦力与流体粘性和流层速度差异的程度有关。因为流层速度差 du（图 1-3）相同而流层间距 dz 不同，情况也就不同，所以只有垂直于速度方向的速度变化率 $\frac{du}{dz}$，才能充分表征流层间速度差异的程度，我们把 $\frac{du}{dz}$ 称为速度梯度。速度梯度是一个很重要的概念，我们讨论如下：

在运动流体中取一微小矩形 $ABCD$（见图 1-4），AB 层的速度为 u，CD 层的速度为 $u+du$，两层间的垂直距离为 dz，经过 dt 时间后，A、B、C、D 各点分别运动至 A'、B'、C'、D' 点，由图 1-4 可见

$$ED' = DD' - AA' = (u + du)dt - udt = dudt$$

因此

$$du = ED'/dt$$

由此得速度梯度

$$\frac{du}{dz} = \frac{ED'}{dzdt} = (\text{tg}\, d\theta)/dt \approx \frac{d\theta}{dt} \tag{1-17}$$

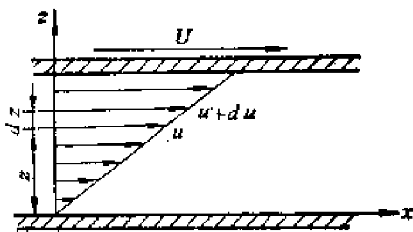


图1-3　粘性的作用

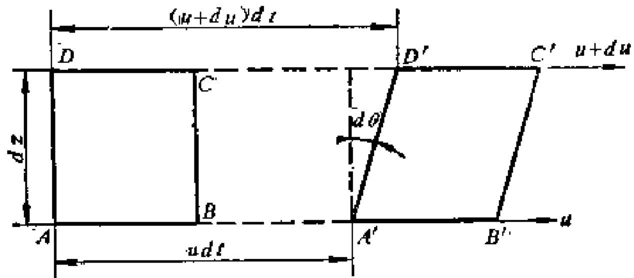


图1-4　流体速度梯度与角变形关系

我们知道 $d\theta$ 是矩形 $ABCD$ 在 dt 时间后的剪切变形角度，这就表明速度梯度实质上就是粘性流体运动时的剪切变形角速度。

由于流体具有粘性，当流体发生剪切变形时，流体内就产生阻滞变形的内摩擦力，由此可见，粘性表征了流体抵抗剪切变形的能力。处于相对静止状态的流体中不存在剪切变形，因而也不存在变形的抵抗，只有当运动流体流层间发生相对运动时，流体对剪切变形的抵抗，也就是粘性才表现出来。

根据牛顿的总结：流体在运动时，阻滞剪切变形的内摩擦力 T 与流体运动的剪切变形角速度，也就是速度梯度成正比，与接触面积 A 成正比，与流体的性质（粘性）有关而与流体内的压强无关，它的数学表达式为

$$T = \mu A \frac{du}{dz} \tag{1-18}$$

内摩擦力 T 除以接触面积 A，即得流体内的切应力 τ

$$\tau = \frac{T}{A} = \mu \frac{du}{dz} \tag{1-19}$$

这里 μ 是表征流体粘性的比例系数，称为动力粘度，它的单位是牛顿·秒每平方米 $\left(\frac{\text{N}\cdot\text{s}}{\text{m}^2}\right)$，或帕·秒（Pa·s），在 C.G.S. 制中动力粘度的单位为泊（P），即达因·秒每平方厘米，泊的百分之一为厘泊（cP），换算关系如下：

$$1cP=10^{-2}P=10^{-3}Pa\cdot s=10^{-8}bar\cdot s$$

流体的动力粘度μ与它的密度ρ的比值称为运动粘度ν，即

$$\nu=\frac{\mu}{\rho} \tag{1-20}$$

运动粘度的单位是平方米每秒（m^2/s），在C.G.S.制中则以平方厘米每秒（cm^2/s）称为斯托克斯为单位，斯托克斯简称斯（St），斯的百分之一为厘斯（c.St），即

$$1c.St=10^{-2}St.=10^{-6}m^2/s$$

我国目前常用以厘斯（c.St.）为单位的运动粘度ν来表示油液的粘度，而在计算时又往往要用Pa·s或bar·s为单位的动力粘度μ，设油液的比重为S，则

$$\mu=\rho\nu=(S\times10^3)(\nu\times10^{-6})=S\nu\times10^{-3}Pa\cdot s=S\nu\times10^{-8}bar\cdot s$$

式中ν以厘斯（c.St.）计。

另一种常用的液体粘度表示方法为恩氏度，用符号°E表示。所谓恩氏度是指200毫升的液体从恩氏粘度计中流出所需的时间t_1秒，与200毫升20°C时的蒸馏水从该恩氏粘度计中流出时间t_2秒（约50秒）之比，即

$$°E=\frac{t_1}{t_2}$$

恩氏度与运动粘度的换算关系如下：

$$\nu=0.0731°E-\frac{0.0631}{°E}\quad cm^2/s \tag{1-21}$$

温度对于流体的粘度有较大的影响，它对气体和液体却有相反的影响，这是由于气体和液体的分子间性质不同的缘故。气体分子间距离大，内聚力极微小，但分子运动较剧烈，切应力主要来自流层间分子的动量交换，当温度升高时，分子运动加剧，所以粘性增大，液体则相反，切应力主要取决于内聚力，因为温度升高时液体的内聚力减小，所以液体的粘度随温度的增加而降低，图1-5所示为空气与水的粘温关系。

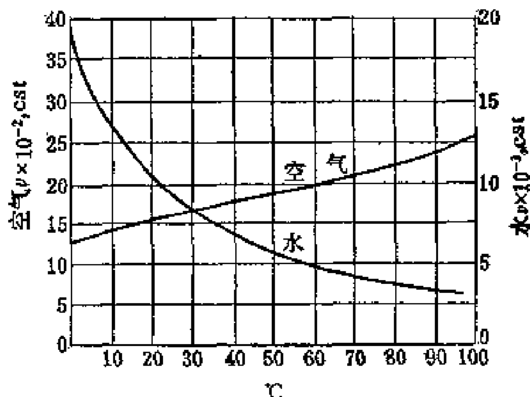


图1-5　空气与水的粘温关系

油液粘度的变化，对液压元件的性能有较大的影响，所以液压用油要求粘度随温度的变化尽可能小些。图1-6给出了国产油液的粘温关系。

温度对油液粘度的影响的表达式很多，但它们都有局限性，为了便于进行数学处理，在一定温度范围（例如20～80°C）内可使用下列公式：

$$\mu_t=\mu_0 e^{-\lambda(t-t_0)} \tag{1-22}$$

式中　μ_t——温度为t时的动力粘度；

μ_0——温度为t_0时的动力粘度；

λ——油液的粘温系数。

在一般液压系统中，工作温度范围约为30～70°C，λ可用下述方法求得其平均值：

将（1-22）式改写并设$t=70°C$，$t_0=30°C$，则

$$\frac{\mu_{30}}{\mu_{70}}=e^{\lambda(70-30)}$$

等号两边取对数，则

$$\ln\frac{\mu_{30}}{\mu_{70}}=\ln e^{40\lambda}=40\lambda$$

或

$$\lambda=\frac{\ln(\mu_{30}/\mu_{70})}{40}=\frac{\ln(\nu_{30}/\nu_{70})}{40}$$

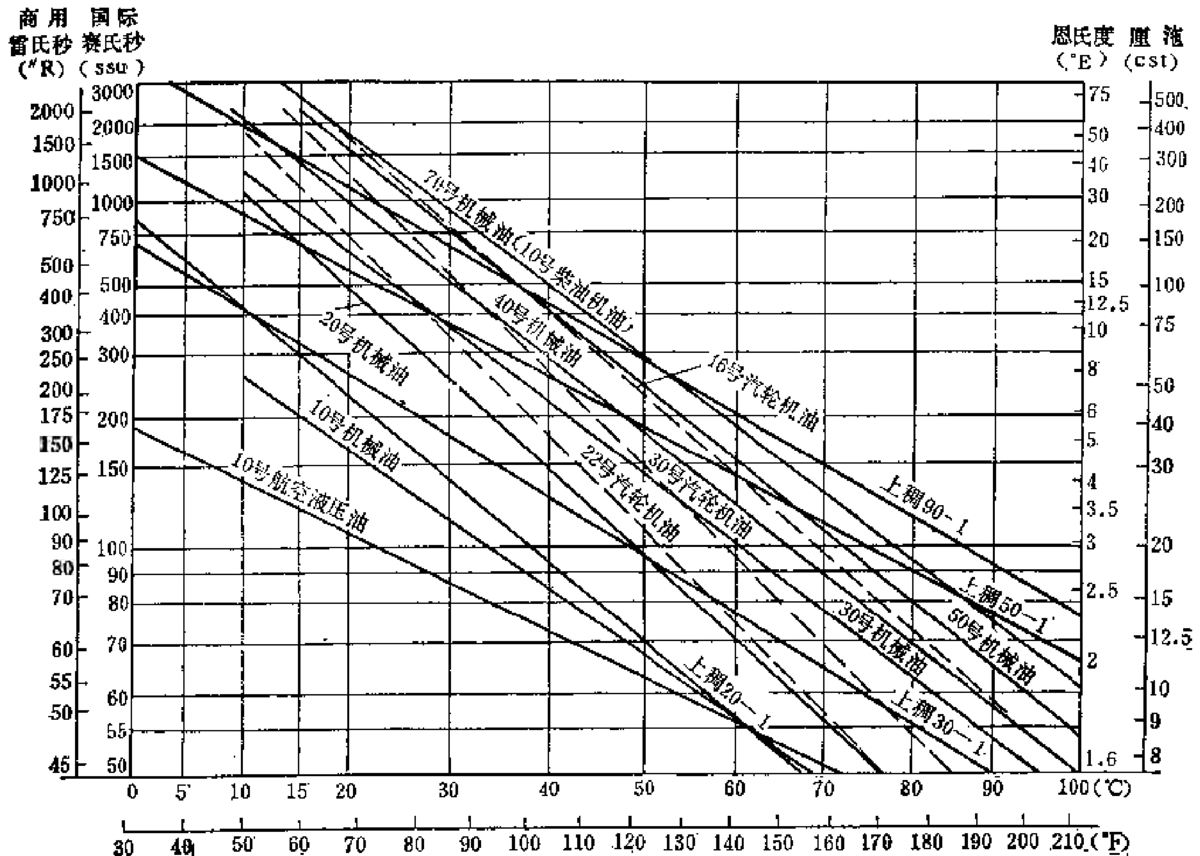


图1-6　几种国产油的粘温关系

根据图 1-6 的数据，可以算得国产液压用油的 λ 值，如表 1-8。这样算得的 λ 值是 在上述温度范围内的平均值。由上式我们可知 λ 具有温度负一次方的量纲。

液体的粘度将随压强的升高而增大，一般可用下列近似式表示

$$\mu_p=\mu_0 e^{\alpha p} \tag{1-23}$$

式中　μ_p——压强为 p 时的粘度；

μ_0——压强为 1 大气压时的粘度；

α——粘压系数。

对 (1-23) 式取对数可得粘压系数 α 为

$$\alpha=\frac{\ln\mu_p/\mu_0}{p}=\frac{\ln\nu_p/\nu_0}{p}$$

由此可见，α 具有压强倒数的量纲。在 0 至 500bar 的压强范围内，一般液压用矿 物 油每增加 300bar 的压强，粘度大致上增加一倍。即 $p=300$ bar，$\nu_p/\nu_0\approx 2$，所以

$$\alpha = \frac{\ln 2}{300} \approx \frac{1}{432}$$

根据公式（1-22）及（1-23），温度和压强对粘度的影响可写成如下式：

$$\mu = \mu_0 e^{\alpha p - \lambda (t - t_0)} \qquad (1\text{-}24)$$

式中　μ——压强为 p，温度为 t 时的粘度；

　　　μ_0——压强为 1 大气压，温度为 t_0 时的粘度。

表1-8　国产液压油的粘温系数

		10号机械油	20号机械油	30号机械油	40号机械油	50号机械油	70号机械油	10号航空油	上稠 20	上稠 30	上稠 50
ν c. St	30℃	28.5	51	75	100	150	175	15.5	22	37	75
	70℃	7.0	8.8	13.5	17	21	24	7.8	6.5	11	21.5
ν_{30}/ν_{70}		4.07	5.8	5.55	5.9	7.15	7.3	2	3.38	3.36	3.47
$\ln \nu_{30}/\nu_{70}$		1.40	1.75	1.71	1.77	1.96	1.99	0.69	1.22	1.2	1.24
$\lambda = \frac{\ln\frac{\nu_{30}}{\nu_{70}}}{40}$		$\frac{1}{28.5}$	$\frac{1}{23}$	$\frac{1}{23.4}$	$\frac{1}{22.6}$	$\frac{1}{20.4}$	$\frac{1}{20.1}$	$\frac{1}{58}$	$\frac{1}{32.8}$	$\frac{1}{30.0}$	$\frac{1}{32.0}$

§1-8　流体的热容量和比热

流体与外界发生热量交换而使流体的温度变化，热量交换对温度的变化率称为流体的热容量。也就是说，流体温度升高或降低 1 度所需交换的热量。单位质量流体的热容量则称为比热，设以符号 Q_H 表示热量，q_H 表示单位质量的热量，T 表示绝对温度，c 表示比热，则

$$c = \frac{d(Q_H/m)}{dT} = \frac{dq_H}{dT} \qquad (1\text{-}25)$$

因为对流体加热时，加入的热量一方面使流体温度升高而增加流体的内能 i，另一方面流体受热后可能产生体积膨胀而对外界作功 $p d\mathrm{v}$，按热力学第一定律知

$$dq_H = di + p d\mathrm{v} \qquad (1\text{-}26)$$

式中　p——流体压强；

　　　v——流体比容。

如果把流体密闭在容器内加热，加热时保持流体体积不变，即 $d\mathrm{v} = 0$，由此而得的比热称为定容比热，用 c_v 表示

$$c_v = \left(\frac{dq_H}{dT}\right)_v = \frac{di}{dT} \qquad (1\text{-}27)$$

如果流体加热时保持压强不变，即 $dp = 0$，由此而得的比热称为定压比热，用 c_p 表示

$$c_p = \left(\frac{dq_H}{dT}\right)_p = \frac{di}{dT} + p\left(\frac{d\mathrm{v}}{dT}\right)_p \qquad (1\text{-}28)$$

对于液体，即使在等压条件下加热，它的体积变化也是非常小的，$p\left(\frac{d\mathrm{v}}{dT}\right)_p$ 与 $\frac{di}{dT}$ 比较起来，前者可以忽略，因此定压比热基本上与定容比热相同，不必加以区分，通常就用

符号 c 表示液体的比热。液压用油的比热约为 1.9 千焦每千克·度 (kJ/kg·K)，也可用下列经验公式[1]进行估算

$$c = \frac{1.69 + 0.0038\,t}{\sqrt{S}} \quad \text{kJ/kg·K} \tag{1-29}$$

式中 t——温度，℃；

S——比重。

对于气体，由状态方程 $pv = RT$ 可求得等压条件下 $p\left(\frac{dv}{dT}\right)_p = R$，因此

$$c_p = \frac{di}{dT} + R = c_v + R \tag{1-30}$$

定压比热 c_p 与定容比热 c_v 的比率称为等熵指数 k，即

$$k = c_p/c_v \tag{1-31}$$

各种气体的比热见表 1-4。

§1-9 流体的含气量、空气分离压和汽化压

油液中所含空气的体积百分比数量叫做含气量，油液中的空气有混入和溶入两种，混入气体呈气泡状态悬浮于油液中，它对油液的体积弹性模量和粘性均产生影响，而且对体积弹性模量影响极大，溶入气体则对油液的体积弹性模量和粘性基本上不产生影响。

油中空气溶解量正比于绝对压强，在一个大气压和常温下，矿物液压油的溶气量约为 5～7%，水和乙二醇混合液为 1～2%，磷酸脂为 5%，油包水型乳化液为 5～7%[2]。

油中混入的空气量决定于油液的性质及油液与气体的接触和搅动情况，加压后可使部分混入气体溶于油液中，其余的仍以气相存在。油液中混入空气后，不仅使油液的体积弹性模量急剧下降，而且将使粘度增大[3]

$$\mu_B = \mu_0(1 + 0.015B) \tag{1-32}$$

式中 B 为混入空气的体积百分比，μ_0 为油液未混入空气时的动力粘度，μ_B 为含有 B%的混入空气时的动力粘度。

在大气压 p_0 下设油中空气溶解量为 α_0，当压强降为 p_1 时，相应的空气溶解量为 α_1，则 $\alpha_0 - \alpha_1$ 为油液中空气的过饱和量，当压强继续降低到某一压强 p_g 时，过饱和的空气将自油液中析出而发生气泡，这个压强 p_g 称为空气分离压。空气分离压与油液的种类，温度、空气溶解量及混入量有关，通常是油温高，空气溶解量及混入量大，则空气分离压增高。

在一定温度下，如果降低压强，当压强降低至某一值时，油液将发生沸腾汽化，这个压强称为该油液在该温度下的汽化压强。油液的汽化压强将随着温度增大而增高。

---

[1] Hydraulic Handbook, 6th edition, Trade & Technical press LTD. p. 97.

[2] 石原智男等：油压工学ハンドブック，朝仓书店，1972，p. 16。

[3] 石原智男等：油压工学ハンドブック，朝仓书店，1972，p. 18。

第二章　流体静力学

物质世界是运动的，因此没有绝对静止的东西，这里所谓的“静”只是指流体宏观质点之间没有相对运动，达到了相对的平衡，至于流体作为一个整体则完全可以同刚体一样地运动。由于流体质点之间没有相对运动，流体内并不存在切向的剪切应力，因此流体内只有法向的压应力，即静压强。本章主要讨论流体的平衡规律和压强分布规律以及流体对物体壁面的作用力。

§2-1　静　压　强

压强是流体工程中最重要、最常用的参数，必须深入地了解它的概念，掌握它的特性。

前已阐明在相对静止或在不计流体粘性（理想流体）时，流体上只有作用在内法线方向的表面力即 $F = F_n$。由此可以得到下述结论：在相对静止或理想流体内，压强（即静压强）对某面的作用而产生的压力（表面力）必垂直于面，这是静压强的一个重要特性。下面我们将讨论静压强的第二个重要特性。

在相对静止或理想流体内任意点上设置直角座标系，在原点处取一流体质点，并将它放大为一四面体如图 2-1 所示，四面体四个面上的压强为 p_x，p_y，p_z 及 p_n，则法向表面力为

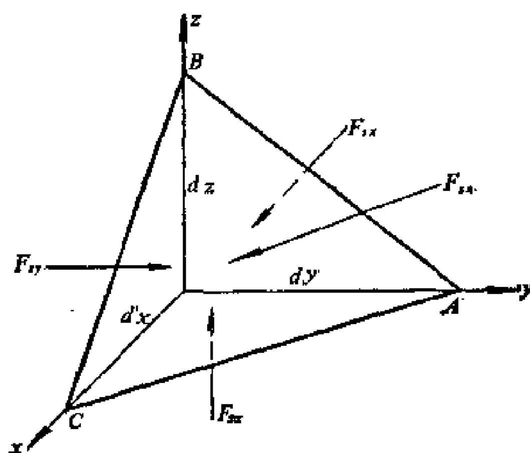


图2-1　静止或理想流体上的表面力

$$F_{sx} = \frac{1}{2} p_x d_y d_z$$

$$F_{sy} = \frac{1}{2} p_y d_z d_x$$

$$F_{sz} = \frac{1}{2} p_z d_x d_y$$

及
$$F_{sn} = p_n d A_n$$

式中　dA_n——$\triangle ABC$ 的面积。

此外，四面体上还作用着质量力 F_m，设在 x、y、z 向的单位质量力为 X、Y、Z，则质量力的分量为

$$F_{mx} = \frac{1}{6} dx\,dy\,dz\,\rho X$$

$$F_{my} = \frac{1}{6} dx\,dy\,dz\,\rho Y$$

$$F_{mz} = \frac{1}{6} dx\,dy\,dz\,\rho Z$$

四面体上力的平衡为

$$\Sigma F_x = 0: \quad F_{sx} + F_{mx} - F_{sn}\cos(F_n, \ x) = 0$$

即

$$\frac{1}{2}p_x dydz + \frac{1}{6}\rho X dxdydz - p_n dA_n \cos(F_n, \ x) = 0$$

因为表面力是二阶无限小而质量力是三阶无限小，因此，质量力可以略去

$$\frac{1}{2}p_x dydz = p_n dA_n \cos(F_n, \ x)$$

但

$$dA_n \cos(F_n, \ x) = \frac{1}{2}dydz$$

代入上式得

$$p_x = p_n$$

同理，由 $\Sigma F_y = 0$ 及 $\Sigma F_z = 0$ 可得

$$p_y = p_n \quad 及 \quad p_z = p_n$$

由此得

$$p_x = p_y = p_z = p_n$$

因为我们所取的四面体实质上就是流体质点的放大，根据上述结论，由质点放大而成的四面体的不同面上的静压强相等，这就是说相对静止流体内某一点的压强不因通过该点的面的方向不同而改变它的数值，这是静压强的第二个重要特性。根据这个特性可知静压强不是一个矢量而只是一个标量，它只决定于空间点的位置，因此是空间点座标 x 、 y 、 z 的单值连续函数，即

$$p = p(x, \ y, \ z)$$

由此可得静压强的全微分为

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz$$

§2-2　流体静力学的平衡方程式

本节讨论相对静止流体的平衡规律，在相对静止的条件下，流体内不存在切向的剪切应力，因此流体只受到以 X、Y、Z 表示的质量力和由压强产生的法向表面力的作用，力平衡的数学表达式即为平衡方程式。

在流体内取一微小平行六面体（图 2-2），它与 x 、 y 、 z 座标轴平行的棱边各为 dx、dy、dz，它的体积 $dV = dxdydz$，则作用在该六面体上的质量力在 x 、 y 、 z 座标轴方向的分量各为

$$\rho X dV = \rho X dxdydz$$

$$\rho Y dV = \rho Y dxdydz$$

$$\rho Z dV = \rho Z dxdydz$$

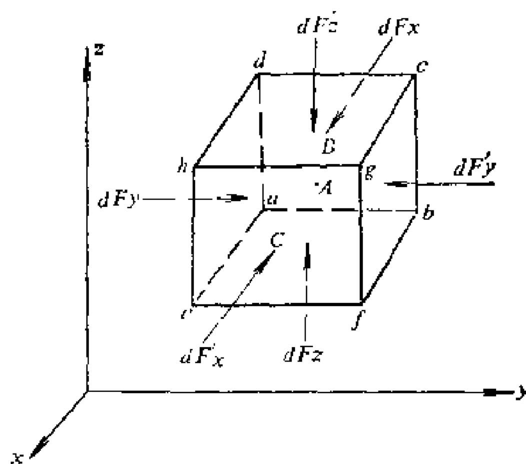


图2-2　微小平行六面体上的法向表面力

作用在该六面体上的表面力是由压强产生的，因为压强是空间点座标轴 x 、 y 、 z 的连续函数，如果在 $A(x, \ y, \ z)$ 点的压强为 $p(x, \ y, \ z)$，则离该点 $\pm dx$ 处的压强为 $p(x \pm dx, y, z)$，并且可以将 $p(x \pm dx,$

y, z）展成用$p(x, y, z)$表示的泰勒（Taylor）级数，即

$$p(x \pm dx, y, z) = p(x, y, z) \pm \frac{\partial p(x, y, z)}{\partial x} dx + \frac{\partial^2 p(x, y, z)}{\partial x^2} \frac{(dx)^2}{2!} \pm \frac{\partial^3 p(x, y, z)}{\partial x^3} \frac{(dx)^3}{3!} + \cdots\cdots$$

如果dx是无限小量，则在上述级数中二阶及二阶以上的无限小项均可略去，即等号右边只取二项已够精确，则

$$p(x \pm dx, y, z) = p(x, y, z) \pm \frac{\partial p(x, y, z)}{\partial x} dx$$

我们设平行六面体中心点A处的压强为p则$abcd$面的中心点B与A相距为$\frac{1}{2}dx$，则B点的压强应为$p - \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} dx$，$efgh$面中心点$C$的压强应为$p + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} dx$。由此可知平行六面体上的法向表面力为

$$dF_x = \left(p - \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) dydz, \quad dF_x' = \left(p + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) dydz$$

$$dF_y = \left(p - \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial y} dy\right) dzdx, \quad dF_y' = \left(p + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial y} dy\right) dzdx$$

$$dF_z = \left(p - \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z} dz\right) dxdy, \quad dF_z' = \left(p + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z} dz\right) dxdy$$

因为微小平行六面体是在平衡状态下，所以

$$\Sigma F_x = 0$$

$$\left(p - \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) dydz - \left(p + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) dydz + X\rho dxdydz = 0$$

$$\Sigma F_y = 0: \left(p - \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial y} dy\right) dzdx - \left(p + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial y} dy\right) dzdx + Y\rho dxdydz = 0$$

$$\Sigma F_z = 0: \left(p - \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z} dz\right) dxdy - \left(p + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z} dz\right) dxdy + Z\rho dxdydz = 0$$

上列各式以质量$\rho dxdydz$除之得单位质量的平衡方程式为

$$\left.\begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2-1}$$

将上列平衡方程式分别乘以dx，dy及dz，然后相加得

$$Xdx + Ydy + Zdz = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz\right) = \frac{1}{\rho} dp \tag{2-2}$$

对油液等不可压缩性流体来讲，ρ＝常数，上式等号右边为一全微分，因此等号左边也必为某函数$U(x, y, z)$的全微分，而且这个函数的三个偏导数各为X、Y、Z的负值，即

$$\frac{\partial U}{\partial x}=-X,\quad \frac{\partial U}{\partial y}=-Y,\quad \frac{\partial U}{\partial z}=-Z$$

由此可得

$$-dU=-\left(\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy+\frac{\partial U}{\partial z}dz\right)=Xdx+Ydy+Zdz=\frac{1}{\rho}dp$$

或
$$dp+\rho dU=0 \tag{2-3}$$

$U(x,\ y,\ z)$ 是一个决定流体质量力的函数，称为力势函数，由上述论证可知，只有流场中存在力势函数，即流体在有势力作用下，流体才能处于平衡状态。惯性力，重力等均为有势力。

p = 常数的面称为等压面，由（2-3）式可知，p = 常数时 $dU=0$，即等压面的微分方程式为

$$Xdx+Ydy+Zdz=0$$

式中 dx、dy 及 dz 是等压面上任意微小线段 dl 在座标轴向的投影，因此上式表示单位质量力与等压面上微小线段 dl 的乘积为零，因为单位质量力与等压面上微小线段 dl 本身都不是零值，要使质量力与线段 dl 的乘积为零，力与线段 dl 只能相互正交，但线段 dl 是在等压面内的任意线段，所以质量力也只能垂直于等压面，这是等压面的一个重要性质。当质量力仅仅是重力时，等压面必定为水平面。

§2-3 在重力场中不可压缩性流体的平衡

重力场是最常见的有势力场，很多工程技术领域，包括液压技术，流体基本上是处于重力场中，所以讨论重力场的流体平衡规律具有普遍意义。在重力场中，油液内的质量力只是向着地心的重力，它与常取的座标轴 z 方向相反，所以在重力场中

$$X=0,\quad Y=0,\quad Z=-g$$

由此可得
$$dU=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy+\frac{\partial U}{\partial z}dz=gdz \tag{2-4}$$

积分之得
$$U=gz+C$$

设　$z=0$ 时　$U=0$，则 $C=0$

所以重力场的力势函数 U 为

$$U=gz$$

这是单位质量的位置势能。

以（2-4）式代入（2-3）式积分之得

$$p+\rho gz=C$$

设 $z=H$ 时　$p=p_0$（图 2-3），则积分常数 C 为

$$C=p_0+\rho gH$$

代入原式得

$$p=p_0+\rho g(H-z)=p_0+\rho gh \tag{2-5}$$

（2-5）式示出了油液在重力作用下压强的产生和分布规律，称为不可压缩性流体的**基本公式**或称静液压强基本公式，由此可知：

1. 在重力作用下，不可压缩性流体内的静压强只是座标轴 z 的函数，压强随着深度 h 的增加而增大；

2. 静压强由二部分组成，即为液面压强 p_0 和油液自重所引起的压强 ρgh。液面压强是外力施加于油液而引起的，有三种方式使液面产生压强：

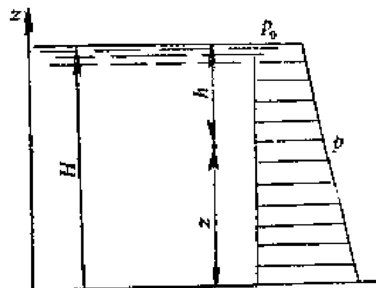


图2-3　重力作用下流体中压强分布

(1) 通过固体对液面施加外力而产生压强，这种情况在液压技术中最多，如外力通过活塞或柱塞对液压缸里的油液加压，在液面产生压强。

(2) 通过气体使液体表面产生压强。压力容器，蒸汽锅炉，液压传动系统中的气-液蓄能器均是这种情况的例子。

(3) 通过不同质的液体使液面产生压强。这种情况在一些低压的测压仪器上常可看到，例如被测液体对测压计内的液体产生压强（图 2-4）。

3. h = 常数时，$p = C$，即等压面是水平面。

4. 连通容器内同一种液体内与液面平行的面上具有相等的压强，这个面称为等压面。例如图 2-4 中 $p_1 = p_2 = p_0 + \rho gh$。

5. 油液内任一点的压强都包含了液面压强 p_0，这就是说液面压强可以等值地在油液内传递，这就是帕斯卡压强传递原理。根据这个原理，结合静压强的特性就可推理出油液不仅能传力而且能放大或缩小力，也能改变力的方向。如图 2-5 所示，力 F_1 通过液压缸 1 的活塞使液面产生压强，这个压强传递至由管道连通的液压缸 2 的活塞上而产生了力 F_2，力获得了传递。由于压强作用于面而产生的力必需垂直于面，因此改变液压缸 2 的位置就可获得不同方向的 F_2 力，此外，改变液压缸 2 的断面可以获得不同数值的 F_2 力，这是液体传力的特点之一，也是液压传动得以发展的一个重要因素。

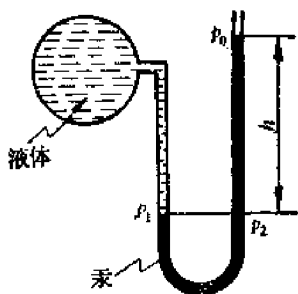


图2-4　U形测压计产生高度差

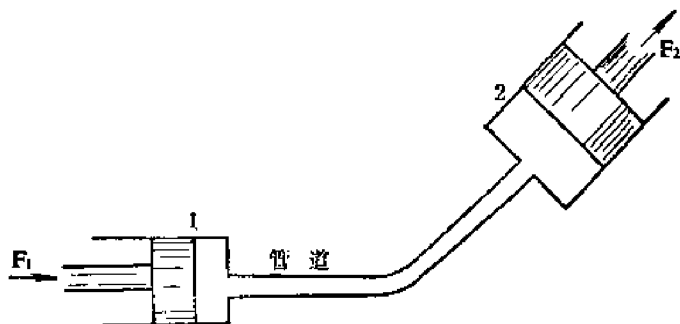


图2-5　力的传递

基本公式 $p = p_0 + \rho gh$ 是一个普遍公式，但工程实际的具体情况往往有很大差别，我们应该根据具体情况作具体分析的精神，抓住起决定作用的因素来处理工程实际问题。有二种情况值得我们注意：

(1) 在一些与大气接触的"开敞"工程中，如水工建筑物（大坝、闸门等）因为建筑物与大气接触，液面压强即为大气压强，而且建筑物各方面都受到大气压强的作用，可以互相抵消，计算时可使 $p_0 = p_a = 0$，这时静压强为 $p = \rho gh$，即静压强随着 h 的增大而线性增加，例如水坝内侧的压强分布呈三角形，如图 2-6 所示。

（2）在液压技术中，油液表面的压强往往是很大的（一般在数十巴到数百巴或更大），比由油液重量所引起的压强 ρgh 大得多，为了计算方便 ρgh 项可以略去。例如 ρ 以 900kg/m^3 计，$h=2\text{ m}$ 时的 $\rho gh=900\times9.8\times2=17640\text{ N/m}^2=0.1764\text{bar}$，如果系统压强是10bar，则 ρgh 这项仅占1.8%，当系统压强为100bar时它仅占0.18%。因此在液压系统中，常认为油液中任一点的压强都等于液面压强 p_0，并作为系统的压强，即 $p=p_0$。

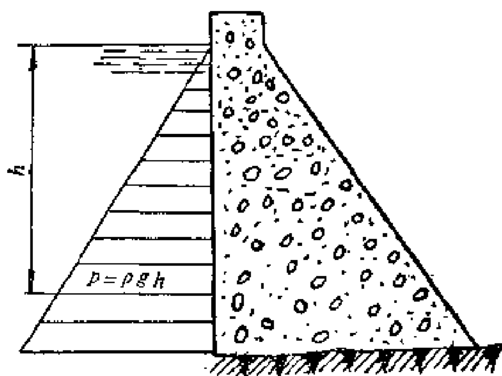


图2-6　水坝内侧的压强分布

在液压技术中经常要进行有关压强的计算，计算时要注意单位的统一，因为压强的定义是单位面积上的压力，所以在SI制中与基本单位相一致的压强单位是 N/m^2 称为Pa，由于Pa的单位太小，故推荐用MPa或bar

$$1\text{MPa}=10^6\text{Pa}=10\text{bar}$$

$$1\text{bar}=10^5\text{N/m}^2=10\text{N/cm}^2=1\text{daN/cm}^2$$

在重力单位制中，常用的压强单位是 kgf/cm^2

$$1\text{kgf/cm}^2=9.81\text{N/cm}^2=0.981\text{bar}$$

或

$$1\text{bar}=\frac{1}{0.981}\text{kgf/cm}^2=1.02\text{kgf/cm}^2$$

§2-4　大气压强、绝对压强和相对压强

地球是由一层空气所包围的，这一层巨大的空气层叫做大气层。空气是客观存在的物质，受到地球的引力必然产生压强，即大气压强，简称大气压，用符号 p_a 表示。由于我们生活在这大气层的底层，随时随地都受到大气压强的作用，所以大气压强对我们的关系至为密切。有时我们也用大气压作为压强的单位。由于天气的影响和地方标高的不同，各地的大气压强稍有不同，我们以标准状态下，海平面上大气所产生的压强称为标准大气压，用符号atm表示，它的数值是101325Pa或 1.033227kgf/cm^2，而把 1kgf/cm^2 称为工程大气压，用符号at表示之。

$$1\text{at}=1\text{kgf/cm}^2=98066\text{Pa}\approx0.981\text{bar}$$

压强可以用仪表测量，这种仪表本身也受到大气压强的作用，但在大气中它的读数却是零，因此测得的压强只是实际压强和当地大气压强的差值，这种压强差值就是被测压强对大气压强的相对值，所以叫做相对压强或称为表压强，也就是说相对压强或表压强是以地方大气压强 p_a 作为基准零值时的压强。以绝对零值（绝对真空）为基准的压强则称为绝对压强。绝对压强和表压强（相对压强）的关系如图2-7所示。

绝对压强总是正的，表压强则可正可负，负的表压强即表示该压强比大气压强低，我们说它具有真空，这个负值就是不足大气压强的数值，称为真空度。所以负的表压强就是真空度，如真空度为0.4大气压，即−0.4大气压（表压）。我们把下端开口，上端具有阀门的玻璃管插入密度为 ρ 的液体中，如图2-8所示，如果在上端抽出一部分封入的空气，使管内压

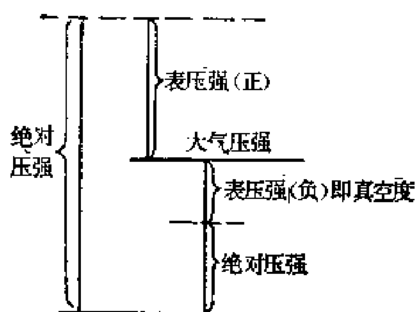


图2-7　绝对压强与表压强的关系

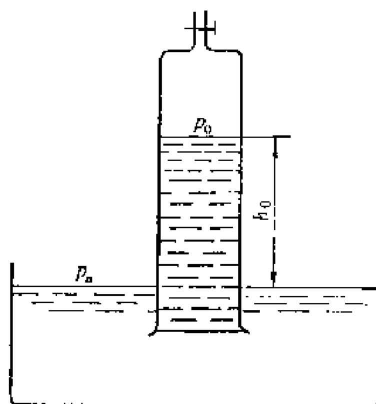


图2-8　真空

强低于大气压强，则在外界的大气压强 p_a 作用下，管内液体将上升至 h_0，这时管内液面压强为 p_0，由流体静力学基本公式知 $p_a = p_0 + \rho g h_0$。显然，$\rho g h_0$ 就是管内液面压强 p_0 不足大气压强的部分，因此它就是管内液面上的真空度。由此可见，真空度的大小往往可以用液柱高度 $h_0 = \frac{p_a - p_0}{\rho g}$ 来表示。在理论上，当 p_0 等于零时，即管中呈绝对真空时，h_0 达到最大值，设为 $(h_{0max})_T$，在标准大气压下，$(h_{0max})_T$ 为

$$(h_{0max})_T = \frac{p_{atm}}{\rho g} = \frac{10.1325}{9.8066\rho} = \frac{1.033}{\rho}$$

水的密度 $\rho = 10^{-3}\text{kg/cm}^3$，汞的密度为 $13.6\times10^{-3}\text{kg/cm}^3$

所以
$$(h_{0max})_T = \frac{1.033}{10^{-3}} = 1033\text{cmH}_2\text{O} = 10.33\text{mH}_2\text{O}$$

或
$$(h_{0max})_T = \frac{1.033}{13.6\times10^{-3}} = 76\text{cmHg} = 760\text{mmHg}$$

即理论上在标准大气压下的最大真空度可达 10.33 米水柱或 760 毫米汞柱。但实际上在低压条件下液体要汽化，所以当 p_0 到达液体在该温度下的汽化压强 p_v 时，液体开始沸腾化汽，因此实际的最大真空度 h_{0max} 为

$$h_{0max} = \frac{p_a - p_v}{\rho g}$$

根据上述我们归纳如下：

1. 绝对压强 = 大气压强 + 表压强
2. 表压强 = 绝对压强 - 大气压强
3. 真空度 = 大气压强 - 绝对压强
4. 真空度的最大值不能超过当地大气压强减去环境温度下的液体汽化压强。

由于我们生活在大气中，所有物体都受到大气的作用，往往是相互抵消的，所以在受力计算中都采用表压强，即把大气压强作为零值：$p_a = 0$

§2-5　压强的测量

测量压强的表计称为测压计，测压计有两类，一类是可以测量较高压强的金属压强表。

另一类是测量较低压强的液柱式测压计，做成直管形式的称为测压管，做成U形的称U形测压计。金属压强表（通称压力表）基本上有两种，一种是以椭圆断面的金属弯管（称为波登管）作为压强感受元件的波登管式压强表（图2-9），另一种是以金属膜片为压强感受元件的膜片式压强计，它们都是利用金属的弹性变形来测量压强的，测出的只是感受元件的弹性变形的程度，经过率定而成为压强刻度，是一种间接测压法。由此引伸出来现代的测压仪表，如差动线圈压强传感器，图2-10，电容式压强传感器，图2-11，应变片式压强传感器等等都是从这种类型派生出来的。这种仪表在使用一段时间后，由于金属的力学性能或电学性能的变异而产生误差，所以要经常注意校正。另一类型的测压计是根据静液压强基本公式用液柱高度直接测出压强，由于液体的密度基本上是不变的，这种方法正确可靠，但只能测量较低的压强。不论何种测压表计，在大气中读数均为零，它们测出的只是实际压强和大气压强的差值，即表压强。



图2-9　波登管式金属压强表的内部结构

现在让我们说明液柱式测压计的原理。在储有油液的容器上M点装置一玻璃测压管，测压管上端开口与大气连通，如图2-12所示。我们可以看到油液充入测压管到一定高度而稳定。

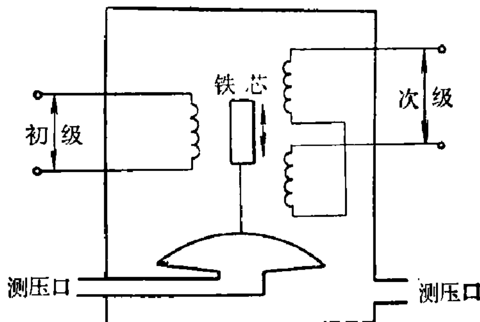


图2-10　差动线圈压强传感器

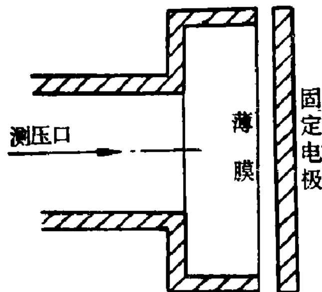


图2-11　电容式压强传感器

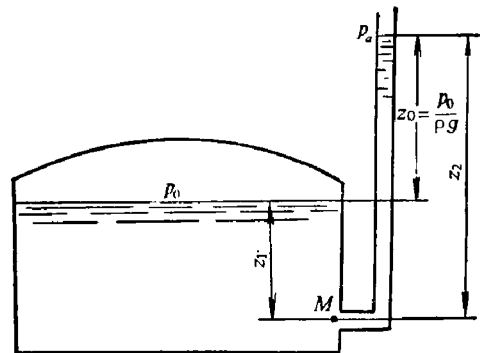


图2-12　液柱测压原理

从测压管方面来看，M点的压强为

$$p_M = p_a + \rho g z_2 = \rho g z_2 = \rho g (z_1 + z_0)$$

或
$$z_2=\frac{p_M}{\rho g}=\frac{p_M}{\gamma}$$

这说明M点的压强与z_2有关，读出z_2可以求得p_M。再从容器方面来看，M点的压强p_M为

$$p_M=p_0+\rho g z_1$$

由此可得

$$p_0+\rho g z_1=p_M=\rho g(z_1+z_0)$$

即
$$p_0=\rho g z_0=\gamma z_0$$

或
$$\frac{p_0}{\rho g}=\frac{p_0}{\gamma}=z_0$$

容器液面的压强p_0与测压管内z_0高度有关，读出z_0即可算得p_0。由此可见液柱高度可以精确地反映压强的大小，所以在流体力学中也常用液柱高度来作低压压强的单位，例如毫米汞柱（mmHg）或米水柱（mH_2O）。

例2-1 已知油液的密度$\rho=0.88\times10^{-3}kg/cm^3$，求压强为1 bar时的油柱高度

解 因为$1\ bar=10N/cm^2$，而$1\ N=1kgm/s^2$，所以压强为1 bar时的油柱高度h应为

$$h=\frac{p}{\rho g}=\frac{10}{0.88\times10^{-3}\times9.81}=1160cm=11.6m\text{油柱}$$

例2-2 求1个标准大气压相当于多少毫米汞柱，一个工程大气压相当于多少水柱，如果油的比重$S=0.88$则一个工程大气压相当于多少油柱？

解 因为一个标准大气压为101325Pa，即$10.1325N/cm^2$，而汞的密度$\rho_{Hg}=13.6\times10^{-3}kg/cm^3$所以

$$\frac{p}{\rho_{Hg}g}=\frac{10.1325}{13.6\times10^{-3}\times9.81}=76cmHg=760mmHg$$

又因为一个工程大气压为$9.81N/cm^2$，而水的密度为$\rho_{H_2O}=10^{-3}kg/cm^3$所以

$$\frac{p}{\rho_{H_2O}g}=\frac{9.81}{10^{-3}\times9.81}=1000cmH_2O=10mH_2O$$

已知油的比重$S=0.88$，则油的密度$\rho_{oil}=0.88\times10^{-3}kg/cm^3$

则
$$\frac{p}{\rho_{oil}g}=\frac{9.81}{0.88\times10^{-3}\times9.81}=1136cmOil=11.36mOil$$

即1个标准大气压相当于760mmHg，一个工程大气压相当于$10mH_2O$。

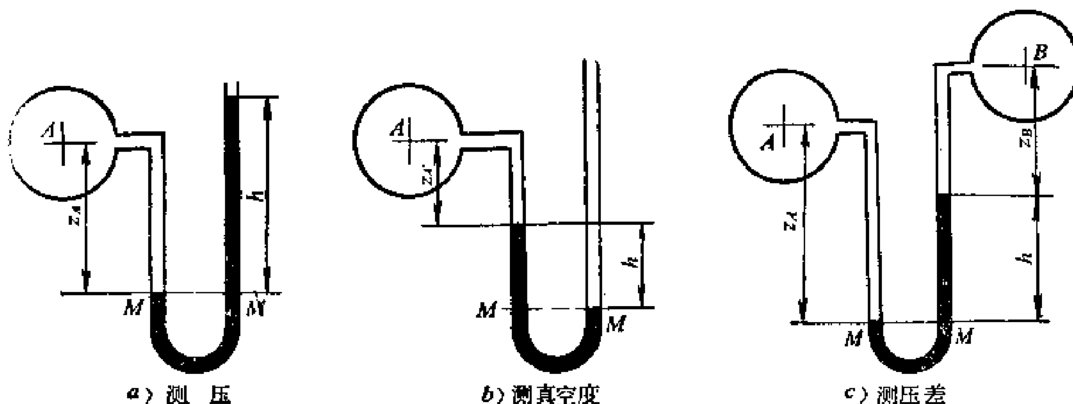


图2-13 U型测压计

根据测量对象和测量精度要求采用不同型式的液柱式测压计，除了测压管外，用得最广的是U型测压计，U型测压计不仅可测量正的表压强，而且可以测量真空度，还可以测量压差。U型测压计中的测压介质可用汞，油，水，酒精，四氯化碳等，原则是不能与被测液体混和，并且液柱高度适中，如图2-13所示。

当测量很低压强时，为了放大读数，提高测量精度，采用斜管式测压计，如图2-14所示。由于 $l=\frac{h}{\sin\theta}$，即使液柱 h 很小，只要 θ 角较小 l 读数仍可较大，所以它可以测出微小的压强，通常也称为微压计。

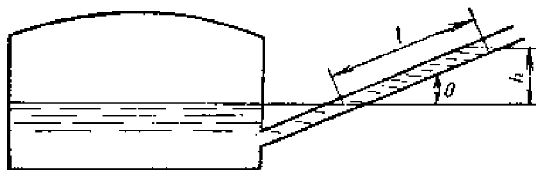


图2-14 微压计

例2-3 用U型测压计测量管中真空度，管中油的比重为0.88，测压计介质为汞，已知汞柱高 $h=100$mmHg 且 $z_A=200$mm，图2-13 b，求真空度。

解 在连通器内同一种液体中同一水平面上具有相等的压强，所以在 $M-M$ 面上一边为大气压 $p_M=p_a$，另一边为

$$p_M=p_A+\rho_A g z_A+\rho g h$$

所以

$$p_A+\rho_A g z_A+\rho g h=p_a$$

因此真空度

$$p_a-p_A=\rho_A g z_A+\rho g h=880\times9.8\times0.2+13600\times9.8\times0.1$$

$$=1730+13320=15050\text{N/m}^2\approx0.15\text{bar}$$

用重力制计算，则管 A 中真空度为

$$p_a-p_A=\gamma_A z_A+\gamma h=0.88\times10^{-3}\times20+13.6\times10^{-3}\times10$$

$$=153.6\times10^{-3}=0.1536\text{kgf/cm}^2$$

或

$$\frac{p_a-p_A}{\gamma_A}=\frac{0.1536}{0.88\times10^{-3}}=174.5\text{cm 油柱}=1.745\text{ 米油柱}$$

例2-4 如图2-13 c，已知 $S_A=0.85$，$S_B=1.2$，$z_A=200$mm，$z_B=180$mm，$h=60$mm，U型计测压介质为汞，求 A 和 B 的压差。

解 同一液体同一水平面上压强相等，所以在U型计 $M-M$ 面上两边压强相等。

按SI制计算

$$p_A+\rho_A g z_A=p_M=p_B+\rho_B g z_B+\rho g h$$

所以

$$\Delta p=p_A-p_B=\rho_B g z_B+\rho g h-\rho_A g z_A$$

$$=1200\times9.81\times0.18+13600\times9.81\times0.06-880\times9.81\times0.2$$

$$=8397\text{N/m}^2=0.08397\text{bar}$$

§2-6 液体的相对平衡

我们讨论了在重力场中静止液体内压强的分布，现在我们来研究液体相对静止时的情况，所谓相对静止是指液体整体对地球有相对运动，但液体宏观质点之间则没有相对运动，如果把座标系取在装液体的运动容器上，液体对此座标是处于平衡状态。我们讨论下面三种情况：

1. 均匀直线运动的容器中的液体平衡

当容器作均匀直线运动时，如图2-15，容器内液体只受到表面力和地球引力的作用，即

质量力只是向着地心的重力，由此得$X=0$，$Y=0$，$Z=-g$。这与前述的在重力场中相对静止的液体受力情况完全相同，因此前述结论完全适用，等压面是水平面，液静压强分布规律为 $p=p_0+\rho gh$。

2. 等加速直线运动的容器中液体的平衡

设容器以等加速度a沿x座标轴向运动，如图2-16所示，则容器内液体所受的质量力除了地球引力外，还有惯性力，即

$$X=-a,\quad Y=0,\quad Z=-g$$

根据（2-1）式得

$$a+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}=0$$

$$g+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=0$$

由$\frac{\partial p}{\partial y}=0$可知压强$p$不是$y$的函数，即

$$p=p(x,\ z)$$

所以
$$dp=\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial z}dz=-\rho adx-\rho gdz$$

或
$$dp+\rho adx+\rho gdz=0$$

积分之得
$$p+\rho ax+\rho gz=C$$

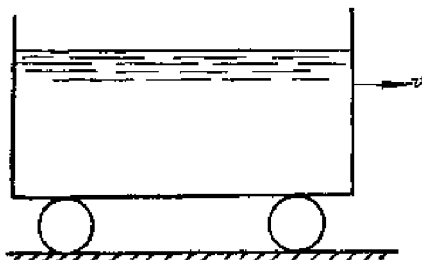
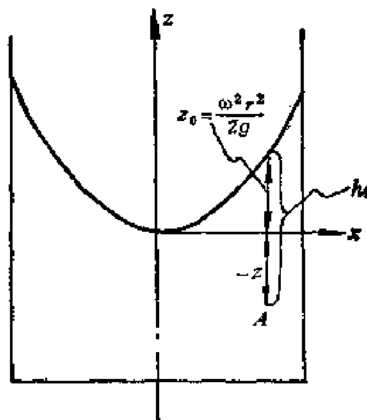


图2-15 容器作均匀直线运动



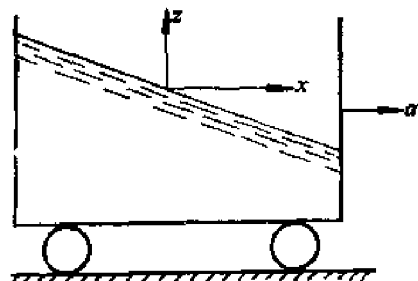


图2-16 容器作等加速直线运动

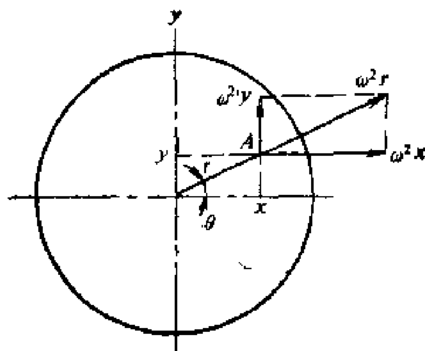


图2-17 容器作等角速度旋转运动

积分常数C由边界条件确定：当$x=0$、$z=0$、$p=p_0$，得$C=p_0$。所以压强分布规律为

$$p=p_0-\rho ax-\rho gz \tag{2-6}$$

在液面上$p=p_0$，因此液面的方程为

$$ax+gz=0$$

即斜率为$-\frac{a}{g}$的直线。等压面为$dp=0$，则

$$adx+gdz=0$$

或
$$\frac{dz}{dx}=-\frac{a}{g}$$

由此可见等压面的斜率与液面相同，即等压面为平行于液面的一族平面。

3. 等角速度旋转容器中液体的平衡

盛有液体的容器绕垂直轴作等角速度ω旋转，在起动时液体被甩向外周，但液体很快会成为一个整体随容器一起旋转，液体相互间没有相对运动，如图2-17所示。在这种情况下，液体所受的质量力，除了地球引力外，尚有因等角速度ω而产生的离心力ω^2r，这个力可分解为与x轴同向的$\omega^2r\cos(r,\ x)=\omega^2x$和与$y$轴同向的$\omega^2r\sin(r,\ x)=\omega^2y$分量，则

$$X=\omega^2x,\quad Y=\omega^2y,\quad Z=-g$$

根据（2-2）式得

$$dp=\rho(\omega^2xdx+\omega^2ydy-gdz)$$

积分之得

$$p=\rho\left(\frac{\omega^2x^2}{2}+\frac{\omega^2y^2}{2}-gz\right)+C=\rho\frac{\omega^2r^2}{2}-\rho gz+C$$

积分常数C可由边界条件：$r=0$，$z=0$时$p=p_0$，求得：$p_0=C$

代入上式得压强分布规律为

$$p=p_0+\rho\frac{\omega^2r^2}{2}-\rho gz \tag{2-7}$$

等压面为$p=$常数，则

$$p-p_0=\rho\frac{\omega^2r^2}{2}-\rho gz=\text{常数}$$

则
$$\frac{\omega^2r^2}{2}-gz=C$$

这是一族对称于z轴的抛物面。在液面上$p=p_0$，$z=z_0$，则液面的方程为

$$\frac{\omega^2r^2}{2}-gz_0=0$$

或
$$z_0=\frac{\omega^2r^2}{2g} \tag{2-8}$$

上式中z_0为液面上任一点离座标原点的高度，以（2-8）式代入（2-7）式，我们得

$$p=p_0+\rho g(z_0-z) \tag{2-9}$$

例如液体内一点A（图2-17），该点在座标原点以下，所以z是负值，因此$z_0-z=h_A$　则A点的压强p_A为　$p_A=p_0+\rho gh_A$

即压强分布规律实质上和静止液体是类似的。

采用等角速度旋转而增大外缘的压强在工程技术上是很有实用价值的，离心铸造即为一例。某些机械零件如轴瓦、轮箍等铸件往往采用离心铸造的办法使外缘静压强增大，密实铸件而提高质量。离心铸造时浇口在旋转轴心处，金属溶液进入模子后，由于模子的限制，液面不可能成为旋转抛物面，但溶液中的压强分布仍按抛物面规律，即按（2-7）式计算。

例2-5 浇铸车轮如图 2-18 所示，已知 $H=180\text{mm}$，$D=600\text{mm}$，铁水密度 $\rho=7000\text{kg/m}^3$，求M点压强，如果采用离心铸造，旋转速度 $n=10$转/秒，则M点压强将为多少？

解 不采用离心铸造时M点压强为

$$p_M=p_0+\rho gH$$

p_a 为大气压，以 $p_a=0$ 计则

$$p_M=\rho gH=7000\times9.81\times0.18=12360\text{N/m}^2$$

即M点压强 $p_M=12360\ \text{Pa}\approx0.0124\ \text{MPa}$

如果采用离心铸造，则由（2-7）式知M点压强为

$$p_M=p_0+\rho\frac{\omega^2r_M^2}{2}-\rho gz_M$$

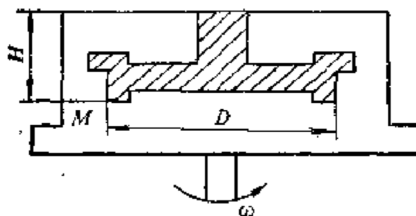


图2-18 例2-5

式中 $p_0=p_a=0$；

$\omega=2\pi n=20\pi\ \text{rad/s}$；

$r_M=300\text{mm}=0.3\text{m}$；

$z_M=-180\text{mm}=-0.18\text{m}$。

代入上式得

$$p_M=7000\left(\frac{400\pi^2 0.3^2}{2}\right)-7000\times9.81\times(-0.18)$$

$$=1240000+12360=1252360\text{Pa}\approx1.25\text{MPa}$$

即采用离心铸造时M点的压强将增大约 100 倍。

§2-7 液体对壁面作用力的计算

液体对固体壁面产生作用力，根据压强的特性，这个力是压向壁面的，通常称为总压力。只要我们具有正确的压强概念，并掌握压强的特性，总压力的计算是不困难的。

液体对壁面作用所产生的压力（总压力）必定垂直于面，如果压强是 p，面积为 dA，那末在微小面积 dA 上的微小压力为 pdA，垂直于面的总压力 F 为

$$F=\int_A pdA \tag{2-10}$$

必须注意，力是矢量，因此在积分时微小压力的方向要一致。对于平面来说，微小压力垂直于面，面上不同点的微小压力方向是一致的。对于曲面来说，不同点上的微小压力方向是不一致的，不能简单地用（2-10）式求F力，而应将微小压力进行分解，积出总压力的分量，然后再进行力的合成而求出总压力F。下面我们分别讨论这两种情况。如图 2-19 所示，设一平面A受到液体的作用，液面压强为 p_0，则在任意微小面积 dA 处的压强 p 为

$$p=p_0+\rho gh=p_0+\rho gy\sin\theta$$

因此，该平面上受到的总压力F为

$$F=\int_A p\,dA=\int_A (p_0+\rho g y\sin\theta)\,dA$$

或

$$F=p_0A+\rho g\sin\theta\int_A y\,dA$$

因为$\int_A y\,dA$是平面A绕通过o点的ox轴的面积矩，即$\int_A y\,dA=y_cA$，式中y_c是平面A的形心C至ox轴的距离。因为$y_c\sin\theta=h_c$，所以总压力F为

$$F=p_0A+\rho gAy_c\sin\theta=(p_0+\rho gh_c)A \tag{2-11}$$

总压力的作用点为D。总压力F对ox轴的力矩应该等于微小压力dF对ox轴的力矩之和，即

$$y_FF=\int_A y\,dF=\int_A (p_0+\rho g y\sin\theta)\,y\,dA=p_0Ay_c+\rho g\sin\theta\int_A y^2dA$$

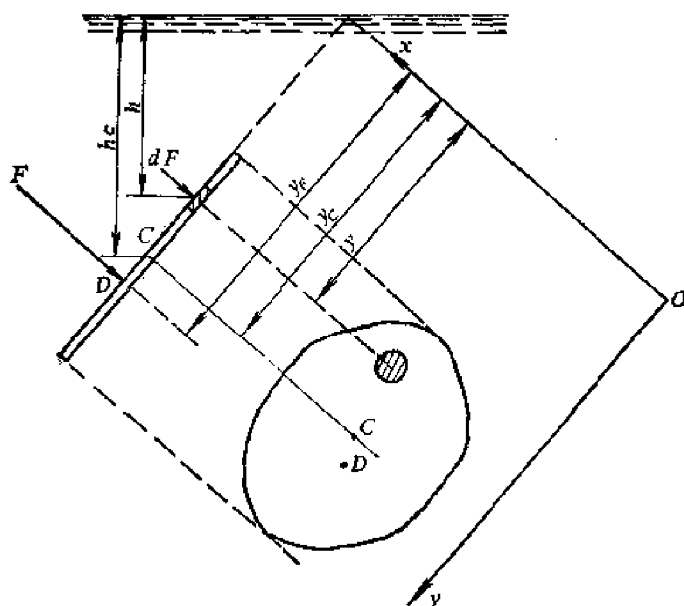


图2-19　液体对平面的作用

由理论力学可知$\int_A y^2dA$为面积A对ox轴的惯性矩J_x，因此

$$Fy_F=p_0Ay_c+\rho g\sin\theta\,J_x$$

或

$$y_F=\frac{p_0Ay_c+\rho gJ_x\sin\theta}{F}=\frac{p_0Ay_c+\rho gJ_x\sin\theta}{p_0A+\rho gAy_c\sin\theta}$$

因为$J_x=J_c+y_c^2A$，式中J_c是平面A对通过C点平行于ox轴的惯性矩，由此得

$$y_F=\frac{p_0Ay_c+\rho g(J_c+y_c^2A)\sin\theta}{p_0A+\rho gAy_c\sin\theta} \tag{2-12}$$

对oy轴取力矩，则

$$x_FF=\int x\,dF=\int_A x(p_0+\rho g y\sin\theta)\,dA=p_0x_cA+\rho g\sin\theta\int_A xy\,dA$$

因为$\int_A xy\,dA$是平面A的惯性积J_{xy}，所以

$$x_F=\frac{p_0x_cA+\rho gJ_{xy}\sin\theta}{F}$$

又因为$J_{xy}=J_{x'y'}+Ax_cy_c$式中$J_{x'y'}$是平面A对通过C点平行于ox及oy轴的惯性积，由此得

$$x_F=\frac{p_0x_cA+\rho g(J_{x'y'}+Ax_cy_c)\sin\theta}{p_0A+\rho gAy_c\sin\theta} \tag{2-13}$$

如果液面敞开于大气，则$p_0=0$，(2-12)及(2-13)式可简化为

$$y_F=\frac{J_c}{Ay_c}+y_c$$

及

$$x_F=\frac{J_{x'y'}}{Ay_c}+x_c$$

因为$\frac{J_c}{Ay_c}$恒为正值，所以$y_F>y_c$，即总压力F的作用点D（称为压力中心）永远在平面面积形心C的下边。如果通过平面形心C平行于ox及oy的轴中有一为对称轴，则$J_{x'y'}=0$，由此得$x_F=x_c$。

在液压技术领域内，液面压强p_0远较$\rho gy\sin\theta$为大，后者可以忽略不计，则可得：

$$y_F=y_c \qquad x_F=x_c$$

计算曲面上受到液体的作用力时，由于不同点上作用力的方向不一致，不能直接在曲面上积分，应将各点上的微小压力dF进行分解，然后再总和起来。

设在曲面上任意点取微小面积dA，图2-20，该面积上的微小压力dF为

$$dF=pdA=(p_0+\rho gh)dA$$

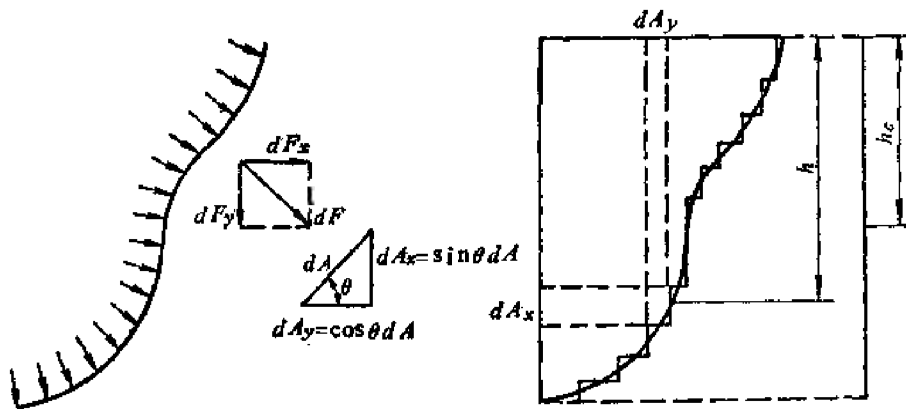


图2-20　液体对曲面的作用力

将dF力分解为dF_x及dF_y则

$$dF_x=\sin\theta dF=p\sin\theta dA=pdA_x=(p_0+\rho gh)dA_x$$
$$dF_y=\cos\theta dF=p\cos\theta dA=pdA_y=(p_0+\rho gh)dA_y$$

积分之得

$$F_x=p_0A_x+\rho gh_cA_x \tag{2-14}$$

式中A_x是面积A在垂直面的投影，h_c是A_x的形心至液面的垂直距离。

$$F_y=p_0A_y+\rho g\int hdA_y$$

因为$\int hdA_y$是曲面上的液体体积V，则

$$F_y=p_0A_y+\rho gV \tag{2-15}$$

式中A_y是面积A在水平向的投影。

求得F_x及F_y后，将F_x及F_y合成即可得总压力F为

$$F=\sqrt{F_x^2+F_y^2} \tag{2-16}$$

对于液面敞开于大气时$p_0=0$则

$$\left.\begin{aligned}F_x&=\rho gh_cA_x\\F_y&=\rho gV\end{aligned}\right\} \tag{2-17}$$

在液压技术中，忽略ρgh项　则

$$\left.\begin{array}{l}F_x = p_0 A_x\\F_y = p_0 A_y\end{array}\right\} \tag{2-18}$$

§2-8 浮　　力

如果体积为V的任何形状的物体完全浸入密度为ρ的流体中（图2-21），那末周围流体将从各方面对物体施加压力，根据上节所述的原理，显然，物体所受的水平方向压力是各向相互抵消，总压力为零。垂直方向的总压力可分二部计算。在曲面ACB上作用着向下的$F_Ⅰ=\rho gV_Ⅰ$的力，而在曲面ADB上作用着向上的$F_Ⅱ=\rho g(V_Ⅰ+V)$的力，因此作用在该物体上的向上总压力F_v为

$$F_v = F_Ⅱ - F_Ⅰ = \rho g(V + V_Ⅰ) - \rho g V_Ⅰ = \rho g V$$

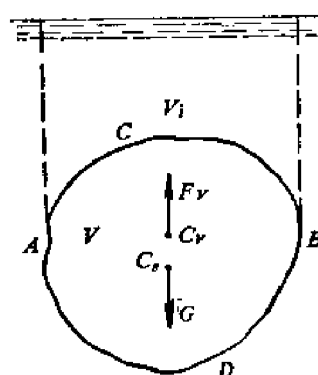


图2-21　浮力

F_v是向上作用于物体的流体总压力，通常称为浮力。显然ρgV表示与浸入流体中物体体积相等的流体重量，即被浸入物体所排开的流体重量，由此可见：一个完全浸入流体中的物体受到流体作用的垂直向上的浮力，这个浮力等于被物体排开的流体重量，而且与物体浸入流体的深度无关。

浮力作用在被排开流体的重心C_v上，排开流体的重心C_v与物体的重心C_g是有区别的，只有当物体是完全均质的情况下C_v与C_g重合。

由于流体对物体作用着浮力，所以物体在流体中的重量等于物体本身的真实重量减去浮力，也就是说物体在流体中失去的重量等于物体排开流体的重量，这就是著名的阿基米德原理。

§2-9　流体静力学在液压技术中的应用

上面我们讨论了流体静力学的一些重要规律，这些规律是液压技术的基础，必需熟练地掌握，为了说明它们在液压技术中的应用，我们谈下述三点：

1. 力的放大

在生产中往往遇到需要很大作用力的情况，例如压制和锻造大型零件或锻件时，需用千吨级、万吨级的压机，这样巨大的力可以用液体等值地传递压强的原理来获得。在两个连通的液压缸所构成的系统内有大小不同的活塞（图2-22），小活塞上作用一个F_1力产生的压强为p_1

$$p_1 = \frac{F_1}{A_1}$$

大活塞上作用F_2力使系统内产生压强p_2

$$p_2 = \frac{F_2}{A_2}$$

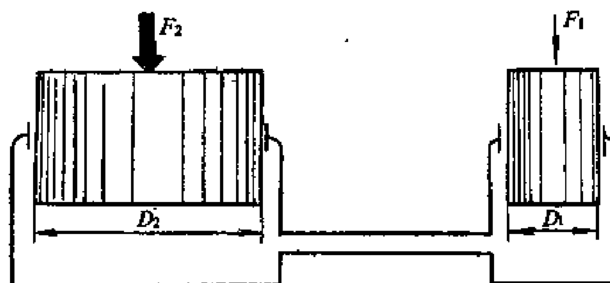


图2-22　力的放大

如果上述系统呈平衡状态，系统中压强应相等，则　$p_1 = p_2$，即

$$\frac{F_1}{A_1}=\frac{F_2}{A_2}$$

或

$$F_2=\left(\frac{A_2}{A_1}\right)F_1=\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2F_1$$

因为 $D_2>D_1$，所以 $F_2>F_1$，这就是说在小活塞上作用一个较小的力，可以在大活塞上获得一个较大的力，力得到放大，放大的倍数等于大小活塞直径比值的平方。力的放大是液压技术的一个特征，一切压机都是利用这个特征而工作的。实际上 F_2 是压机工作时所要求的力，称为负载，系统压强由负载 F_2 决定，并由液压泵和其他元件来提供和保证的。

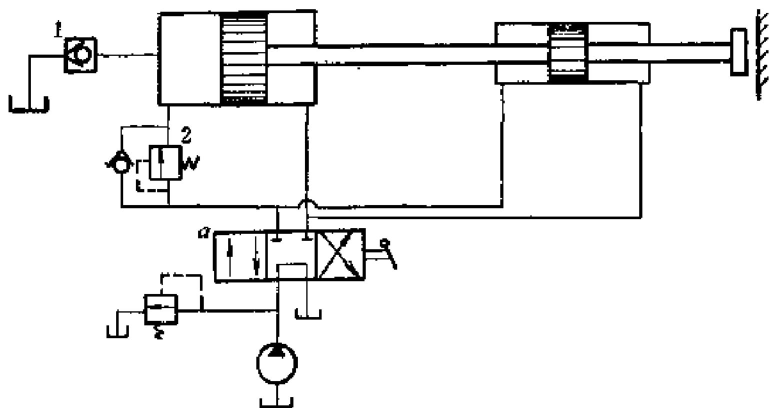


图2-23　串联液压缸增大作用力

由上述可见，在一定的 F_1 及 A_1 条件下，要增大 F_2 的唯一办法就是增大 A_2，这除了增大 D_2 外，在液压技术中还用所谓"串联液压缸"的办法。图 2-23 是串联液压缸增大作用力的回路，当三位四通阀处于 a 的位置，开始时油液只能进入小液压缸，活塞杆作快速送进，此时大液压缸从充液阀 1 进油，当压紧工件后，油压上升，顺序阀 2 动作，高压油进入大缸，两液压缸同时以高压进行工作，压紧力等于两液压缸的合力。

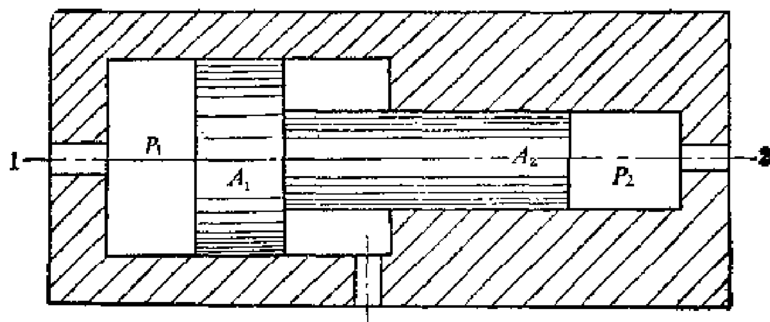


图2-24　增压器

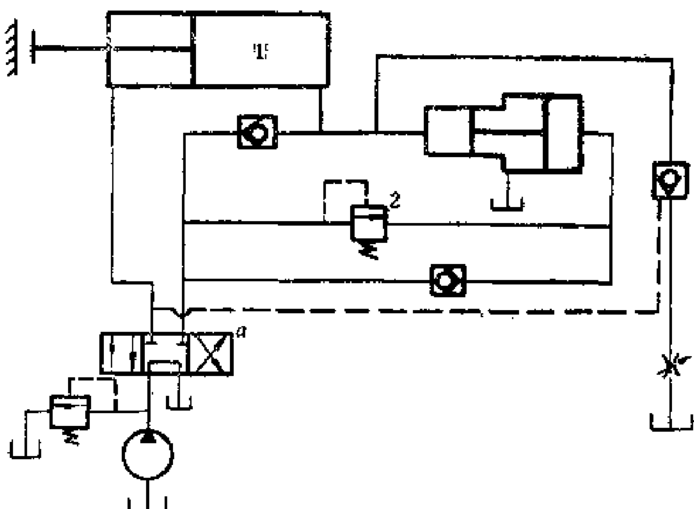


图2-25　增压回路（一）

2. 压强的放大

应用流体静力学的原理可以使压强得到放大，如图 2-24 所示。低压油液从 1 进入，作用于大活塞面积 A_1 上，使活塞得到 $F_1=p_1A_1$ 的压力。因为小活塞与大活塞连在一起，小活塞上的力 F_2 即为 F_1，使高压缸中产生压强 $p_2=\frac{F_1}{A_2}=p_1\frac{A_1}{A_2}$。因为 $A_1>A_2$，所以

$p_2 > p_1$，压强得到放大，这个能放大压强的元件称为增压器。不难看出，压强的放大是通过减小受压面积来实现的，这与力的放大刚好相反。

图 2-25 为使用增压器的回路，当三位四通阀处于 a 的位置时，油液进入主液压缸大腔 1，使活塞左移，当压到工件后，压强增大，顺序阀 2 动作，油液进入增压器大腔，使小腔内产生高压而使主液压缸大腔 1 内压强倍增。

图 2-26 是另一种增压回路，当三位四通阀处于 a 位置时，油液进入主液压缸大腔 1，推动主缸活塞右移，压到工件后二位三通阀打 b 位，油液进入增压缸 2 腔，推动增压活塞，使主缸 1 腔压强倍增。

3. 差动原理

图 2-27 所示液压缸大小腔互相连通，因此压强相等，但作用面积不等而产生差动力 $F=\frac{\pi}{4}(D^2-d^2)p$，只要这个差动力能克服摩擦力或摩擦力与活塞的自重，就可以推动活塞右移，这时小腔内的回油又被送到大腔中，增加了大腔的进油量，使活塞快速送进，当需要较大作用力时，只要将二位三通阀打 a 位，回油与油箱接通，小腔内压强降低，活塞上作用力就增大。这种差动原理在液压技术中是经常应用的。

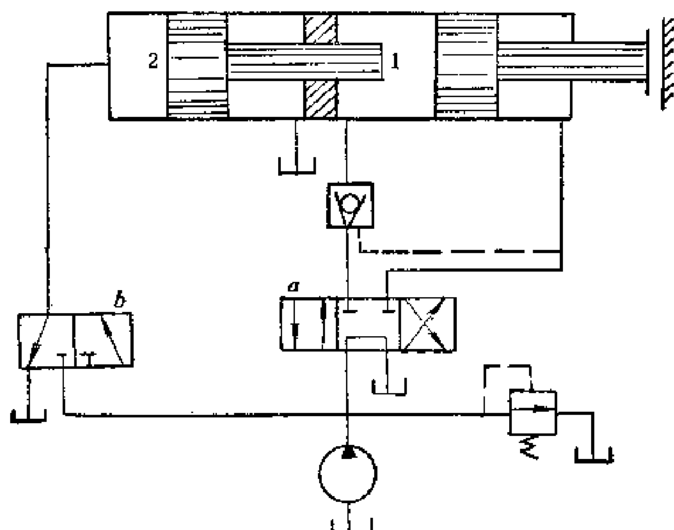


图2-26　增压回路（二）

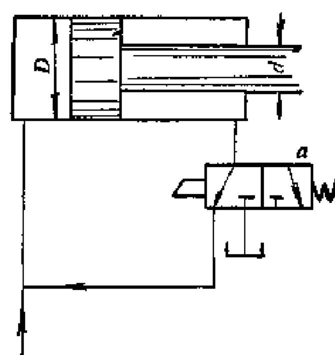


图2-27　差动原理

第三章 流 体 运 动 学

本章描述流体的机械运动并讨论它的运动规律，但并不涉及流体内部及流体与其他物体的作用力，即不讨论引起流体运动的力。

§3-1 流体运动的基本概念

在一个空间区域内，每一空间点在某一时间内都对应着一个确定的标量或矢量的值，这样一组标量或矢量构成一个标量场或矢量场。流体是连续介质，充满流体的某一空间就构成一个综合的流动场，把流动场中的质点的运动参数，例如流速 u，压强 p 表示为空间点座标和时间的函数，就给出了各运动参数的场，例如速度场，压强场，温度场等。

压强：$p = p(x, y, z, t)$

流速：$u = u(x, y, z, t)$

温度：$T = T(x, y, z, t)$

如果流场中空间点上的运动参数 p、u 及 T 等，在不同时间内都有确定的值，即它们只随空间点而变，不随时间 t 而变，则这个流场是恒定的，流体的运动称为恒定流动，即恒定流动时 $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$，$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$。如果流场中流体运动参数既随空间点也随时间而变，则为非恒定流场，这种运动称为非恒定流动。例如液体从容器中出流，如果我们能补偿容器中出流的流量，使容器中液面保持恒定（图 3-1 a），则容器中各点上液体运动参数 p，u 等将不随时间而变，流动是恒定的。如果我们不补偿容器中的出流量，则随着时间的消逝，液面将逐渐下降（图 3-1 b），容器内各点上的液体运动参数将随着时间而改变，流动为非恒定。

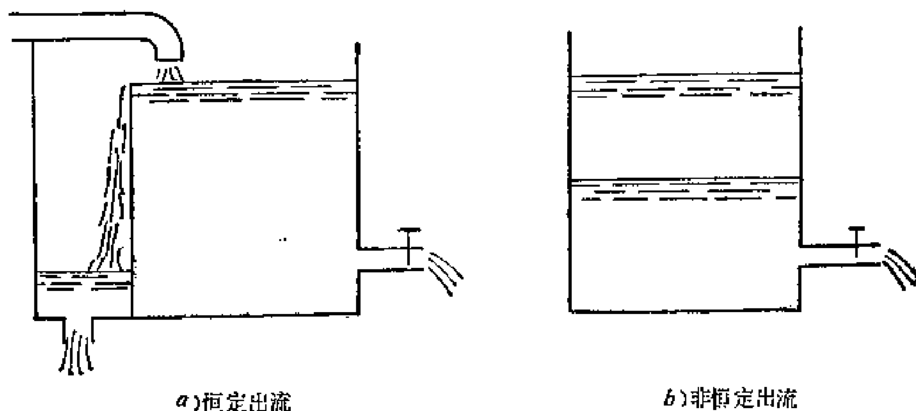


图3-1 恒定出流与非恒定出流

恒定流动与时间无关，研究起来比较方便，非恒定流动要复杂困难得多。严格来讲，客观存在的流体运动绝大多数是非恒定的，我们经常把那些变化不大的非恒定流动，在一定条件下简化为恒定流动，只要其结果能近似地符合客观实际。例如紊流运动时，空间点上的流

体速度有一定程度的脉动，实际上是一种非恒定流动，如果这个脉动的真实流速，在足够长的时间过程中它能保持在某一定数值上下脉动，如图 3-2 所示，这个一定数值的流速恰好等于在该时间过程内真实流速的平均值，我们称它为时均流速，并以符号 $\bar{u}$ 表示之，显然

$$\bar{u}=\frac{1}{t_1}\int_0^{t_1}u\,dt$$

如果我们用不随时间而变的时均流速来代替真实流速，那末流动就简化成为恒定的。又如在图 3-3 所示的液压系统，在一个工作循环内，系统中油液的流动状态(压强、流速、流动方向等)是随时间而变化的，当然属于非恒定流动。但是根据这个系统的工作步序，可把一个工作循环分成二种类型的动作来讨论，一类是：一个急增压和二个换向动作，都是短暂的非恒定流动过程。另一种类型是循环的主要步序，即快速进给 Δt_1，慢速进给 Δt_2 及快速回程 Δt_3，在这三个步序中，由于电力系统电压的波动，引起电机旋转频率的变化，以及液压缸本身结构原因，引起液压泵流量压强的脉动，使系统内的流速压强也有脉动，实际上也是非恒定流

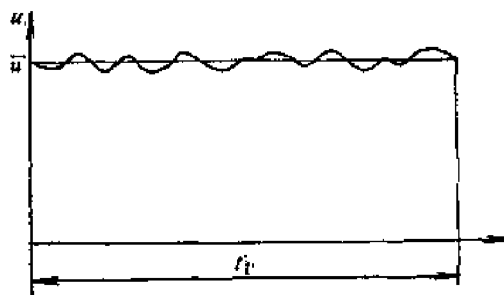


图3-2　紊流中某空间点上的流速

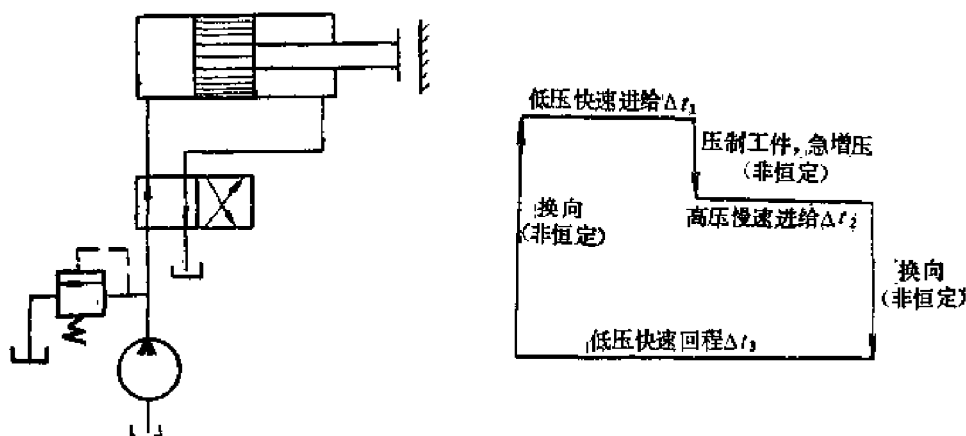


图3-3　简单液压系统

动，但是这些压强和流速都在一定数值附近脉动，用时间平均的概念来简化，可以认为系统中的压强和流速在这三个步序中基本上能保持恒定，属于恒定流动范畴，可以按恒定流动的规律来研究。另外三个非恒定的急变过程，都是在很短的时间内完成的，压强、流速和流向发生急变，引起系统内运动参数的波动，属于三种不同状态的非恒定流，需要用非恒定流的规律来解决，但是影响的因素极多，到目前还不能很完善地解决，有待进一步研究。

有些非恒定流动经过运动转换后可以把运动作为恒定流来讨论，例如一只船在平静的湖中作等速航行，如果我们站在湖岸上看湖水，由于湖水受到航船的扰动，在航船经过时湖水波翻浪涌，随着时间的推移，湖水逐渐归于平静，在这个阶段中湖水的运动是非恒定的，但如果我们站在航船上看湖水，那么总是那样的受到航船的扰动，湖水的运动基本上不随时间而改变，就可以认为湖水的运动是恒定的。同样的运动情况，由于观察者所处的位置不同而可得出不同的结论，这里的所谓观察者位置也就是座标系的位置，把座标固定在流体中等速运动物体上，实际上就是给整个流场以物体运动方向相反的速度，这样就使物体变为静止，

但流体与物体相互之间的运动关系仍然不变，然而运动却可作为恒定流动来处理。

如果流场中运动参数在任意时间和任意空间均恒定不变，则该流场是一均匀场，这种流动称为均匀流动，例如管道内的流速实际上是随空间而变的，所以管道断面上的流速场并不均匀，但有时为了计算方便常用断面平均流速的概念，假设断面上任意点的流速都等于平均流速 $v=\frac{1}{A}\int_A u dA$，式中 A 是断面积，采用了平均流速概念后就把断面上的流速场作为均匀场来处理。

流场中空间点和流动参数都是由座标系来确定的，直角座标系是最常用的，它是由互相正交的 x、y、z 三个座标轴组成，如图 3-4 所示。在座标系空间点上的流速 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{i}u_x+\boldsymbol{j}u_y+\boldsymbol{k}u_z$，这里 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 是 x、y、z 座标轴向的单位矢量。通常 u_x、u_y、u_z 均为空间点和时间的函数，即

$$u_x=u_x(x,y,z,t)$$
$$u_y=u_y(x,y,z,t)$$
$$u_z=u_z(x,y,z,t)$$

如果流动是对称于某轴，则常可采用圆柱座标系，如图 3-5 所示。这个座标系由矢径 r，

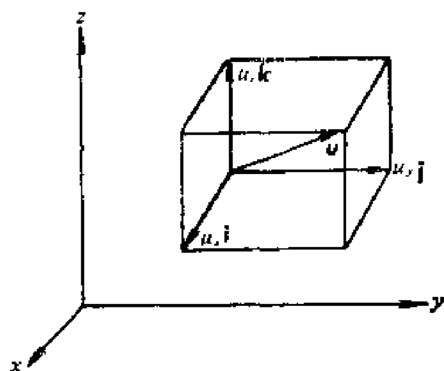


图3-4 直角座标系中的速度矢量

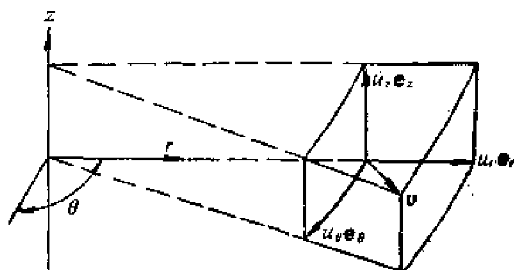


图3-5 圆柱座标系中的速度矢量

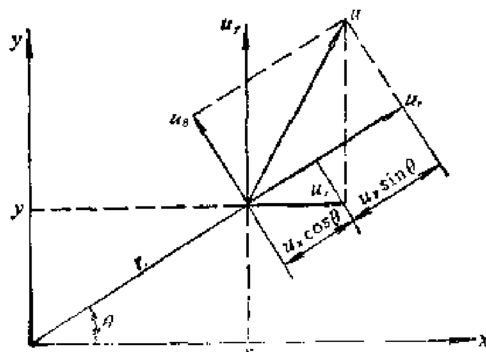


图3-6 座标换算

幅角 θ 及 z 轴组成，流速 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{e}_r u_r+\boldsymbol{e}_\theta u_\theta+\boldsymbol{e}_z u_z$，这里 $\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\theta$ 及 $\boldsymbol{e}_z$ 各为径向、切向及轴向的单位矢量，u_r 是径向分速，$u_\theta=\frac{rd\theta}{dt}$ 是垂直于径向的切向分速，u_z 是 z 轴向分速。u_r、u_θ 及 u_z 都是空间点和时间的函数，即

$$u_r=u_r(r,\theta,z,t)$$
$$u_\theta=u_\theta(r,\theta,z,t)$$
$$u_z=u_z(r,\theta,z,t)$$

这两种座标系是可以互换的，如图 3-6，它们的基本关系是

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ z &= z \end{aligned}\right\} \tag{3-1}$$

因为 $r^2=x^2+y^2$，微分之并除以 dt 得

$$\frac{dr}{dt}=\frac{x}{r}\ \frac{dx}{dt}+\frac{y}{r}\ \frac{dy}{dt}$$

以 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，$\frac{dr}{dt}=u_r$，$\frac{dx}{dt}=u_x$ 及 $\frac{dy}{dt}=u_y$ 代入得

$$u_r=u_x\cos\theta+u_y\sin\theta \tag{3-2}$$

又因 $\theta=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$，微分之得

$$d\theta=\left[\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\right]\left(\frac{xdy-ydx}{x^2}\right)=\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\frac{r\cos\theta\,dy-r\sin\theta\,dx}{r^2}$$

所以

$$r\frac{d\theta}{dt}=\cos\theta\ \frac{dy}{dt}-\sin\theta\ \frac{dx}{dt}$$

则

$$u_\theta=u_y\cos\theta-u_x\sin\theta \tag{3-3}$$

如果将圆柱座标系向直角座标系变换则

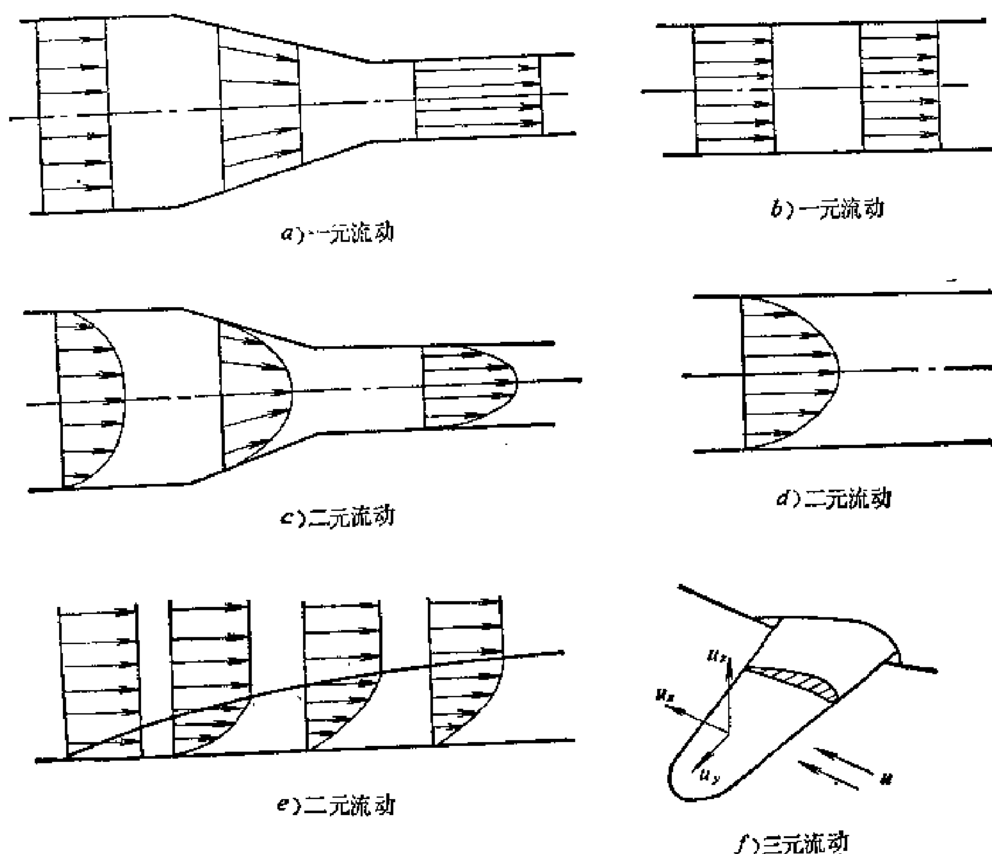


图3-7　一元、二元和三元流动

$$\left.\begin{aligned}u_x &= u_r\cos\theta - u_\theta\sin\theta\\ u_y &= u_r\sin\theta + u_\theta\cos\theta\end{aligned}\right\} \tag{3-4}$$

流场中流体运动参数一般都是随着空间位置的改变而异的，因此是一个三元问题，在数学上相当复杂，有时甚至不能获得方程的解。不少工程问题，根据其物理现象的本质，略去一些次要因素，可以把三元问题简化为二元或一元问题。

由于实际流体具有粘性，流体与固体壁面有粘附作用，因此流体在固体壁面上没有滑移现象，在垂直于流动方向常有速度梯度，图 3-7 的 c）、d）及 e）。因此实际流体在流动时至少是二元的，但如果以断面平均流速来描述，则运动参数就只沿流动方向而异，成为一元流动，图 3-7 的 a）及 b）。流体流经一个无限宽（垂直于流速方向的尺度）等断面物体时，流动是二元的，如果这个物体是有限宽度的话，那末流动将是三元的，图 3-7 f）。图 3-7 a）流速、压强只随流动方向而变，所以是一元流动，图3-7 b）的流速是恒定的，但压强仍沿流动方向而改变，所以也是一元流动。图3-7 c）是实际流体在圆管中流动，由于粘性的影响，流速随 r 而变，压强随流动方向 x 而变，所以是二元流动，图3-7 e）是实际流体流经无限宽平板，流速随 x 和 y 而异，也是一种二元流动，图3-7 f）是流体流经有限翼展机翼，流动是三元的。

§ 3-2　研究流体运动的两种方法

研究流体运动的现象有两种不同的观点，因此形成两种不同的方法，一种是跟踪追迹的办法，叫做拉格朗日（Lagrange）法，即在流体内认定某一群质点，组成一个质点系，研究这个质点系中流体各质点随着时间的延续在空间的位置改变，设在某时间 t_0 下，质点的位置由它的起始座标 a、b、c 所确定，到了时间 t，由于质点的运动，它的空间座标值为 x、y、z 则

$$x = x(a, b, c, t)$$
$$y = y(a, b, c, t)$$
$$z = z(a, b, c, t)$$

流体质点的速度和加速度可由它的位移关系求得

$$u_x = \frac{\partial x}{\partial t},\quad u_y = \frac{\partial y}{\partial t},\quad u_z = \frac{\partial z}{\partial t}$$

$$a_x = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2},\quad a_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},\quad a_z = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

拉格朗日法是直接研究流体质点的运动，似乎是一个很简单很具体的方法，但实际上由于流体质点不象固体质点那样受到较大的约束，跟踪质点是一个很复杂的问题，因此除了少数特殊情况外，用这个方法来解决流体问题往往会遇到不可解决的困难，而且在实践中如欲采用拉格朗日法来研究流体运动，在测量流体的运动情况时就要跟着特定的流体质点来移动测量仪表，测出不同瞬时的数值，显然这种测量方法是很难实现的。

在流体力学中广泛采用了以欧拉（Euler）命名的另一种方法，这是一种设立检查站或观察站的办法，是在流体内划定一个称为控制体积的空间，这个控制体积可大可小，可以是一个微元体，也可以是以固体壁面和垂直于流向的断面所形成的控制面所包围的体积。然后研

究流体质点流经这个空间时，流体运动参数因时(t)因地(x，y，z)连续变化的规律，即运动参数都是时间和空间点座标的函数：

$$u_x = u_x(x, y, z, t)$$
$$u_y = u_y(x, y, z, t)$$
$$u_z = u_z(x, y, z, t)$$
$$p = p(x, y, z, t)$$
$$\rho = \rho(x, y, z, t)$$

欧拉法能将流体质点的复杂运动现象以固定的空间点上运动特性来表示，可以用空间座标的函数式进行数学分析，而且测试时也可将仪表固定在指定的空间点上，因此从理论和实验上都有它的方便之处，是一个以逸待劳的办法。

§3-3　迹线、流线和标记线

为了清楚地了解流体流动的情况，我们常用一些线条来描绘流体运动的图形，这些线有迹线、流线和标记线。

迹线是流体质点空间运动的轨迹，是在某一时间间隔 Δt 内质点运动所遗留的痕迹，例如将发光质点飘浮在运动液体面上，在 Δt 内拍下它的照相，可得这个发光质点的迹线。

流线是流场空间各点在同一瞬时的流动概念。如图 3-8，设在某一瞬时 t_1 在流场空间内某一定点 A_1，它的速度向量为 $\boldsymbol{u}_1$，沿着 $\boldsymbol{u}_1$ 方向离 A_1 为ΔS 的 A_2 点上，由于 A_2 与 A_1 空间座标不同，显然在同一瞬时 A_2点的速度向量 $\boldsymbol{u}_2$ 与 $\boldsymbol{u}_1$ 不同，在沿 $\boldsymbol{u}_2$ 方向离 A_2为ΔS 处取A_3可得同一瞬时的速度向量 $\boldsymbol{u}_3$，以同样方法得 A_4, A_5……A_n 点，这样就获得了 $A_1A_2A_3$……A_n 的一条折线，如果将 ΔS 无限缩小，趋近于零为极限，则折线就趋向为一条曲线，这条曲线就是流线。由此可见流线是流场中的一条曲线，曲线上每一点在同一瞬时流体质点的速度向量和这条曲线相切，也就是说流线表示了在某一瞬时一群流体质点的流速方向。因此用一组流线就可以绘出流场的流动图形，图 3-9。如果运动是恒定的，流场中各点的流速不随时间而

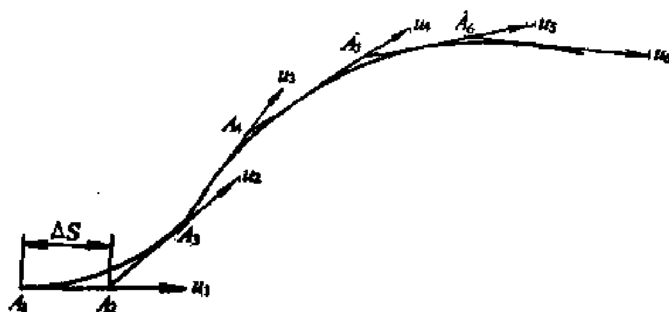


图3-8　流线的定义

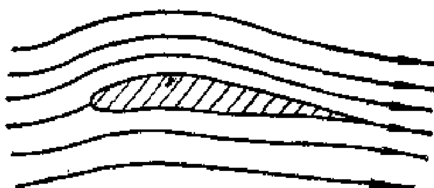


图3-9　由流线组成的流动图形

变，流线和流动图形是恒定的，而且流线上各质点将沿着流线而运动，这时的流线虽与流线上流体质点的迹线相重合，但流线与迹线仍有本质上的不同。如果运动是非恒定的，则流场中各点的流速包括大小和方向将随时间而变，因此流线和流动图形将随着时间而变幻不定，即非恒定流时，流线和流动图形只存在于某一瞬时，时间变了它们也相应地改变。

由于流场各点的速度是空间点座标的连续单值函数，故除了速度等于零的点外，经过流场内的一点只能画一条流线，流线不可能相交或分支，也不会有突然的转折，否则在相交点，分支点或突然转折点上将有几个不同的速度，这是不符合实际的，如果出现这些点的话，唯一可能的条件是流速等于零。由于流线上各点的流体速度与流线相切，流线上不存在法向速度，因此流线如同固体壁面一样，流体质点不能穿越流线。

流线上一点 A 取微小线段 ds，图 3-10，A 点的切线与座标轴所成角度的余弦为

$$\frac{dx}{ds};\ \frac{dy}{ds};\ \frac{dz}{ds}$$

而 A 点的速度向量与各座标轴所成角度的余弦为

$$\frac{u_x}{u_s};\ \frac{u_y}{u_s};\ \frac{u_z}{u_s}$$

由流线的定义知，流线的切线与流体质点的速度向量是重合的，即

$$\frac{dx}{ds}=\frac{u_x}{u_s};\ \frac{dy}{ds}=\frac{u_y}{u_s};\ \frac{dz}{ds}=\frac{u_z}{u_s}$$

或

$$\frac{dx}{u_x(x,y,z,t)}=\frac{dy}{u_y(x,y,z,t)}=\frac{dz}{u_z(x,y,z,t)}=\frac{ds}{u_s(x,y,z,t)} \tag{3-5}$$

这就是直角座标系的流线微分方程式，圆柱座标系的流线方程式为

$$\frac{rd\theta}{u_\theta(r,\theta,z,t)}=\frac{dr}{u_r(r,\theta,z,t)}=\frac{dz}{u_z(r,\theta,z,t)} \tag{3-6}$$

迹线的微分方程式为 $\frac{ds}{dt}=u_s(a,b,c,t)$ 则

$$\frac{dx}{dt}=u_x(a,b,c,t)$$

$$\frac{dy}{dt}=u_y(a,b,c,t)$$

$$\frac{dz}{dt}=u_z(a,b,c,t)$$

因此

$$\frac{ds}{u_s(a,b,c,t)}=\frac{dx}{u_x(a,b,c,t)}=\frac{dy}{u_y(a,b,c,t)}=\frac{dz}{u_z(a,b,c,t)}=dt \tag{3-7}$$

式中 a、b、c、是起始点的座标值。(3-7)式中时间 t 是独立变数而流线微分方程式中 t 只是参变数，由此更可明确流线和迹线的本质区别。

在一段时间间隔 Δt 内先后流经某空间点的流体质点在某瞬时所组成的连续线称为标记线，例如质点 1，2，3 ……在 Δt 内依次通过某空间点 A 图 3-11，在某一瞬时由质点 1，2，3 ……连成的线即为标记线。在一定点射出的染色液体所显示的线即为标记线。在实验中用染色液体或烟气来观察流动图形都是标记线的应用。

流线、迹线和标记线是本质不同的三种描绘流体运动的线，只在恒定流动时它们相互重合，但仍然有质的差别。

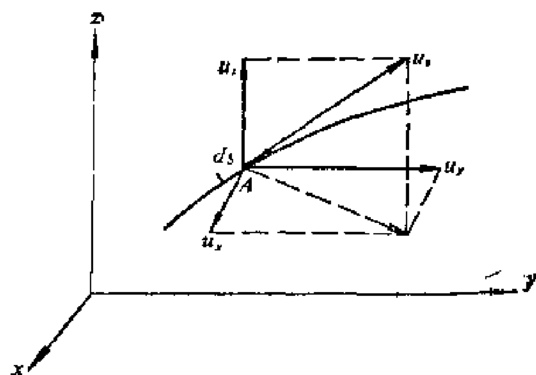


图3-10 流线

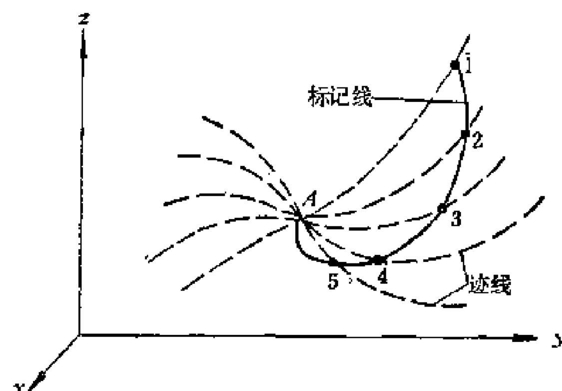


图3-11 标记线

§3-4 流管、流束、流量、过流断面和平均流速

某一瞬时 t，在流场的空间划出一任意封闭曲线，只要此封闭曲线本身不是流线，则经过该封闭曲线上每一点作流线，这些流线组合成一表面，称为流管，图 3-12。在流管所包围的空间里有无数流线，这些流线是不可能穿出流管的，在流管内的流线群称为流束，流管是流束的几何外形，在恒定流动时，流管的形状不随时间而变，由于流管的表面是由流线组成，流体不能穿过流线，因此流体是不能穿越流管的，所以在恒定流动时流管与真实管道一样。如果将流管的断面无限缩小趋近于零为极限，就获得微小流管或流束，微小流束实质上与流线的名词是一致的。我们认为运动的流体是由流束所组成，垂直于流束的断面 dA 称为流束的有效断面或称过流断面，我们认为在这个无限小的过流断面上各点的流速 u 是相等的，因此在 dt 时间内流经这个微小面积的流体体积 dV 和质量 dm 为

$$\left.\begin{aligned} dV &= ds\,dA = u\,dt\,dA \\ dm &= \rho\,ds\,dA = \rho u\,dt\,dA \end{aligned}\right\} \tag{3-8}$$

单位时间内流过的体积和质量称为体积流量 Q 和质量流量 $\dot{m}$，在流体力学中，一般把体积流量简称为流量，因此流过微小流束过流断面的流量 dQ 和质量流量 $d\dot{m}$为

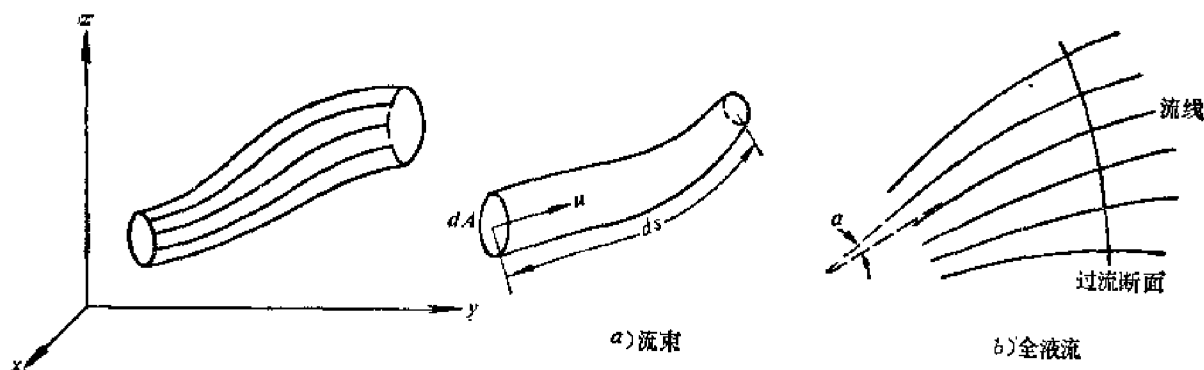


图3-12 流管

图3-13 过流断面

$$\left.\begin{aligned} dQ &= \frac{dV}{dt} = u\,dA \\ d\dot{m} &= \frac{dm}{dt} = \rho u\,dA \end{aligned}\right\} \quad (3\text{-}8\,a)$$

由于运动流体是由无数微小流束组成（图3-13），所以将各微小流束的断面相加则得全液流的过流断面，并用A表示之

$$A = \int_A dA \quad (3\text{-}9)$$

必须指出，过流断面是与流线相垂直的面，在一般情况下运动流体内各微小流束可能是不平行的（图3-13 b），因此过流断面往往是一个曲面。如果微小流束（流线)间的夹角α及流束的曲率都非常小，这种流动称为缓变流动，在缓变流动情况下，过流断面可以近似地认为是一个平面。

运动流体的流量Q和质量流量$\dot{m}$是微小流量和微小质量流量的积分

$$\left.\begin{aligned} Q &= \int_A u\,dA \\ \dot{m} &= \int_A \rho u\,dA \end{aligned}\right\} \quad (3\text{-}10)$$

如果dA是微小流束上任意方向的断面（图 3-14），$\boldsymbol{n}$为该断面的法向单位矢，则流量dQ为

$$dQ = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\,dA = u\cos(u,\ n)\,dA = u\,dA_s$$

则

$$Q = \int_A \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\,dA = \int_A u\cos(u,\ n)\,dA = \int_{A_n} u\,dA_s$$

式中　dA_s是垂直于流速$\boldsymbol{u}$的流束断面，即过流断面，$dA_s = \cos(u,\ n)\,dA$。

很多工程实际问题中由于还不能求得过流断面上的流速分布规律，因此用积分方式计算流量就有困难，为了便于解决问题，引入了断面平均流速的概念，就是把过流断面上的流速场假想为均匀场，即过流断面上的流速是各点相等的平均流速v，这个平均流速与过流断面A的乘积正好就是流量Q，即

$$\left.\begin{aligned} Q &= \int_A u\,dA = vA \\ v &= \frac{Q}{A} \end{aligned}\right\} \quad (3\text{-}11)$$

或

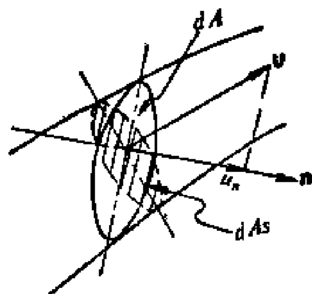


图3-14　流量的计算

根据这样的定义，用平均流速v代替实际流速u，只在计算流量时是合理而精确的，在计算其他物理量时就可能要产生误差。

§3-5　连续性方程

质量守恒是自然界的客观规律（不考虑原子核反应的质能互换等问题）流体力学也必须遵守这个规律。在流体力学中这个规律是用称为连续性方程的数学型式来表示的，是在流场中取一控制体积，然后研究流进与流出该控制体积的流体质量与控制体积内流体质量的变化

关系而获得的方程。如果在某一时间间隔 Δt 内，流进控制体积的流体质量大于流出的质量，那么在控制体积内流体质量必然增加，但体积是已经确定不变的，所以流体的密度 ρ 就要增大，反之就要减小。如果控制体积内流体密度保持不变，则流进控制体积的流体质量必须等于流出的质量，这就是连续性方程的物理本质。由于采用的座标系不同，连续性方程的数学型式也有所不同。

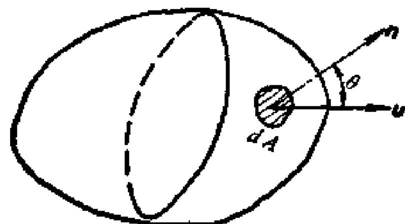


图3-15 用控制体积法推导连续性方程

在运动流体内取一控制体积 V_c（图 3-15），它的微小控制面积为 dA，流速矢量为 $\boldsymbol{u}$，则在 Δt 时间间隔内流出这个控制体积的净质量(即流出和流进的差)为 $\Delta t\iint_A \rho\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}dA$，式中的 ρ 和 $\boldsymbol{u}$ 在包围控制体积的控制面上是可以不同的，它们是时间和空间的函数。由于流体质量的流出，控制体积内的质量减少了 $-\left(\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{V_c}\rho dV_c\right)\Delta t$，根据质量守恒定律，则

$$\Delta t\iint_A \rho\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}dA=-\left(\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{V_c}\rho dV_c\right)\Delta t$$

或

$$\iint_A \rho\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}dA+\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{V_c}\rho dV_c=0 \tag{3-12}$$

如果是恒定流动则 $\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{V_c}\rho dV_c=0$，那末连续性方程为

$$\iint_A \rho\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}dA=0 \tag{3-13}$$

一般来说，油液的密度 ρ 基本上是一常数，则 (3-12)式的第二项为 $\rho\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{V_c}dV_c$，因为控制体积是不随时间而变的，所以 $\rho\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{V_c}dV_c=0$，由此得出结论，只要是不可压缩性流体，不管流动是否恒定，连续性方程均为

$$\iint_A \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}dA=0 \tag{3-14}$$

通常，对管道或流管进行计算，控制体积可沿壁面或流管表面取出(图 3-16 中的虚线)，这样只要对管道或流管的两个垂直断面进行计算，在恒定流动时：

$$\rho_1 v_1 A_1-\rho_2 v_2 A_2=0 \tag{3-15}$$

式中　v 为平均流速。

对于不可压缩性流体则

$$\rho v_1 A_1-\rho v_2 A_2=0$$

或

$$v_1 A_1=v_2 A_2=vA=\text{常数} \tag{3-15 a}$$

如果采用空间直角座标系，图 3-17，则在流体中取一微小平行六面体作为控制体积，它的三个相互垂直的边各为 Δx、Δy 及 Δz，设该微小平行六面体的中心点 O 处，在时间 t 时的流速为 $\boldsymbol{u}$，它的三个座标轴向分量为 u_x、u_y 及 u_z，密度为 ρ，则在同一时间内 $ABCD$ 面上的流速为 $u-\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x$，密度为 $\rho-\frac{1}{2}\frac{\partial\rho}{\partial x}\Delta x$ 而在 $EFGH$ 面上的流速和密度为

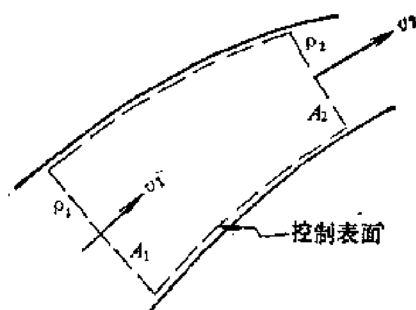


图3-16 质量守恒（沿流管）

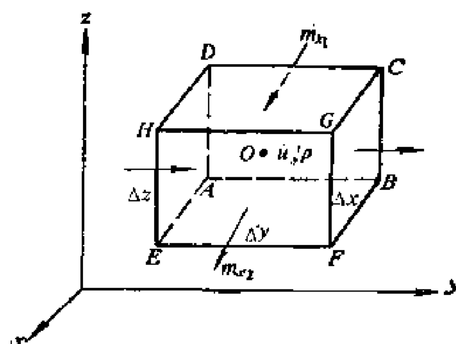


图3-17 质量守恒（直角坐标）

$u+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x$ 及 $\rho+\frac{1}{2}\frac{\partial \rho}{\partial x}\Delta x$，因此在 Δt 时间内在 x 方向经过 $ABCD$ 面流入控制体积的质量为

$$m_{x1}=\left(\rho-\frac{1}{2}\frac{\partial \rho}{\partial x}\Delta x\right)\left[u_x-\frac{1}{2}\frac{\partial u_x}{\partial x}\Delta x\right]\Delta y\Delta z\Delta t$$

$$=\rho u_x\Delta y\Delta z\Delta t-\frac{1}{2}\left[u_x\frac{\partial \rho}{\partial x}+\rho\frac{\partial u_x}{\partial x}\right]\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t+\frac{1}{4}\frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{\partial u_x}{\partial x}(\Delta x)^2\Delta y\Delta z\Delta t$$

经过 $EFGH$ 面流出的质量为

$$m_{x2}=\left(\rho+\frac{1}{2}\frac{\partial \rho}{\partial x}\Delta x\right)\left(u_x+\frac{1}{2}\frac{\partial u_x}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y\Delta z\Delta t$$

$$=\rho u_x\Delta y\Delta z\Delta t+\frac{1}{2}\left[u_x\frac{\partial \rho}{\partial x}+\rho\frac{\partial u_x}{\partial x}\right]\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t+\frac{1}{4}\frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{\partial u_x}{\partial x}(\Delta x)^2\Delta y\Delta z\Delta t$$

因此在 x 方向流出控制体积的净质量为

$$\Delta m_x=m_{x2}-m_{x1}=\left[u_x\frac{\partial \rho}{\partial x}+\rho\frac{\partial u_x}{\partial x}\right]\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t=\frac{\partial \rho u_x}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t$$

同样，在 y 方向和 z 方向流出该控制体积的净质量各为

$$\Delta m_y=\frac{\partial \rho u_y}{\partial y}\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t$$

$$\Delta m_z=\frac{\partial \rho u_z}{\partial z}\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t$$

因此，总的出流净质量为

$$\Delta t\iint_A \rho \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}dA=\Delta m_x+\Delta m_y+\Delta m_z$$

$$=\left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z)\right]\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t$$

控制体积本身内质量的减少为

$$-\left[\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{V_c}\rho dV_c\right]\Delta t=-\frac{\partial}{\partial t}(\rho\Delta x\Delta y\Delta z)\Delta t$$

因为 $\frac{\partial}{\partial t}(\rho\Delta x\Delta y\Delta z)=\Delta x\Delta y\Delta z\frac{\partial \rho}{\partial t}+\rho\frac{\partial}{\partial t}(\Delta x\Delta y\Delta z)$，而体积 $\Delta x\Delta y\Delta z$ 不随时间 t 而变，即 $\frac{\partial}{\partial t}(\Delta x\Delta y\Delta z)=0$。因此，根据质量守恒定律得

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\rho u_x+\frac{\partial}{\partial y}\rho u_y+\frac{\partial}{\partial z}\rho u_z\right]\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t+\frac{\partial\rho}{\partial t}\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t=0$$

或

$$\frac{\partial\rho u_x}{\partial x}+\frac{\partial\rho u_y}{\partial y}+\frac{\partial\rho u_z}{\partial z}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0 \tag{3-16}$$

(3-16) 式前三项之和称为 $\rho\boldsymbol{u}$ 的散度，用符号 $\mathrm{div}\rho\boldsymbol{u}$ 或 $\nabla\cdot\rho\boldsymbol{u}$ 表示，则连续性方程为

$$\mathrm{div}\rho\boldsymbol{u}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0 \tag{3-16 a}$$

在恒定流动时 $\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$ 则

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{div}\rho\boldsymbol{u}=\nabla\cdot\rho\boldsymbol{u}=0\\ \text{或}\quad \frac{\partial\rho u_x}{\partial x}+\frac{\partial\rho u_y}{\partial y}+\frac{\partial\rho u_z}{\partial z}=0\end{aligned}\right\} \tag{3-17}$$

对于不可压缩性流体 $\rho=$ 常数，则连续性方程为

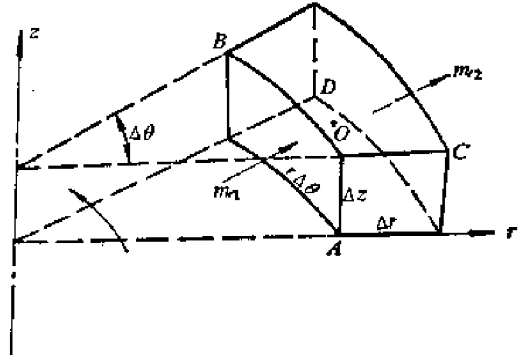


图3-18 质量守恒（圆柱座标）

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{div}\boldsymbol{u}=\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0\\ \text{或}\quad \frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0\end{aligned}\right\} \tag{3-18}$$

如果采用圆柱座标系，图 3-18，则取一微小扇形六面体作为控制体积，它的尺寸由 Δr，Δz 及 $\Delta\theta$ 所确定。设控制体积中心点座标为 $O(r,\theta,z)$，则在 Δt 时间内流入 AB 曲面的质量 m_{r_1} 为

$$m_{r_1}=\left(\rho-\frac{1}{2}\frac{\partial\rho}{\partial r}\Delta r\right)\left(u_r-\frac{1}{2}\frac{\partial u_r}{\partial r}\Delta r\right)\left(r-\frac{\Delta r}{2}\right)\Delta\theta\Delta z\Delta t$$

流出曲面 CD 的质量 m_{r_2} 为

$$m_{r_2}=\left(\rho+\frac{1}{2}\frac{\partial\rho}{\partial r}dr\right)\left(u_r+\frac{1}{2}\frac{\partial u_r}{\partial r}\Delta r\right)\left(r+\frac{\Delta r}{2}\right)\Delta\theta\Delta z\Delta t$$

在径向进出控制体积的净质量为流出与流进质量的差，略去高阶无限小得：

$$\Delta m_r=m_{r_2}-m_{r_1}=\left(u_r\frac{\partial\rho}{\partial r}+\rho\frac{\partial u_r}{\partial r}+\rho\frac{u_r}{r}\right)r\Delta\theta\Delta r\Delta z\Delta t$$

$$=\left(\frac{\rho u_r}{r}+\frac{\partial\rho u_r}{\partial r}\right)r\Delta\theta\Delta r\Delta z\Delta t$$

在切向的流入质量 m_{θ_1} 和流出质量 m_{θ_2} 各为

$$m_{\theta_1}=\left(\rho-\frac{1}{2}\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\Delta\theta\right)\left(u_\theta-\frac{1}{2}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\Delta\theta\right)\Delta r\Delta z\Delta t$$

$$m_{\theta_2}=\left(\rho+\frac{1}{2}\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\Delta\theta\right)\left(u_\theta+\frac{1}{2}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\Delta\theta\right)\Delta r\Delta z\Delta t$$

流出的净质量 Δm_θ 为

$$\Delta m_\theta=\left(u_\theta\frac{\partial\rho}{\partial\theta}+\rho\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\right)\Delta\theta\Delta r\Delta z\Delta t=\frac{\partial\rho u_\theta}{\partial\theta}\Delta\theta\Delta r\Delta z\Delta t$$

同样，在 z 向的流出净质量 Δm_z 为

$$\Delta m_z=\left(u_z\frac{\partial\rho}{\partial z}+\rho\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)r\Delta\theta\Delta r\Delta z\Delta t=\frac{\partial\rho u_z}{\partial z}r\Delta\theta\Delta r\Delta z\Delta t$$

所以总的流出净质量为

$$\Delta t\iint_A\rho\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}dA=\left(\frac{\partial\rho u_r}{\partial r}+\frac{\rho u_r}{r}+\frac{\partial\rho u_\theta}{r\partial\theta}+\frac{\partial\rho u_z}{\partial z}\right)r\Delta\theta\Delta r\Delta z\Delta t$$

控制体积本身的质量减少为

$$-\left(\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{V_c}\rho dV_c\right)dt=-\frac{\partial\rho}{\partial t}r\Delta\theta\Delta r\Delta z\Delta t$$

根据质量守恒定律得圆柱座标系连续性方程为

$$\frac{\rho u_r}{r}+\frac{\partial\rho u_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\rho u_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial\rho u_z}{\partial z}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0 \qquad (3\text{-}19)$$

在恒定流动时 $\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$ 则

$$\frac{\rho u_r}{r}+\frac{\partial\rho u_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\rho u_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial\rho u_z}{\partial z}=0 \qquad (3\text{-}19\text{a})$$

如果是不可压缩性流体 ρ = 常数，则圆柱座标系的连续性方程为

$$\frac{u_r}{r}+\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0 \qquad (3\text{-}20)$$

连续性方程在液压技术中是经常用到的，例如图 3-19 所示的简单系统，按连续性方程为

$$v_1A_1=v_2A_2=Q$$

由此可见，泵的活塞上的速度 v_1 必然引起缸的活塞产生速度 v_2，而且 $v_2=v_1\left(\frac{A_1}{A_2}\right)$，这就是说，液体的连续性原理不仅可以引伸出速度传递的概念，而且还引伸出速度可以放大（$A_1>A_2$）和缩小（$A_1<A_2$）的概念。此外，如果改变 v_1，那末 v_2 也将随着作相应的改变，这就是说只要我们能设法调节 v_1，那末 v_2 也将获得相应的调节。如果我们将图 3-19 的系统略加修改，在泵与缸之间分一可以控制的支路，如图 3-20 所示，则连续性方程为

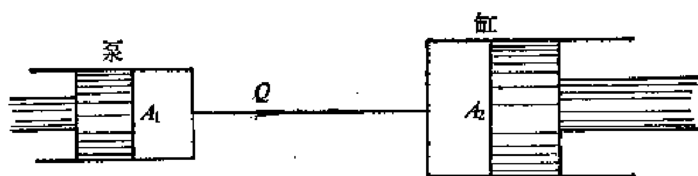


图3-19 速度的传递

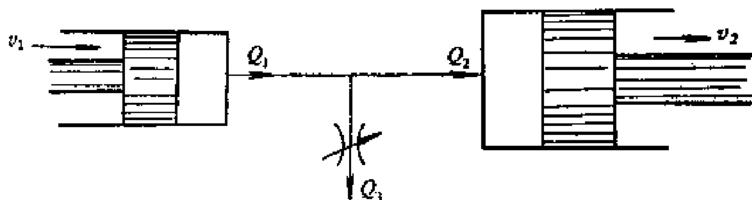


图3-20 速度的调节

$$v_1A_1=v_2A_2+Q_3$$

或

$$v_2=\frac{1}{A_2}(v_1A_1-Q_3)$$

由此可见，如果 v_1 是不可调节的，那末调节 Q_3 也能使 v_2 获得相应的调节。在液压技术中 v_1 或 Q_3 均能做到在一定范围内进行无级调节，因此 v_2 也能获得无级调节，这是液压传动能

被普遍应用的一个原因。

§3-6 起始条件和边界条件

前已述及我们把流体看成具有绵续性的连续介质，它的运动参数（速度、压强等）是空间点座标 x、y、z 和时间 t 的连续函数，因此流体力学问题往往可用微分方程式来表示，在求解这些微分方程时就要出现任意积分常数，给定一个常数就可有一个解，所以微分方程给出的是普遍规律，它有无穷多的解，但对特定的流体运动现象，它受到具体的条件限止，只能有唯一的特定解，也就是我们所需要的解。这种具体条件一般有两种，即起始条件和边界条件。

所谓起始条件即在某一既定瞬时 $t=t_0$，流体的运动参数是给定的，它满足

$$u_x(x,y,z,t_0)=f_1(x,y,z)$$
$$u_y(x,y,z,t_0)=f_2(x,y,z)$$
$$u_z(x,y,z,t_0)=f_3(x,y,z)$$
$$p(x,y,z,t_0)=f_4(x,y,z)$$

如果是恒定流动，流场中运动参数不随时间而变，因而不需要，也不可能预先给定流场的运动参数，只有在非恒定流动时才需要起始条件。

流场中流体可能与固体壁面接触，也可能与不同质的其他流体接触，接触界面即为边界，在边界上流体的运动参数受到边界的影响而具有确定的值，这就是边界条件，我们求得的流场的解必须满足边界条件，边界条件分为运动学条件和动力学条件两种，前者是确定流体在边界上速度值的条件，后者则确定流体在边界上的压强的大小。

（1）运动学条件

流体不能穿过边界，也不能脱离边界而形成空隙，因此在边界上的流体不可能有边界法线方向的相对分速度，即边界上流体的法向分速度 u_n 应与边界上对应点的法向分速度 $(u_n)_b$ 相等，即

$$u_n=(u_n)_b$$

对于理想流体来说，由于没有粘性，流体质点不会粘附在壁面，因此流体与边界壁面可以有相对的切向速度，而实际流体由于具有粘性，壁面上的流体必将粘附于壁面，如果不考虑流体与壁面之间微小滑移，则流体与壁面之间的切向相对速度也必须为零，即液体只能与相应点的壁面具有相同的速度，如果边界壁面是静止的，那末边界上的流速也只能为零。

（2）动力学条件

根据作用力与反作用力相等的原理，由外界介质或壁面作用于流体上的压强 p_b 与该处流体质点所受的压强 p 相等，即

$$p=p_b$$

例如液体与大气以自由液面为边界，自由液面上的液体压强，即为液面上的大气压强。

§3-7 流体质点运动的分析

我们知道刚体运动时除了改变它的空间位置外，还可能产生绕它本身某一瞬时轴的转

动，即刚体的运动是由移动和旋转运动所合成，由于流体易于变形，因此流体运动时除移动和旋转外还可能出现变形，这是流体运动的特殊性，也是它的复杂性。

设在任一瞬时 t，流体质点(图 3-21)内某一点 $M(x, y, z)$ 上的速度为 $\boldsymbol{u}$，它的三个座标轴分量各为 $u_x(x, y, z, t)$，$u_y(x, y, z, t)$ 及 $u_z(x, y, z, t)$，在同一瞬时，质点上另一点 $M_1(x+x_1, y+y_1, z+z_1)$ 处的速度为 $\boldsymbol{u}_1$，它的分量为

$$u_{x_1}=u_x(x+x_1, y+y_1, z+z_1, t)$$
$$u_{y_1}=u_y(x+x_1, y+y_1, z+z_1, t)$$
$$u_{z_1}=u_z(x+x_1, y+y_1, z+z_1, t)$$

将上列 $\boldsymbol{u}_1$ 的分量按泰勒级数展开，由于 M 及 M_1 点是质点上的两点，因此 x_1，y_1，z_1 均为无限小量，略去二阶无限小量得

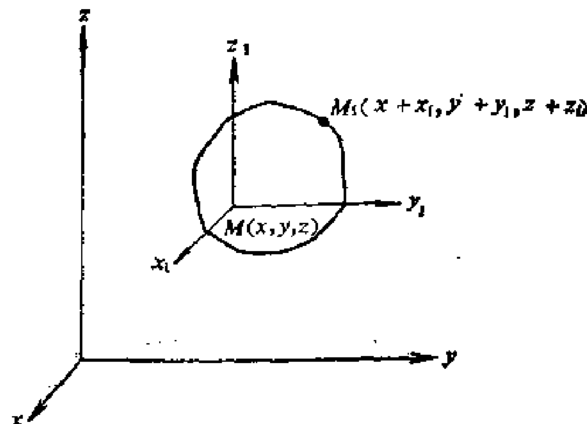


图3-21　流体质点运动分析

$$\left.\begin{aligned}u_{x_1}-u_x&=\frac{\partial u_x}{\partial x}x_1+\frac{\partial u_x}{\partial y}y_1+\frac{\partial u_x}{\partial z}z_1\\u_{y_1}-u_y&=\frac{\partial u_y}{\partial x}x_1+\frac{\partial u_y}{\partial y}y_1+\frac{\partial u_y}{\partial z}z_1\\u_{z_1}-u_z&=\frac{\partial u_z}{\partial x}x_1+\frac{\partial u_z}{\partial y}y_1+\frac{\partial u_z}{\partial z}z_1\end{aligned}\right\}\tag{3-21}$$

(3-21) 式是一组线性方程，可用矩阵表示

$$\begin{pmatrix}u_{x_1}-u_x\\u_{y_1}-u_y\\u_{z_1}-u_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial u_x}{\partial x}&\frac{\partial u_x}{\partial y}&\frac{\partial u_x}{\partial z}\\\frac{\partial u_y}{\partial x}&\frac{\partial u_y}{\partial y}&\frac{\partial u_y}{\partial z}\\\frac{\partial u_z}{\partial x}&\frac{\partial u_z}{\partial y}&\frac{\partial u_z}{\partial z}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}=[A]\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}\tag{3-22}$$

即从 M 点到 M_1 点的速度增量将随三阶方阵 $[A]$ 而定

$$[A]=\begin{pmatrix}\frac{\partial u_x}{\partial x}&\frac{\partial u_x}{\partial y}&\frac{\partial u_x}{\partial z}\\\frac{\partial u_y}{\partial x}&\frac{\partial u_y}{\partial y}&\frac{\partial u_y}{\partial z}\\\frac{\partial u_z}{\partial x}&\frac{\partial u_z}{\partial y}&\frac{\partial u_z}{\partial z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{xx}&a_{xy}&a_{xz}\\a_{yx}&a_{yy}&a_{yz}\\a_{zx}&a_{zy}&a_{zz}\end{pmatrix}\tag{3-23}$$

根据矩阵的运算，方阵 $[A]$ 可以分为一对称阵 ε 及一反称阵 ω，对称阵的主对角线为 θ，即

$$[A]=\begin{bmatrix}\theta_{xx}&\varepsilon_{xy}&\varepsilon_{xz}\\\varepsilon_{yx}&\theta_{yy}&\varepsilon_{yz}\\\varepsilon_{zx}&\varepsilon_{zy}&\theta_{zz}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&\omega_{xy}&\omega_{xz}\\\omega_{yx}&0&\omega_{yz}\\\omega_{zx}&\omega_{zy}&0\end{bmatrix}\tag{3-24}$$

因为 $[\varepsilon]$ 是对称方阵，即 $\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ji}$ ($i\neq j$；i、$j=x$、y、z)，又因为 $[\omega]$ 是反称方阵，即 $\omega_{ij}=-\omega_{ji}$ ($i\neq j$；i、$j=x$、y、z)。

由（3-23）及(3-24）式可见

当 $i=j$ 时 $\theta_{ij}=a_{ij}$，即

$$\left.\begin{aligned}\theta_x=\theta_{xx}=a_{xx}=\frac{\partial u_x}{\partial x}\\ \theta_y=\theta_{yy}=a_{yy}=\frac{\partial u_y}{\partial y}\\ \theta_z=\theta_{zz}=a_{zz}=\frac{\partial u_z}{\partial z}\end{aligned}\right\}\tag{3-25}$$

当 $i\neq j$ 时

$$a_{ij}=\varepsilon_{ij}+\omega_{ij}=\varepsilon_{ij}-\omega_{ji}$$
$$a_{ji}=\varepsilon_{ji}+\omega_{ji}=\varepsilon_{ij}+\omega_{ji}$$

由此可得

$$\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ji}=\frac{1}{2}(a_{ij}+a_{ji})$$
$$\omega_{ji}=-\omega_{ij}=\frac{1}{2}(a_{ji}-a_{ij})$$

因此我们可以写出

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x=\varepsilon_{yz}=\varepsilon_{zy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\\ \varepsilon_y=\varepsilon_{zx}=\varepsilon_{xz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\\ \varepsilon_z=\varepsilon_{xy}=\varepsilon_{yx}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\end{aligned}\right\}\tag{3-26}$$

$$\left.\begin{aligned}\omega_x=\omega_{zy}=-\omega_{yz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}-\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\\ \omega_y=\omega_{xz}=-\omega_{zx}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\\ \omega_z=\omega_{yx}=-\omega_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\end{aligned}\right\}\tag{3-27}$$

因此方阵〔A〕为

$$[A]=\begin{bmatrix}\theta_x & \varepsilon_z & \varepsilon_y\\ \varepsilon_z & \theta_y & \varepsilon_x\\ \varepsilon_y & \varepsilon_x & \theta_z\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -\omega_z & \omega_y\\ \omega_z & 0 & -\omega_x\\ -\omega_y & \omega_x & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\theta_x & \varepsilon_z-\omega_z & \varepsilon_y+\omega_y\\ \varepsilon_z+\omega_z & \theta_y & \varepsilon_x-\omega_x\\ \varepsilon_y-\omega_y & \varepsilon_x+\omega_x & \theta_z\end{bmatrix}\tag{3-28}$$

将方阵〔A〕代入（3-22)式，则 M_1 点的速度分量为

$$\left.\begin{aligned}u_{x1}=u_x+\theta_x x_1+\varepsilon_z y_1+\varepsilon_y z_1+\omega_y z_1-\omega_z y_1\\ u_{y1}=u_y+\theta_y y_1+\varepsilon_x z_1+\varepsilon_z x_1+\omega_z x_1-\omega_x z_1\\ u_{z1}=u_z+\theta_z z_1+\varepsilon_y x_1+\varepsilon_x y_1+\omega_x y_1-\omega_y x_1\end{aligned}\right\}\tag{3-29}$$

现在让我们来讨论一下 θ，ε 及 ω 的物理意义。θ 是速度分量沿座标轴的变化率，例如 $\frac{\partial u_x}{\partial x}$ 即表示速度分量 u_x 沿 x 轴向的变化率，它与 x_1 的乘积即表示 M_1 点对 M 点在 x 轴向

的相对速度(图3-22)，这个相对速度将正比于两点间的 x 向距离。相对速度场如图 3-22 所示。由于这个相对速度场的存在，流体质点将发生 x 向伸长或缩短的直线变形，所以 θ 表征了流体质点在运动时所发生的座标轴向的直线变形率。在不可压缩性流体中，根据连续性方程可知 $\theta_x+\theta_y+\theta_z=0$

ε 及 ω 由方阵〔A〕中除主对角线以外的六个元素 $\frac{\partial u_x}{\partial y}$，$\frac{\partial u_x}{\partial z}$，$\frac{\partial u_y}{\partial x}$，$\frac{\partial u_y}{\partial z}$，$\frac{\partial u_z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial u_z}{\partial y}$ 中的二个组合而成，这些元素均为垂直于速度方向的速度变化率，例如 $\frac{\partial u_x}{\partial y}$ 表示了 x 向速度分量在 y 方向的变化率，由于这个变化率的存在，在不同 y 值的流体层之间就有不同的速度，因此在相邻流层中就可能产生剪切应力（图3-23)，因此这六个元素称为剪切导数。在 $x-y$ 平面中 dt 时间内，由于存在 $\frac{\partial u_x}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial u_y}{\partial x}$，流体质点将发生角变形，

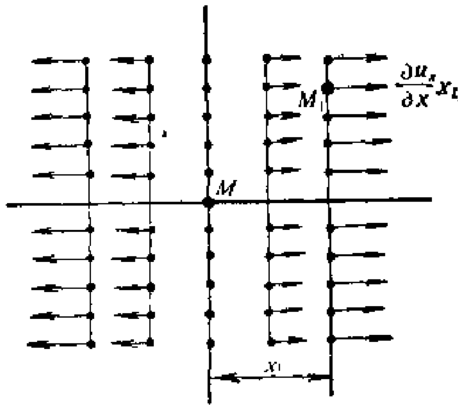


图3-22 直线变形运动

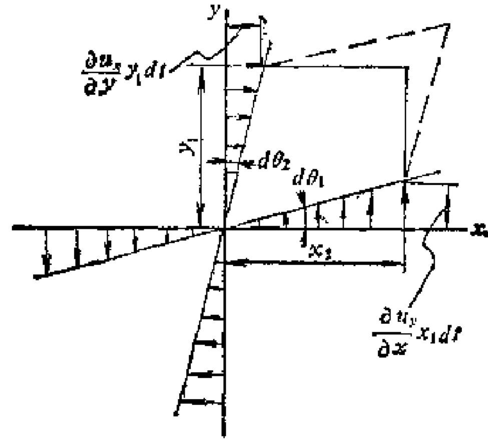


图3-23 剪切变形运动

$$d\theta_1=\frac{\frac{\partial u_y}{\partial x}x_1dt}{x_1}=\frac{\partial u_y}{\partial x}dt$$

$$d\theta_2=\frac{\frac{\partial u_x}{\partial y}y_1dt}{y_1}=\frac{\partial u_x}{\partial y}dt$$

总的角变形为

$$d\theta_1+d\theta_2=d\theta$$

变形的角速度则为

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y}=2\varepsilon_z$$

或
$$\varepsilon_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)$$

由此可见 ε_z 表示了流体质点绕 z 轴的剪切变形角速度。同样，ε_x 及 ε_y 则为流体质点运动时绕 x 轴和 y 轴的剪切变形角速度。不难理解，当 $\frac{\partial u_y}{\partial z}$，$\frac{\partial u_z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial u_x}{\partial y}$ 带有负号时，流体质点就发生旋转（图 3-24)，所以 $\omega_x=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}-\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)$，$\omega_y=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)$ 及 $\omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}-\right.$

$\left.\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)$为流体质点旋转角速度的分量，则

$$\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{i}\omega_x+\boldsymbol{j}\omega_y+\boldsymbol{k}\omega_z=\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{i}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}-\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)+\boldsymbol{j}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)+\boldsymbol{k}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\right]$$

式中等号右边方括号称为 $\boldsymbol{u}$ 的旋度，用符号 Rot$\boldsymbol{u}$ 或 curl$\boldsymbol{u}$ 表示，也可写成$\nabla\times\boldsymbol{u}$，即

$$\text{Rot}\boldsymbol{u}=\text{curl}\boldsymbol{u}=\nabla\times\boldsymbol{u}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ u_x & u_y & u_z\end{vmatrix}$$

由此，角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的矢量式为

$$\boldsymbol{\omega}=\frac{1}{2}\text{Rot}\boldsymbol{u}=\frac{1}{2}\text{curl}\boldsymbol{u}=\frac{1}{2}\nabla\times\boldsymbol{u}$$

在圆柱座标系中

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{e}_r u_r+\boldsymbol{e}_\theta u_\theta+\boldsymbol{e}_z u_z$$

$$\nabla=\boldsymbol{e}_r\frac{\partial}{\partial r}+\boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}$$

因此旋度[1]

$$\nabla\times\boldsymbol{u}=\boldsymbol{e}_r\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\theta}-\frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)+\boldsymbol{e}_\theta\left(\frac{\partial u_r}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)+\boldsymbol{e}_z\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r u_\theta}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\right)$$

由此得

$$\left.\begin{aligned}\omega_r&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\theta}-\frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)\\ \omega_\theta&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)\\ \omega_z&=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r u_\theta)-\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\right]\right\}\end{aligned}\right\}\tag{3-30}$$

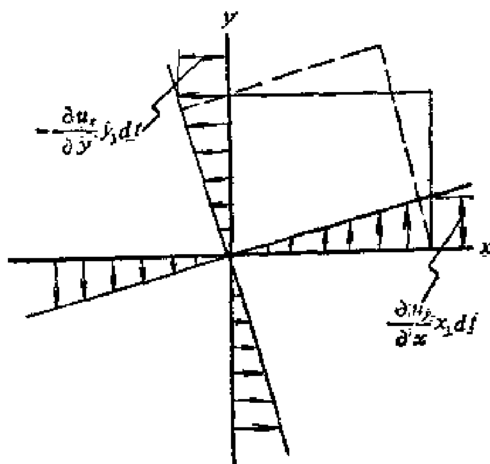


图3-24 旋转运动

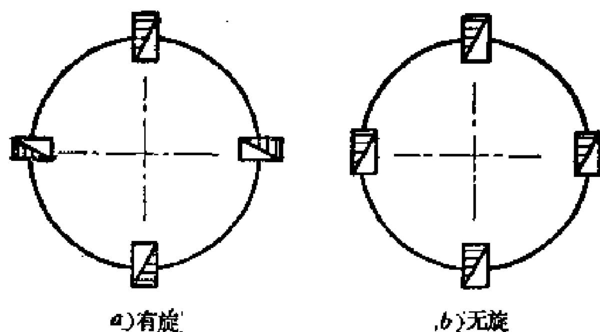


图3-25 有旋与无旋

综合上述，流体质点的运动由下列四个部分组成：

（1）以速度为 u_x、u_y 及 u_z 的平移运动；

[1] Fox R. W. &Mc Donald A. T., Introduction to Fluid Mechanics 2nd edition John Wiley & Sons, 1978, pp. 656～657。

（2）绕某瞬时轴角速度为 ω_x、ω_y 及 ω_z 的旋转运动；

（3）以 θ_x、θ_y 及 θ_z 的直线变形运动；

（4）以剪切变形角速度为 ε_x、ε_y 及 ε_z 的剪切变形运动。

流体质点在运动时，旋转(有旋)或不旋转（无旋）是很重要的，今后我们还要加以讨论。必须指出，所谓旋转是指绕流体微团上的某瞬时轴而言的，流体质点在一个封闭圆的轨道上运动，它可以是有旋的，图 3-25 *a*），也可以是无旋的，图 3-25 *b*）。

§3-8 有势流动和速度势函数

由数学分析可知，如果 $Pdx+Qdy+Rdz$ 是某函数 $\Phi(x, y, z)$ 的全微分的充分和必要条件是

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial y}&=\frac{\partial Q}{\partial x}\\ \frac{\partial Q}{\partial z}&=\frac{\partial R}{\partial y}\\ \frac{\partial P}{\partial z}&=\frac{\partial R}{\partial x}\end{aligned}\right\} \tag{3-31}$$

也就是说如果满足（3-31）式的条件，则一定能找到一个 Φ 函数且 $\frac{\partial\Phi}{\partial x}=P$，$\frac{\partial\Phi}{\partial y}=Q$ 及 $\frac{\partial\Phi}{\partial z}=R$。现在我们来讨论流体的运动，如果流体运动时没有旋转则称为无旋或有势流动，在有势或无旋的条件下 $\omega=0$，即

$$\omega_x=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}-\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)=0$$

$$\omega_y=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)=0$$

$$\omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)=0$$

由此可得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u_z}{\partial y}&=\frac{\partial u_y}{\partial z}\\ \frac{\partial u_x}{\partial z}&=\frac{\partial u_z}{\partial x}\\ \frac{\partial u_y}{\partial x}&=\frac{\partial u_x}{\partial y}\end{aligned}\right\} \tag{3-32}$$

（3-32）式表示在有势或无旋的条件下，流场中存在一个 Φ 函数，该函数对于座标的偏导数等于该座标方向的速度分量，因此我们把函数 $\Phi(x, y, z, t)$ 称为速度势函数，简称为势函数或速度势，即

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=u_x,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial y}=u_y,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial z}=u_z \tag{3-33}$$

用矢量表示为

$$\boldsymbol{u}=\operatorname{grad}\Phi$$

式中
$$\operatorname{grad}\Phi=\boldsymbol{i}\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

将（3-33）式的速度对座标进行偏导得

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u_z}{\partial y}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial z};\quad \frac{\partial u_y}{\partial z}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial y}\\
&\frac{\partial u_x}{\partial z}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial x};\quad \frac{\partial u_z}{\partial x}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial z}\\
&\frac{\partial u_y}{\partial x}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y};\quad \frac{\partial u_x}{\partial y}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial x}
\end{aligned}\right\}\tag{3-34}$$

因为函数的导数值与求导的次序无关，所以（3-34）式表明函数Φ确能满足（3-32）的条件，这说明在有势流场中确实存在速度势函数Φ，或者说存在速度势函数Φ时流场也必定是有势的。由于速度势Φ的偏导数即为流速分量，如果知道了速度势Φ就可求得有势流场的速度分布，因此速度势函数对研究有势流动是十分重要的。

现在我们进一步讨论速度势函数Φ。

（1）在有势流场中任意曲线上M点（图3-26）的速度为$\boldsymbol{u}$，因为流场是有势的，存在速度势函数Φ则

$$\frac{\partial\Phi}{\partial s}=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{dz}{ds}$$

因为
$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=u_x=u\cos(u,\ x);\quad \frac{dx}{ds}=\cos(s,x)$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}=u_y=u\cos(u,\ y);\quad \frac{dy}{ds}=\cos(s,y)$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial z}=u_z=u\cos(u,\ z);\quad \frac{dz}{ds}=\cos(s,z)$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi}{\partial s}&=u\left[\cos(u,x)\cos(s,x)+\cos(u,y)\cos(s,y)+\cos(u,z)\cos(s,z)\right]\\&=u\cos(u,s)=u_s\end{aligned}\tag{3-35}$$

由此可见，在势流场中速度势函数Φ对任意方向的偏导等于该方向的分速度，根据这个结论我们可以写出在圆柱座标系中用速度势函数Φ表示的速度分量(图3-27)：

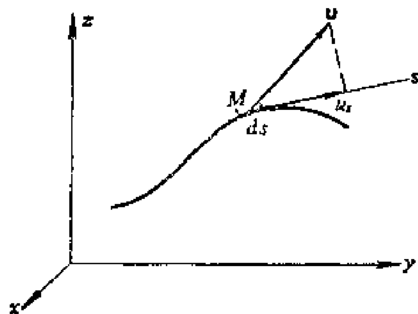


图3-26　有势流场中的速度

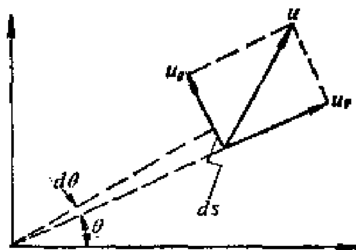


图3-27　有势流场中的u_r和u_θ

$$u_r=\frac{\partial \Phi}{\partial r},\quad u_\theta=\frac{\partial \Phi}{\partial s}=\frac{\partial \Phi}{r\partial \theta},\quad u_z=\frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

（2）对于不可压缩性流体的连续性方程为 $\mathrm{div}\boldsymbol{u}=0$，即

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0$$

或

$$\frac{u_r}{r}+\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0$$

我们可得

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}=0$$

及

$$\frac{\partial \Phi}{r\partial r}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}=0$$

或写成

$$\nabla^2 \Phi=0 \tag{3-36}$$

式中算子 ∇^2 为：

$$\left.\begin{aligned}&\text{直角座标：}\quad \nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\\&\text{圆柱座标：}\quad \nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\end{aligned}\right\} \tag{3-37}$$

（3-36）式是调和方程或称拉普拉斯方程，由此可知速度势函数满足调和方程，因而是调和函数。调和方程在数学中已有较完善的研究，只要确定边界条件，就能得到确切的解。

（3）在力学中，力矢 $\boldsymbol{F}$ 沿某曲线 AB 的积分称为该力矢沿 AB 作功 W_{AB}

$$W_{AB}=\int_A^B \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}$$

在流场中（图 3-28），速度矢 $\boldsymbol{u}$ 沿某曲线 AB 的线积分称为沿 AB 曲线的速度环量 Γ 或简称为环量

$$\Gamma=\int_A^B \boldsymbol{u}\cdot d\boldsymbol{s}=\int_A^B u\cos(u,s)\,ds=\int_A^B u_s\,ds \tag{3-38}$$

如果流场是有势的，则 $u_s=\frac{\partial \Phi}{\partial s}$，代入上式得

$$\Gamma=\int_A^B \frac{\partial \Phi}{\partial s}ds=\Phi_B-\Phi_A \tag{3-39}$$

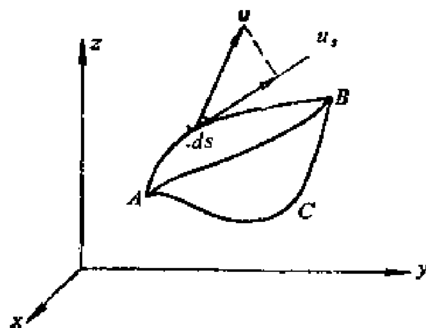


图3-28 环量

（3-39）式说明从 A 点到 B 点的速度环量与积分的路线无关，只决定于不同位置上（A 及 B）的速度势函数 Φ_A 和 Φ_B，这与在有势力场中的力矢作功一样，它与作功的路线无关而只决定于不同位置上的势能，如果两者进行类比，则速度环量 Γ 相当于作功 W，而速度势函数 Φ 相当于势能，这也是把函数 Φ 称为势函数的原因。

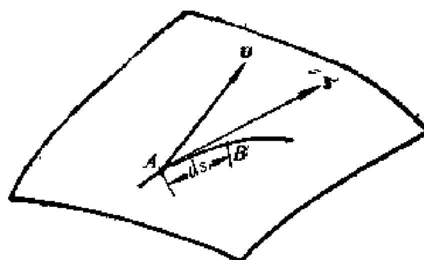


图3-29 等势面

通常环量 Γ 是沿整个封闭曲线 C 来计算的。

$$\Gamma=\int_C u\cos(u,s)\,ds$$

并且约定：积分时曲线所包的面积在积分路线的左侧为正。在有势流场中只要 Φ 是单值的，

则沿封闭曲线C的环量为零。

（4）有势流场中速度势Φ相等的各点所组成的面称为等势面(图3-29)，在等势面上$\Phi = C$，则$d\Phi = 0$。如果A及B为等势面上的相邻两点，则$\int_A^B \boldsymbol{u}\cdot d\boldsymbol{s} = \int_A^B d\Phi$或$\boldsymbol{u}\cdot d\boldsymbol{s} = d\Phi = 0$，由此可知，$\boldsymbol{u}$与$d\boldsymbol{s}$正交。因为$d\boldsymbol{s}$是等势面上的任意线段，因此流速必定垂直于等势面。在平面运动中$\Phi = C$为一等势线，流速$\boldsymbol{u}$也必与等势线正交。

§3-9 平面流动和流函数

流体作平面运动时，它的各种运动特性除了因时间t参变数而改变外，仅随空间的两个独立变数x和y而改变，所以又称为二元流动。严格来讲，实际的流体运动大都是空间的三元流动，它的流动特性是随空间的三个独立变数x、y、z及时间变数t而变。由于平面流动中变数少了一个，所以要比空间流动简单得多，因此某些流动，只要它与第三个变数关系甚小，例如由二个面所组成的缝隙中的流体运动，就可以作为平面流动来处理。

在平面流动中流线的微分方程是

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} \quad \text{或} \quad \frac{dr}{u_r} = \frac{rd\theta}{u_\theta}$$

则

$$\left.\begin{aligned} -u_y dx + u_x dy = 0 \\ -u_\theta dr + u_r r d\theta = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3-40}$$

不可压缩性流体的连续性方程是

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \quad \text{（直角座标）}$$

$$\frac{\partial r u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad \text{（极座标）}$$

则

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \frac{\partial r u_r}{\partial r} = -\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \end{aligned}\right\} \tag{3-41}$$

(3-41)式是(3-40)式等号左边为某函数在某一时间t对于座标的全微分的充分和必要条件，我们设这个函数为$\Psi(x, y, t)$，或$\Psi(r, \theta, t)$，且

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial x} = -u_y \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = u_x \\ \text{或} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial r} = -u_\theta \qquad \frac{\partial \Psi}{r\partial \theta} = u_r \end{aligned}\right\} \tag{3-42}$$

以(3-42)式代入(3-40)式得

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy = d\Psi = 0$$

或

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} dr + \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} d\theta = d\Psi = 0$$

积分后得：

$$\Psi = C \tag{3-43}$$

(3-43) 式表示函数$\Psi(x, y, t)$或$\Psi(r, \theta, t)$在平面上的同一流线上是常数，或者说给定一个Ψ值就能得到一条流线，因此我们把函数Ψ称为流函数。

我们进一步讨论流函数的物理意义。在平面流场内(图3-30)，任意曲线AB上M点处的速度矢量为$\boldsymbol{u}$，在M点处取无限小线段ds，则通过单位厚度微小面积$1\times ds$的流量dQ为

$$dQ=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}ds=u_n ds$$

式中u_n是M点上的法向分速度

$$u_n=u_x\cos(n, x)+u_y\cos(n, y)$$

因此

$$dQ=[u_x\cos(n, x)+u_y\cos(n, y)]ds$$

因为 $\cos(n, x)=\dfrac{dy}{ds}$，$\cos(n, y)=-\dfrac{dx}{ds}$，并以(3-42)式代入上式得

$$dQ=\left[\frac{\partial\Psi}{\partial x}\ \frac{dx}{ds}+\frac{\partial\Psi}{\partial y}\ \frac{dy}{ds}\right]ds=\frac{\partial\Psi}{\partial x}dx+\frac{\partial\Psi}{\partial y}dy=d\Psi$$

积分之得流量Q为

$$Q=\int_A^B d\Psi=\Psi_B-\Psi_A \tag{3-44}$$

上式表示流经任意曲线（单位厚度）AB的流量等于曲线A、B点上流函数的差值，而与曲线的形状无关。如果AB是封闭曲线，即A、B两点重合，则在单值流函数的条件下流量$Q=0$。因为$\Psi=$常数表示为一流线，$\Psi=\Psi_A$及$\Psi=\Psi_B$即为通过A点及B点的两条流线，所以两条流线的流函数差值就等于通过该两流线之间的流量。如果A及C两点的Ψ值相等，则通过A及C两点一定可以作出一条流线(图3-31)。流体流经固体时壁面为一流线，所以固

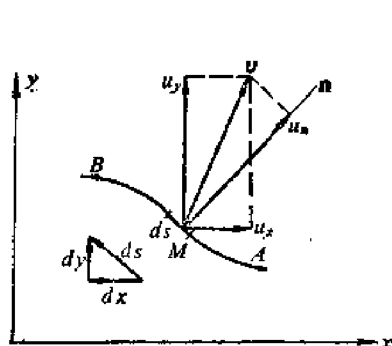


图3-30 流函数的物理意义

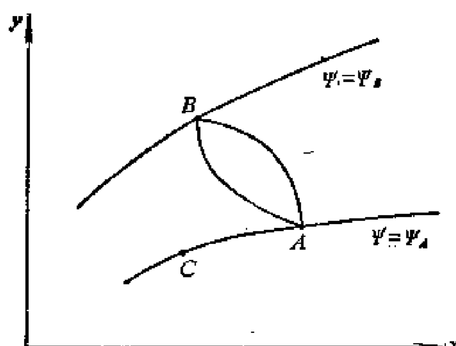


图3-31 流线$\Psi=C$

体壁面可以用$\Psi=C$来表示。

在平面有势流场中 $\omega_z=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_y}{\partial x}-\dfrac{\partial u_x}{\partial y}\right)=0$ 以$u_x=\dfrac{\partial\Psi}{\partial y}$，$-u_y=\dfrac{\partial\Psi}{\partial x}$代入上式得

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}=0$$

这就表明在平面有势流场中，流函数Ψ满足调和方程，所以在平面有势流场中流函数Ψ也是调和函数。

在平面有势流场中，存在速度势函数Φ及流函数Ψ，等势线和流线各为$\Phi=C_1$及$\Psi=C_2$，因此在某一瞬时t_1时得等势线和流线微分方程各为

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}dx+\frac{\partial \Phi}{\partial y}dy=0$$

及

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x}dx+\frac{\partial \Psi}{\partial y}dy=0$$

由此可得等势线和流线的斜率各为

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\Phi=C_1}=-\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x}}{\frac{\partial \Phi}{\partial y}}$$

及

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\Psi=C_2}=-\frac{\frac{\partial \Psi}{\partial x}}{\frac{\partial \Psi}{\partial y}}$$

因为

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}=u_x=\frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad 及 \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y}=u_y=-\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

所以

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\Phi=C_1}=\frac{-\frac{\partial \Phi}{\partial x}}{\frac{\partial \Phi}{\partial y}}=\frac{\frac{\partial \Psi}{\partial y}}{\frac{\partial \Psi}{\partial x}}=-\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\Psi=C_2}} \tag{3-45}$$

由此可知，在平面势流场中等势线和流线相互正交，这是有势流动的一个重要性质，利用这个性质可以近似地解平面有势流动问题，这些将在以后予以讨论。

§ 3-10 几种简单的平面势流

为了使我们对平面有势流动有较具体的概念，并且使我们熟悉它，我们将介绍几种典型的简单平面势流。

1. 均匀流

设流场为与x轴成α角的均匀流，如图 3-32所示。流速为u，则它的x及y向速度分量为u_x及u_y

$$u_x=u\cos\alpha \quad 则 \quad \frac{\partial u_x}{\partial y}=0$$

$$u_y=u\sin\alpha \quad 得 \quad \frac{\partial u_y}{\partial x}=0$$

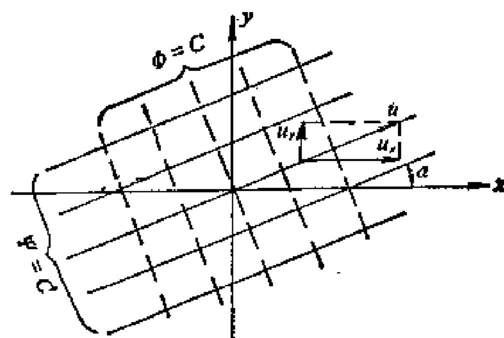


图3-32 均匀流

由此 $\omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)=0$，所以流场是有势的，即存在$\Phi$函数和$\Psi$函数。因为$\frac{\partial \Phi}{\partial x}=u_x=u\cos\alpha$，积分之得

$$\Phi=ux\cos\alpha+f(y)$$

又因为

$$u_y=\frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad 则$$

$$u_y=\frac{\partial\Phi}{\partial y}=f'(y)$$

即
$$f'(y)=u_y=u\sin\alpha$$

积分之
$$f(y)=uy\sin\alpha+C_1$$

由此得速度势函数Φ为

$$\Phi=ux\cos\alpha+uy\sin\alpha+C_1$$
$$=u(x\cos\alpha+y\sin\alpha)+C_1$$

同样方法可求得流函数Ψ为

$$\Psi=u(y\cos\alpha-x\sin\alpha)+C_2$$

因为积分常数C_1及C_2对流动的图形并没有影响，所以我们可以弃去，由此得均匀流动时的Φ及Ψ函数为

$$\left.\begin{aligned}\Phi&=u(x\cos\alpha+y\sin\alpha)\\\Psi&=u(y\cos\alpha-x\sin\alpha)\end{aligned}\right\}\tag{3-46}$$

如果流动是平行于x轴的，即$\alpha=0$或π，即$u_x=u$及$u_y=0$，则

$$\left.\begin{aligned}\Phi&=\pm ux\\\Psi&=\pm uy\end{aligned}\right\}\tag{3-47}$$

上述的Φ函数和Ψ函数都是单值的。

2. 源、汇和涡

流体自一点径向均衡地向外出流，称为源流，该点称为点源。如果流体径向均衡地向一点汇集，则称为汇流，该点则称为点汇（图3-33）。由此可知，如果流量为Q则源流或汇流的

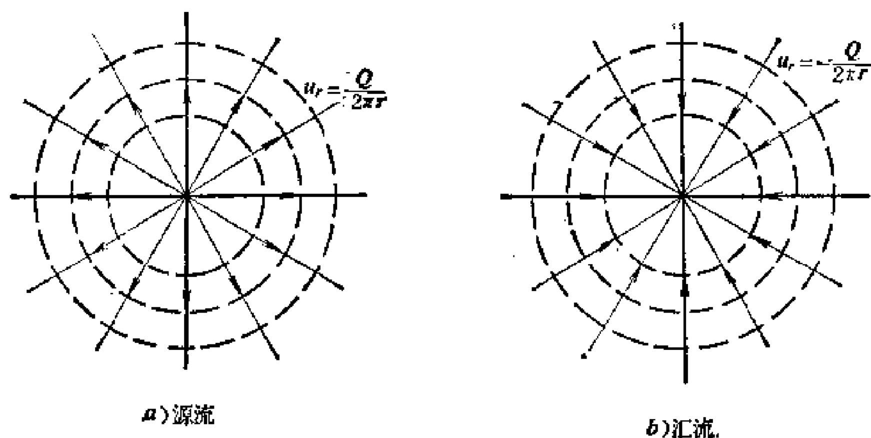


图3-33 源流与汇流

速度分量为：$u_\theta=0$及$u_r=\pm\frac{Q}{2\pi r}$

式中正号为源流，负号为汇流。

所以$\omega_z=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(ru_\theta)-\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\right]\right\}=0$，流场为有势流，存在$\Phi$函数，则

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r}=u_r=\pm\frac{Q}{2\pi r}$$

积分之得

$$\Phi=\pm\frac{Q}{2\pi}\int\frac{dr}{r}+f(\theta)=\pm\frac{Q}{2\pi}\ln r+f(\theta)$$

因为$\frac{\partial\Phi}{r\partial\theta}=u_\theta=0$，而由上面求得的$\Phi$函数可知$\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}=f'(\theta)$，所以 $f'(\theta)=f(\theta$ 0 或 $)=C_1$，代入上式得源或汇的速度势函数Φ为

$$\Phi=\pm\frac{Q}{2\pi}\ln r+C_1=\pm m\ln r+C_1=\pm m\ln\sqrt{x^2+y^2}+C_1$$

式中$m=\frac{Q}{2\pi}$，称为源或汇的强度。

又因为$\frac{\partial\Psi}{r\partial\theta}=u_r=\frac{\partial\Phi}{\partial r}$，积分之得流函数$\Psi$为

$$\Psi=\int\frac{\partial\Phi}{\partial r}rd\theta+f(r)=\pm\frac{Q}{2\pi}\int\frac{rd\theta}{r}+f(r)=\pm\frac{Q}{2\pi}\theta+f(r)$$

但$\frac{\partial\Psi}{\partial r}=-u_\theta=0$，而$\frac{\partial\Psi}{\partial r}=f'(r)$，所以$f'(r)=0$或$f(r)=C_2$，代入流函数式得

$$\Psi=\pm\frac{Q}{2\pi}\theta+C_2=\pm m\theta+C_2=\pm m\,\mathrm{arctg}\frac{y}{x}+C_2$$

由于积分常数C_1及C_2不影响流动图形，可以弃去，则源流与汇流的速度势函数Φ与流函数Ψ为

$$\left.\begin{aligned}\Phi&=\pm\frac{Q}{2\pi}\ln r=\pm m\ln r=\pm m\ln(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\\ \Psi&=\pm\frac{Q}{2\pi}\theta=\pm m\theta=\pm m\,\mathrm{arctg}\frac{y}{x}\end{aligned}\right\}\qquad(3\text{-}48)$$

源和汇的流函数$\Psi=m\theta$，如果从$\theta=0$出发回转一圈到起始点，这时θ并不为零而是等于2π，因此Ψ函数并不是单值的，因此流经包含有点源和点汇的封闭曲线的流量并不等于零。

如果把流函数Ψ和速度势函数Φ的表示式互换一下，即

$$\Psi=-\frac{Q}{2\pi}\ln r=-m\ln r$$

$$\Phi=\frac{Q}{2\pi}\theta=m\theta$$

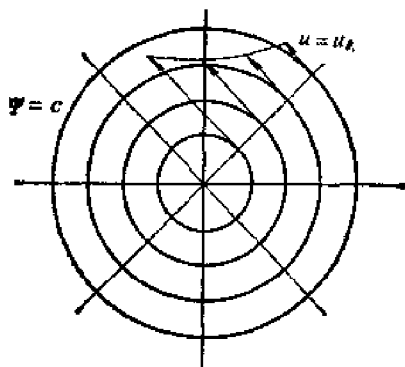


图3-34 涡

则 $u_r=\frac{\partial\Phi}{\partial r}=0$，$u_\theta=\frac{\partial\Phi}{r\partial\theta}=\frac{Q}{2\pi r}=-\frac{\partial\Psi}{\partial r}$。

这种流动称为涡，它也满足$\omega_z=0$的条件，所以也是有势流动，但它的Φ函数不是单值的。沿包含涡的封闭曲线的环量Γ为

$$\Gamma=\oint u_\theta ds=\oint u_\theta rd\theta=\oint\frac{Q}{2\pi r}rd\theta=\frac{Q}{2\pi}\theta\Big|_0^{2\pi}=Q$$

因此，涡的速度势函数和流函数为

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= \frac{\Gamma}{2\pi}\theta = K\theta \\ \Psi &= -\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r = -K\ln r \end{aligned}\right\} \tag{3-49}$$

式中　$K = \frac{\Gamma}{2\pi}$称为涡的强度。

• §3-11　势流的叠加

设有n种势流，它的速度势函数为Φ_i，流函数为Ψ_i($i = 1, 2, 3, \cdots$)，$\cdots n$ 则它们的流速为

$$u_{xi} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial x}, \quad u_{yi} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial y}$$

且
$$\omega_{zi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_{yi}}{\partial x} - \frac{\partial u_{xi}}{\partial y}\right) = 0$$

如果将它们叠加在一起，则新流场的速度分量为u_x及u_y，根据速度的合成原理

$$u_x = \sum_{i=1}^{n} u_{xi}$$

$$u_y = \sum_{i=1}^{n} u_{yi}$$

新流场中流体质点的旋转角速度ω_z为

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u_{yi}}{\partial x} - \frac{\partial u_{xi}}{\partial y}\right) = 0$$

叠加后的新流场也是无旋的，存在速度势函数Φ且$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = u_x$及$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = u_y$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = u_x = \sum_{i=1}^{n} u_{xi} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \Phi_i}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\sum_{i=1}^{n}\Phi_i$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = u_y = \sum_{i=1}^{n} u_{yi} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \Phi_i}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\sum_{i=1}^{n}\Phi_i$$

由此可见，新流场的势函数Φ为

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n}\Phi_i \tag{3-50}$$

且
$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Sigma\Phi_i + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Sigma\Phi_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial y^2}\right) = 0$$

如果推广为空间流动则

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial x}+\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial y}+\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial z}\right)=0$$

上述的证明指出：几种势流可以叠加，叠加后的流动仍为有势，新的势函数和流函数为被叠加的各流场势函数及流函数的代数和。势流可以叠加的性质是十分重要的，因为实际的流动是比较复杂的，但我们可以把复杂的实际流动认为是某些简单流动的组合，而这些典型的简单势流我们已经根据它们的流动特点求出了Φ和Ψ函数。这样，利用叠加原理，就可求得组合后流场的Φ和Ψ函数，因而得到流场的流动图形和流速分布，解决实际流动问题。

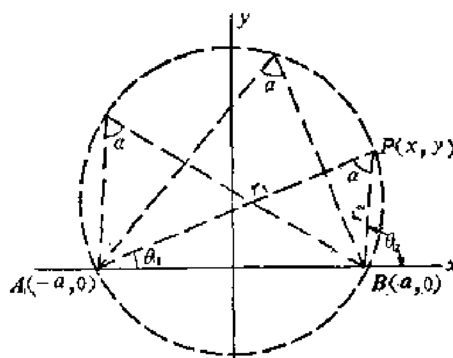


图3-35　等强源和汇的叠加

下面我们举几个势流叠加的例子。

1. 等强源汇的叠加

如图 3-35 所示，设在$A(-a, 0)$及$B(+a, 0)$点上分别放置强度$m=\frac{Q}{2\pi}$的源和汇，它们的速度势各为$\Phi_A=\frac{Q}{2\pi}\ln r_1=\frac{Q}{2\pi}\ln[(x+a)^2+y^2]^{\frac{1}{2}}$及$\Phi_B=-\frac{Q}{2\pi}\ln r_2=-\frac{Q}{2\pi}\ln[(x-a)^2+y^2]^{\frac{1}{2}}$。流函数为$\Psi_A=\frac{Q}{2\pi}\theta_1$及$\Psi_B=-\frac{Q}{2\pi}\theta_2$，则叠加后流场的流函数$\Psi$为

$$\Psi=-\frac{Q}{2\pi}(\theta_2-\theta_1) \tag{3-51}$$

因为
$$\operatorname{tg}(\theta_2-\theta_1)=\frac{\operatorname{tg}\theta_2-\operatorname{tg}\theta_1}{1+\operatorname{tg}\theta_2\operatorname{tg}\theta_1}=\frac{\frac{y}{x-a}-\frac{y}{x+a}}{1+\left(\frac{y}{x-a}\right)\left(\frac{y}{x+a}\right)}=\frac{2ay}{x^2+y^2-a^2}$$

所以
$$\theta_2-\theta_1=\operatorname{arctg}\frac{2ay}{x^2+y^2-a^2}$$

由此，流函数Ψ为

$$\Psi=-\frac{Q}{2\pi}(\theta_2-\theta_1)=-\frac{Q}{2\pi}\operatorname{arctg}\frac{2ay}{x^2+y^2-a^2} \tag{3-52}$$

因为流线是$\Psi=$常数，即$\theta_2-\theta_1=C$或$\frac{2ay}{x^2+y^2-a^2}=C$，这两个表示式均说明流线是圆心在$y$轴上，通过$A$、$B$点的圆。因为$\theta_2-\theta_1=\alpha$，而$\alpha$为常数时$M$点的轨迹为圆，如图3-35所示。同样，我们将$\frac{2ay}{x^2+y^2-a^2}=C$　改写为

$$\left(y-\frac{a}{C}\right)^2+x^2=a^2\left(1+\frac{1}{C^2}\right)$$

这个方程表示圆心在$\left(0, \frac{a}{C}\right)$半径为$a\sqrt{1+\frac{1}{C^2}}$的圆，这个圆也总是通过$A$及$B$点。

叠加后流场的速度势Φ为

$$\Phi=\Phi_A-\Phi_B=\frac{Q}{2\pi}\ln\frac{r_1}{r_2}=\frac{Q}{4\pi}\ln\frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2}$$
$$=\frac{Q}{4\pi}\ln\frac{(x-a)^2+y^2+(x+a)^2-(x-a)^2}{(x-a)^2+y^2}$$
$$=\frac{Q}{4\pi}\ln\left[1+\frac{4ax}{(x-a)^2+y^2}\right] \tag{3-53}$$

等势线方程为

$$1+\frac{4ax}{(x-a)^2+y^2}=C$$

或

$$(x-a)^2+y^2+\frac{4ax}{1-C}=0$$

经过简单的运算，上式可改写成

$$\left[x-\left(\frac{1+C}{1-C}\right)a\right]^2+y^2=a^2\left[\left(\frac{1+C}{1-C}\right)^2-1\right]$$

即等势线为圆心在$\left(a\frac{1+C}{1-C},\ 0\right)$，半径为$a\sqrt{\left(\frac{1+C}{1-C}\right)^2-1}$的圆。

2. 偶

当放置等强源汇的A点与B点向座标原点无限靠近时(即$a\to 0$时)，并设它们的强度在靠近过程中不断增加（即$Q\to\infty$）以致使$2Qa$的乘积趋于某有限值M，这种流动称为偶。因为$\mathrm{arctg}\, z$及$\ln(1+z)$展成级数为

$$\mathrm{arctg}\, z=z-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}-\cdots\cdots$$
$$\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\cdots\cdots$$

由于A、B两点无限靠近，则$a\to 0$因此流函数Ψ中的$\frac{2ay}{x^2+y^2-a^2}$为无限小量，级数中的高阶无限小就可略去，即

$$\mathrm{arctg}\frac{2ay}{x^2+y^2-a^2}\approx\frac{2ay}{x^2+y^2-a^2}$$

同样

$$\ln\left[1+\frac{4ax}{(x+a)^2+y^2}\right]\approx\frac{4ax}{(x+a)^2+y^2}$$

由此得等强源汇无限靠近时的流函数Ψ和势函数Φ为

$$\left.\begin{aligned}\Psi&=-\frac{Q}{2\pi}\cdot\frac{2ay}{x^2+y^2-a^2}=-\frac{M}{2\pi}\ \frac{y}{x^2+y^2}\\ \Phi&=\frac{Q}{4\pi}\cdot\frac{4ax}{(x+a)^2+y^2}=\frac{M}{2\pi}\ \frac{x}{x^2+y^2}\end{aligned}\right\} \tag{3-54}$$

由此可得偶的流线为$\frac{y}{x^2+y^2}=C_1$

或

$$x^2+\left(y-\frac{1}{2C_1}\right)^2=\frac{1}{4C_1^2}$$

等势线为

$$\frac{x}{x^2+y^2}=C_2$$

或
$$y^2+\left(x-\frac{1}{2C_2}\right)^2=\frac{1}{4C_2^2}$$

即流线为圆心在 y 轴上与 x 轴切于座标原点的一族圆。等势线为圆心在 x 轴上与 y 轴切于座标原点的一族圆。如图 3-36 所示。

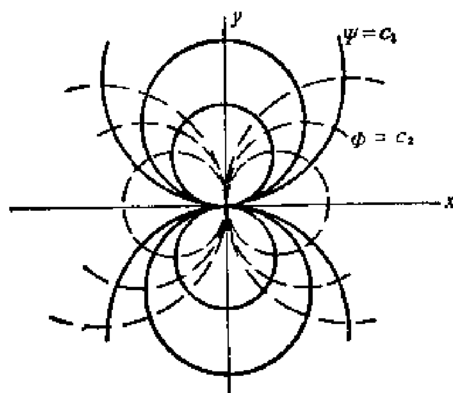


图3-36 偶

3. 平行于 x 轴的均匀流与偶的叠加

我们已经求得平行于 x 轴的均匀流和偶的速度势 Φ 和流函数 Ψ 各为

（1）平行均匀流：

$$\Phi=Ux;\quad \Psi=Uy$$

（2）偶：

$$\Phi=\frac{M}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2};\quad \Psi=\frac{-M}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}$$

叠加后的流场势函数 Φ 和流速分量为

$$\Phi=Ux+\frac{M}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2} \tag{3-55}$$

$$u_x=\frac{\partial\Phi}{\partial x}=U-\frac{M}{2\pi}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$u_y=\frac{\partial\Phi}{\partial y}=\frac{-M}{2\pi}\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

我们把速度为零的点称为驻点，即在驻点处 $u_x=0, u_y=0$。因为 $u_y=-\frac{M}{2\pi}\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$，所以 $x=0$ 或 $y=0$ 均能使 $u_y=0$，现在我们来讨论 $x=0$ 的情况。当 $x=0$ 时

$$u_y=0$$

$$u_x=U+\frac{M}{2\pi}\frac{1}{y^2}=U+\frac{M}{2\pi y^2}$$

如果 $x=0$ 为驻点，则 u_x 也必须为零，也就是说 $U+\frac{M}{2\pi y^2}=0$ 或 $y=\sqrt{-\frac{M}{2\pi U}}$，即 y 是虚数，这是不可能的，这说明 $x=0$ 时虽然 $u_y=0$，但 u_x 不可能等于零，即 $x=0$ 不满足驻点的条件。当 $y=0$ 时

$$u_y=0$$

$$u_x=U-\frac{M}{2\pi x^2}$$

如果 $u_x=0$ 则 $U-\frac{M}{2\pi x^2}=0$，即 $x=\pm\sqrt{\frac{M}{2\pi U}}$，即在 $y=0$，$x=\sqrt{\frac{M}{2\pi U}}$ 及 $y=0$，$x=-\sqrt{\frac{M}{2\pi U}}$ 时 $u_x=0$，$u_y=0$，也就是说 $A\left(\sqrt{\frac{M}{2\pi U}},\ 0\right)$ 及 $B\left(-\sqrt{\frac{M}{2\pi U}},\ 0\right)$ 为叠加后流场的驻点，见图 3-37。

叠加后流场的流函数为

$$\Psi=Uy-\frac{M}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2} \tag{3-56}$$

流线为 $\Psi=C$，即

$$Uy - \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{y}{x^2+y^2} = C$$

$\Psi = 0$ 的流线称为零流线，即

$$\left(U - \frac{M}{2\pi} \frac{1}{x^2+y^2}\right) y = 0$$

这个方程说明：$y = 0$ 及 $x^2 + y^2 = \frac{M}{2\pi U}$ 均满足零流线的条件，$x^2 + y^2 = \frac{M}{2\pi U}$ 是圆心在原点 o，半径为 $\sqrt{\frac{M}{2\pi U}} = r_0$ 的圆。$y = 0$ 是 x 轴。即平行均匀流与偶的叠加后的流场中零流线是通过驻点 A 及 B 的圆和圆外的 x 轴所组成（注意：驻点处流线有分支，这一点流速为零，所以是允许的）。因为流体不能穿过流线，可以把流线看作固体边界，因此如果用圆柱体取代零流线，零流线外部的流场将不受影响。这样，我们利用势流叠加原理可以解决某些流体对固体的绕流问题。

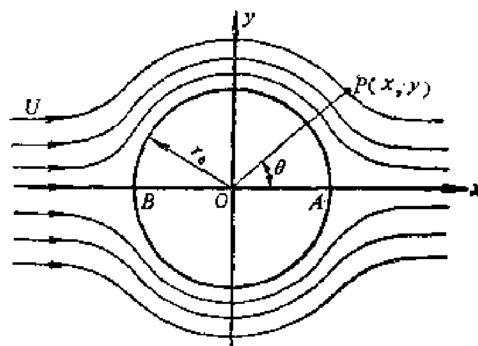


图3-37　平行于 x 轴的均匀流与偶的叠加

上述关于平行均匀流绕圆柱流动的问题是轴对称的，采用圆柱座标系更为方便。因为 $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$，所以 Φ 函数和速度分量为

$$\Phi = Ur\cos\theta + \frac{M}{2\pi} \frac{r\cos\theta}{r^2} = U\cos\theta\left(r + \frac{M}{2\pi U r}\right) \tag{3-57}$$

$$u_\theta = \frac{\partial\Phi}{r\partial\theta} = -\frac{1}{r}\left(Ur\sin\theta + \frac{M}{2\pi r^2}\sin\theta\right) = -\left(U + \frac{M}{2\pi r^2}\right)\sin\theta$$

$$u_r = \frac{\partial\Phi}{\partial r} = U\cos\theta - \frac{M\cos\theta}{2\pi r^2} = \left(-\frac{M}{2\pi r^2} + U\right)\cos\theta$$

因为驻点为 $u_\theta = 0$，$u_r = 0$，解上式得驻点为 $A\left(\sqrt{\frac{M}{2\pi U}},\ 0\right)$ 及 $B\left(\sqrt{\frac{M}{2\pi U}},\ \pi\right)$。

流函数 Ψ 为

$$\Psi = Ur\sin\theta - \frac{M}{2\pi} \frac{r\sin\theta}{r^2} = U\sin\theta\left(r - \frac{M}{2\pi U r}\right) \tag{3-58}$$

零流线为 $\theta = 0$ 及 $r = \sqrt{\frac{M}{2\pi U}} = r_0$

在圆柱面上 $r = r_0$，$u_r = 0$，所以 $M = 2\pi r_0^2 U$ 则

$$[u_\theta]_{r=r_0} = -\left(U + \frac{M}{2\pi r_0^2}\right)\sin\theta = -2U\sin\theta$$

*§3-12　求解有势流动的其他方法

上节所述是用势流叠加的原理，求解有势流动，但在工程实际问题中所遇到的流动是很复杂的，有时就很难找到恰当的简单流动进行组合，这时可以根据势流的性质用图解法，数值计算法或类比实验法求得近似解，下面我们对这些方法作简要的介绍。

1. 图解法

根据势流中流线与等势线相互正交的性质，在平面有势流场中可用流线与等势线作出正交的网格，称为流网，流网不仅绘出了流动特性的清晰概念，而且可以利用流网求出流速场，对一流场绘制流网时首先用目测徒手地画出近似的流线和与它正交的等势线，组成第一次近似的流网，然后在图上量出流网中流线和等势线的间隔 ΔS 及 $\Delta\sigma$，根据已知条件进行计算并调整流网，这样重复几次可以获得较精确的解。例如在水轮机或水泵设计中，常假定水轮机和水泵的经面(子午面)的流场是有势的，我们先画出近似的流网，然后按下列原理调整流网(图3-38)：

因为两条流线间流量 ΔQ 为

$$\Delta Q=2\pi r\Delta\sigma u_m$$

而经面流速

$$u_m=\frac{\partial\Phi}{\partial S}=\frac{\Delta\Phi}{\Delta S}$$

所以

$$\Delta Q=2\pi r\Delta\sigma\frac{\Delta\Phi}{\Delta S}=2\pi\Delta\Phi r\frac{\Delta\sigma}{\Delta S}$$

因为两条流线间 $\Delta Q=$常数，两条等势线间 $\Delta\Phi=$常数，所以绘制流网的原则是：$r\dfrac{\Delta\sigma}{\Delta S}=C$。

通过水轮机或水泵的总流量 Q 是全部流线间流量的总和，即

$$Q=\Sigma\Delta Q=2\pi\Delta\Phi\Sigma r\frac{\Delta\sigma}{\Delta S}$$

由此可得

$$\Delta\Phi=\frac{Q}{2\pi\Sigma r\dfrac{\Delta\sigma}{\Delta S}}$$

则经面流速就可按 $u_m=\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta S}$ 算出而获得经面流速场。

2. 松弛法

松弛法是用差分法来对偏微分方程作近似的数值解法。例如平面流场内存在 $\Phi(x, y, t)$ 函数，在某一点 0 处(图3-39)，该函数为 Φ_0，在距 0 点为 Δx 及 Δy 处的 M 点则为 Φ_M，将 Φ_M 展成泰勒级数为

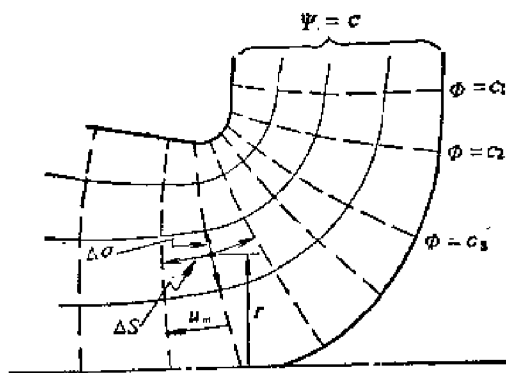


图3-38　流网

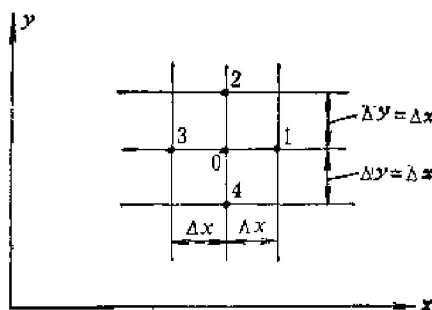


图3-39　松弛法的正方网格

$$\Phi_M(x, y) = \Phi_0 + \left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_0 (x_M - x_0) + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_0 (y_M - y_0)\right]$$
$$+ \frac{1}{2!}\left[\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right)_0 (x_M - x_0)^2 + 2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x \partial y}\right)_0 (x_M - x_0)(y_M - y_0)\right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right)_0 (y_M - y_0)^2\right] + \cdots\cdots$$

如果我们在流场内作正方网格，在 1 点处：$\Phi_M = \Phi_1$，$x_M = x_1 = x_0 + \Delta x$ 及 $y_M = y_1 = y_0$，所以

$$\Phi_1 = \Phi_0 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right)_0 \Delta x^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^3}\right)_0 \Delta x^3$$
$$+ \frac{1}{4!}\left(\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4}\right)_0 \Delta x^4 + \cdots\cdots \tag{3-59}$$

在 3 点处：$\Phi_M = \Phi_3$，$x_M = x_3 = x_0 - \Delta x$，$y = y_3 = y_0$，所以

$$\Phi_3 = \Phi_0 - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right)_0 \Delta x^2 - \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^3}\right)_0 \Delta x^3$$
$$+ \frac{1}{4!}\left(\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4}\right)_0 \Delta x^4 - \cdots\cdots \tag{3-60}$$

将上列两式相减得

$$\Phi_1 - \Phi_3 = 2\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \frac{2}{3!}\left(\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^3}\right)_0 \Delta x^3 + \cdots\cdots$$

同样可得

$$\Phi_2 - \Phi_4 = 2\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_0 \Delta y + \frac{2}{3!}\left(\frac{\partial^3\Phi}{\partial y^3}\right)_0 \Delta y^3 + \cdots\cdots$$

略去 Δx 和 Δy 的高阶项得 Φ 的一阶偏导数的差商近似为

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_0 &\approx \frac{\Phi_1 - \Phi_3}{2\Delta x}\\ \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_0 &\approx \frac{\Phi_2 - \Phi_4}{2\Delta y}\end{aligned}\right\} \tag{3-61}$$

将(3-59)及(3-60)相加得

$$\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right)_0 = \frac{1}{\Delta x^2}(\Phi_1 + \Phi_3 - 2\Phi_0) + \frac{2}{4!}\left(\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4}\right)_0 \Delta x^2 + \cdots\cdots$$

同样可得

$$\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right)_0 = \frac{1}{\Delta y^2}(\Phi_2 + \Phi_4 - 2\Phi_0) + \frac{2}{4!}\left(\frac{\partial^4\Phi}{\partial y^4}\right)_0 \Delta y^2 + \cdots\cdots$$

略去 Δx 及 Δy 的高阶项得 Φ 的二阶偏导数的差商近似为

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right)_0 &\approx \frac{\Phi_1 + \Phi_3 - 2\Phi_0}{\Delta x^2}\\ \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right)_0 &\approx \frac{\Phi_2 + \Phi_4 - 2\Phi_0}{\Delta y^2}\end{aligned}\right\} \tag{3-62}$$

如果在流场中的函数 Φ 满足调和方程，0 点是流场中的某一点，所以

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right)_0+\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\right)_0=0$$

由此可得：

$$\frac{\Phi_1+\Phi_3-2\Phi_0}{\Delta x^2}+\frac{\Phi_2+\Phi_4-2\Phi_0}{\Delta y^2}=0$$

因为网格是正方的，即 $\Delta x=\Delta y$，所以 $\Phi_1+\Phi_2+\Phi_3+\Phi_4=4\Phi_0$，即满足调和方程的 Φ_0 值为

$$\Phi_0=\frac{\Phi_1+\Phi_2+\Phi_3+\Phi_4}{4} \tag{3-63}$$

在有势流场中流函数 Ψ 也满足调和方程，因此

$$\Psi_0=\frac{\Psi_1+\Psi_2+\Psi_3+\Psi_4}{4} \tag{3-64}$$

用松弛法解流动问题时，我们先在流场内作正方网格，根据流场的已知边界条件，估计网格交点(节点)上的 Ψ 值或 Φ 值，然后按(3-63)或(3-64)进行调整，逐步逼近而求得 Φ 或 Ψ 值的分布，由此可以画出流线和等势线，从而获得流场的速度分布，图 3-40 是用松弛法画流场的一例。

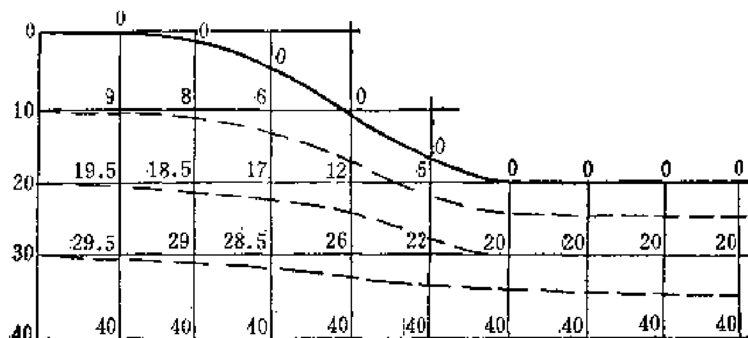


图3-40　松弛法绘制流线

3. 电液类比实验法

自然界中不同质的物理现象中有时却有着同一的普遍规律，即存在相同的数学模型，因此有可能将已掌握的某一物理领域中理论的或实验的求解方法，推广到与它具有同一普遍规律的其他领域中去。这就是不同物理现象之间的类比法。例如，有势流场与电磁场之间就存在着可以类比的条件。根据欧姆定律，在电场中导体的电流密度 $\boldsymbol{J}$ 为

$$\boldsymbol{J}=-k\,\mathrm{grad}V \tag{3-65}$$

或

$$J_x=-k\frac{\partial V}{\partial x},\quad J_y=-k\frac{\partial V}{\partial y},\quad J_z=-k\frac{\partial V}{\partial z}$$

式中　$J=\frac{di}{dA}$——电流密度；

V——电势；

k——电导率，是电阻率 ρ 的倒数。

电场的连续性方程为：$\mathrm{div}\boldsymbol{J}=0$，即

$$\frac{\partial J_x}{\partial x}+\frac{\partial J_y}{\partial y}+\frac{\partial J_z}{\partial z}=0$$

由此可得

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

即电场中均匀导体中电势 V 满足调和方程，这与有势流场中速度势函数 Φ 满足调和方程具有

同一普遍规律，因此可以用电势V来类比有势流场中的速度势函数Φ。因为有势流场中的速度势函数Φ是无法用实验的办法来直接测量的，而测量电场中的电势却十分简单，因此将电场类比流场，为采用实验方法求解有势流动提供了条件。我们知道，相同的数学模型只有在相同的边界条件时才有相同的解，因此在应用电场类比时必须满足下列条件：

1）电模型的导电介质区域必须与流动区域几何相似；

2）模型上电势的边界条件必须和所研究的流体流动区域中速度势的边界条件完全一样，例如，流体不能穿过流场中的固体壁面，即$\frac{\partial \Phi}{\partial n}=0$，因此在电场中对应于流场中固体壁面处应使$\frac{\partial V}{\partial n}=0$，即为绝缘面，而在流场中离绕流物体相当远处，流速不受绕流物体的干扰而为均匀平行流场，所以在1-2及3-4线上（图3-41）$\frac{\partial \Phi}{\partial s}=0$或$\Phi=C$，因此在电场中对应处应保持$V=C$，即必须为良导体，可用一定厚度的铜板来实现。

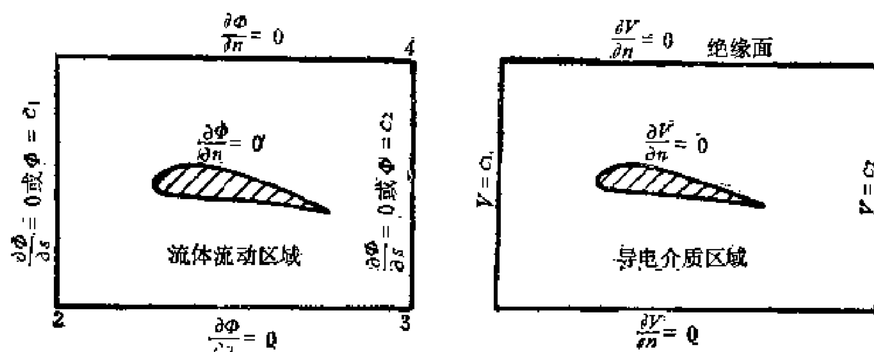


图3-41 电液类比的边界条件

确定了边界条件后，可用如图3-42所示的装置，构成电桥电路。如果电极A和B之间的电势差为ΔV，电极A和指针P之间的电势差为ΔV_1，当惠斯登电桥平衡时则

$$\frac{\Delta V_1}{\Delta V}=\frac{r_1}{r_1+r_2}=\frac{r_1}{R}$$

由此，每调整一个r_1就可在保持电桥平衡的条件下，用指针P在电场中测出一条等电势（$\Delta V_1=C$）线，这些等电势线也就相当于流场中的等速度势线，求得流场等势线后即可作出与它正交的流线而画出流网，这样就获得流场的解。

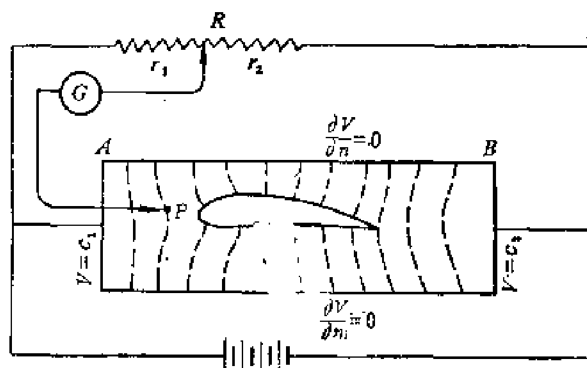


图3-42 电液类比装置

因为有势流场中流函数Ψ也满足调和方程，因此流函数Ψ与电势V也可类比，这时边界条件为：

1）流体不能穿过壁面，即$\frac{\partial \Psi}{\partial s} = V_n = 0$，因此在电场中与流场相对应处应为$\frac{\partial V}{\partial s} = 0$，即沿壁面长度上没有电势差，因此壁面应为良导体。

2）在流场中远离绕流物体处流场不受绕流物体干扰，为均匀平行流场，即$\frac{\partial \Psi}{\partial n} = V$，$= 0$，因此要求对应电场中$\frac{\partial V}{\partial n} = 0$，即为绝缘面。

按照上述边界条件在电场中测得的等电势线就相当于流场中的流线，根据求得的流线就可作出流网而获得流场的解。

第四章　流体动力学

在上一章中，我们只研究了流体运动的现象，并没有涉及引起流体运动的原因。本章将进一步研究流体运动的实质问题，不仅要讨论引起运动的原因，而且要考察运动流体的能量和能量转换，以及流体与固体的相互作用。由于流体运动的复杂性，为了便于处理问题，往往要作某些假设，由此而获得的结论是否反映真实，需要科学实验来检验。本章介绍了实验方法的理论基础：相似理论和量纲分析。前者告诉我们如何使设计规划的工程在实验室中预演，以便发现问题，判断设计规划是否合理，如何修正，后者可帮助我们建立物理方程，并使我们有针对性地进行实验和分析实验数据。

§4-1　流体质点的加速度

牛顿运动第二定律为作用于物体的外力等于物体的动量改变率，即

$$\Sigma \boldsymbol{F}=\frac{d}{dt}(m\boldsymbol{u}) \tag{4-1}$$

这个定律适用于流场中任一流体质点，也适用于把流场作为一个整体来处理，后者归结为动量定理，前者则导出了运动方程式。现在，我们先对质点进行讨论。在运动时，流体质点的质量是不变的，因此质点上受到的力：$\Sigma \boldsymbol{F}=m\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}$，式中$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}$为质点的运动速度改变率，即加速度。因为流场中流体质点的运动速度是空间座标x，y，z，和时间t的函数，某一流体质点在某瞬时t所占空间为（x，y，z），速度为$\boldsymbol{u}$，当它经过dt微小时间后运动到新的空间位置（$x+dx$，$y+dy$，$z+dz$），它的速度为$\boldsymbol{u}'$，则

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(x, y, z, t)$$

$$\boldsymbol{u}'=\boldsymbol{u}'(x+dx,\ y+dy,\ z+dz,\ t+dt)$$

流体质点的速度增量即为上述两速度之差，即

$$d\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}'(x+dx, y+dy, z+dz, t+dt)-\boldsymbol{u}(x, y, z, t)$$

由数学分析可知，略去高阶无限小，这个增量就是速度$\boldsymbol{u}$（x，y，z，t）的全微分，即

$$d\boldsymbol{u}=\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x}dx+\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y}dy+\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z}dz+\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}dt$$

如果将速度增量除以dt，并以$u_x=\frac{dx}{dt}$，$u_y=\frac{dy}{dt}$，$u_z=\frac{dz}{dt}$代入，则可得加速度$\boldsymbol{a}$为

$$\boldsymbol{a}=\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}=u_x\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x}+u_y\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y}+u_z\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z}+\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} \tag{4-2}$$

式中等号右边前三项之和是同一瞬时在流场内相距ds的两点上的速度变化率，称为变位加速度或称定时加速度，第四项为dt时间内空间某定点上的速度变化率，称为局部加速度，或定点加速度。

在直角座标中$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{i}u_x+\boldsymbol{j}u_y+\boldsymbol{k}u_z$，$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$为单位矢量，$u_x$、$u_y$、$u_z$则为速度$\boldsymbol{u}$在座标

轴方向的分量。同样，加速度 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}a_x+\boldsymbol{j}a_y+\boldsymbol{k}a_z$，则

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{i}a_x+\boldsymbol{j}a_y+\boldsymbol{k}a_z=\boldsymbol{a}&=u_x\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x}+u_y\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y}+u_z\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z}+\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\\
&=\boldsymbol{i}\left(u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_x}{\partial t}\right)\\
&\quad+\boldsymbol{j}\left(u_x\frac{\partial u_y}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_y}{\partial z}+\frac{\partial u_y}{\partial t}\right)\\
&\quad+\boldsymbol{k}\left(u_x\frac{\partial u_z}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_z}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial t}\right)
\end{aligned}
$$

由此可得

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{du_x}{dt}&=a_x=u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_x}{\partial t}\\
\frac{du_y}{dt}&=a_y=u_x\frac{\partial u_y}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_y}{\partial z}+\frac{\partial u_y}{\partial t}\\
\frac{du_z}{dt}&=a_z=u_x\frac{\partial u_z}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_z}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial t}
\end{aligned}\right\}
\tag{4-3}
$$

在圆柱座标系中，速度 $\boldsymbol{u}$ 和加速度 $\boldsymbol{a}$ 是矢径 r 、幅角 θ 、座标 z 及时间 t 的函数，所以加速度 $\boldsymbol{a}$ 为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}=\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}&=\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial r}\frac{dr}{dt}+\frac{\partial \boldsymbol{u}}{r\partial\theta}\frac{rd\theta}{dt}+\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z}\frac{dz}{dt}+\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\\
&=u_r\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial\theta}+u_z\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z}+\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}
\end{aligned}
\tag{4-4}
$$

因为 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{e}_r u_r+\boldsymbol{e}_\theta u_\theta+\boldsymbol{e}_z u_z$，$\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\theta$、$\boldsymbol{e}_z$ 为单位矢量。必须注意，在圆柱座标系中，单位矢量 $\boldsymbol{e}_r$ 及 $\boldsymbol{e}_\theta$ 是随 θ 而变的，所以

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial\theta}&=\frac{\partial}{\partial\theta}(\boldsymbol{e}_r u_r+\boldsymbol{e}_\theta u_\theta+\boldsymbol{e}_z u_z)\\
&=\boldsymbol{e}_r\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+u_r\frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial\theta}+\boldsymbol{e}_\theta\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+u_\theta\frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial\theta}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial u_z}{\partial\theta}
\end{aligned}
$$

如图 4-1 所示，$d\boldsymbol{e}_\theta$ 的方向与 $\boldsymbol{e}_r$ 相反，它的数值为 $d\theta$，$d\boldsymbol{e}_r$ 的方向与 $\boldsymbol{e}_\theta$ 相同，它的值也是 $d\theta$，即 $d\boldsymbol{e}_\theta=-\boldsymbol{e}_r d\theta$ 及 $d\boldsymbol{e}_r=\boldsymbol{e}_\theta d\theta$，

所以

$$
\frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial\theta}=-\boldsymbol{e}_r;
$$

$$
\frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial\theta}=\boldsymbol{e}_\theta。
$$

因此

$$
\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial\theta}=\boldsymbol{e}_r\left(\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}-\frac{u_\theta^2}{r}\right)+\boldsymbol{e}_\theta\left(\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{u_r u_\theta}{r}\right)+\boldsymbol{e}_z\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\theta},
$$

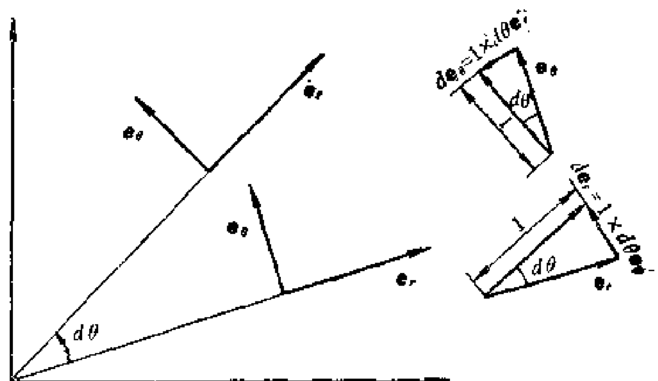


图4-1 圆柱座标中的单位矢量

因为单位矢量与 r，z，t 无关，所以它们对 r，z，t 的导数均为零。由此得圆柱座标系的加速度 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_r a_r+\boldsymbol{e}_\theta a_\theta+\boldsymbol{e}_z a_z$ 为

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_r\left(\frac{\partial u_r}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}-\frac{u_\theta^2}{r}+u_z\frac{\partial u_r}{\partial z}\right)$$
$$+\boldsymbol{e}_\theta\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+\frac{u_r u_\theta}{r}+u_z\frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)$$
$$+\boldsymbol{e}_z\left(\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)$$

即

$$\left.\begin{aligned}\frac{du_r}{dt}&=a_r=\frac{\partial u_r}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}+u_z\frac{\partial u_r}{\partial z}-\frac{u_\theta^2}{r}\\ \frac{du_\theta}{dt}&=a_\theta=\frac{\partial u_\theta}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+u_z\frac{\partial u_\theta}{\partial z}+\frac{u_r u_\theta}{r}\\ \frac{du_z}{dt}&=a_z=\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}\end{aligned}\right\}\quad(4\text{-}5)$$

式中等号右边第一项为局部加速度，第二项以后各项之和为变位加速度。由于$\boldsymbol{e}_\theta$方向改变而产生了径向加速度$-\frac{u_\theta^2}{r}$，这实质上就是向心加速度，又由于$\boldsymbol{e}_r$方向的改变而产生了切向加速度$\frac{u_r u_\theta}{r}$。

§4-2 理想流体的运动方程式

所谓理想流体是指没有粘性的流体，这种流体在自然界并不存在，但是这个假设的确使问题得到简化，并且对许多工程实际问题并不造成错误概念和结论，产生的偏差可以修正。在理想流体的假设下，流体中并不存在切向表面力，只存在法向表面力。我们在流场中取一微小平行六面体 $dxdydz$ 的流体，如图4-2所示，它的中心点$A(x,y,z)$上的压强为$p(x,y,z,t)$，则在该六面体上作用着由压强产生的法向表面力，和单位质量力X，Y，Z，如果表面力不能平衡质量力，则此微小流体必将产生加速度$\boldsymbol{a}$，因此在X方向

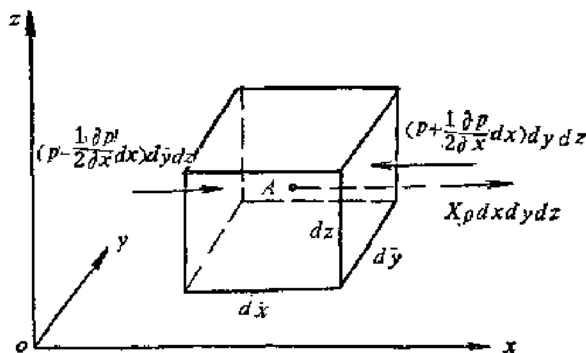


图4-2 流体上的作用力

$$X\rho dxdydz+\left(p-\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}dx\right)dydz-\left(p+\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}dx\right)dydz$$
$$=\rho dxdydz\frac{du_x}{dt}$$

以质量 $\rho dxdydz$ 除之得单位质量流体运动规律的数学表达式

$$X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{du_x}{dt}$$

同样方法可得其它两个座标轴方向的方程，以（4-3）式代入得

$$\left.\begin{aligned}
X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}&=\frac{\partial u_x}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}\\
Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}&=\frac{\partial u_y}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_y}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}\\
Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}&=\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_z}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_z}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}
\end{aligned}\right\}\tag{4-6}$$

在圆柱座标系中，设符号R和T为径向和切向单位质量力，用同样方法可以求得下列关系式：

$$\left.\begin{aligned}
R-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}&=\frac{\partial u_r}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}+u_z\frac{\partial u_r}{\partial z}-\frac{u_\theta^2}{r}\\
T-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{r\partial \theta}&=\frac{\partial u_\theta}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+u_z\frac{\partial u_\theta}{\partial z}+\frac{u_r u_\theta}{r}\\
Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}&=\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}
\end{aligned}\right\}\tag{4-7}$$

公式（4-6）及（4-7）是不同座标系的理想流体运动方程式，或称欧拉型运动方程式。这是根据牛顿第二运动定律，在不计流体粘性的条件下导出的，它阐明了流体受到外力后产生运动的规律，是流体动力学的基本方程。

流体动力学的基本问题可以归结为在给定外力作用下求解流场的速度分布和压强分布，而运动方程中正好联系着流场的压强和流速。对于不可压缩性流体来说，三个运动方程出现了四个未知数u_x，u_y，u_z，p（或u_r，u_θ，u_z，p），因此补充一个连续性方程$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0\left(\text{或}\frac{u_r}{r}+\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0\right)$，在原则上就能求得流场的解。对于压缩性流体，则密度ρ也是变量，所以再要补充一个状态方程$p=\rho RT$，由五个方程原则上也就能解五个未知数。但是方程组的普遍解，在数学上还是十分困难的，只在某些特殊情况下，使运动方程进一步简化才能求解。下节我们将对流场有势和非势流场中沿着某一流线，这两种特殊情况进行讨论，虽然这是两个有局限的条件，但由此获得的解却很有实用价值。

§4-3 运动方程式的积分

我们先对有势流场进行讨论。在流场有势的条件下，由公式（3-32）得

$$\frac{\partial u_y}{\partial x}=\frac{\partial u_x}{\partial y};\quad \frac{\partial u_z}{\partial y}=\frac{\partial u_y}{\partial z};\quad \frac{\partial u_x}{\partial z}=\frac{\partial u_z}{\partial x}$$

并且

$$u_x=\frac{\partial \Phi}{\partial x};\quad u_y=\frac{\partial \Phi}{\partial y};\quad u_z=\frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

因为导数值与求导的顺序无关，所以

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u_x}{\partial t}&=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)\\
\frac{\partial u_y}{\partial t}&=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)\\
\frac{\partial u_z}{\partial t}&=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)
\end{aligned}\right\}\tag{4-8}$$

将（3-32）及（4-8）式代入（4-6）式得

$$
\left.\begin{aligned}
X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_y}{\partial x}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial x}\\
Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)+u_x\frac{\partial u_x}{\partial y}+u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial y}\\
Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}&=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)+u_x\frac{\partial u_x}{\partial z}+u_y\frac{\partial u_y}{\partial z}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}
\end{aligned}\right\}\tag{4-9}
$$

因为 $u^2=u_x^2+u_y^2+u_z^2$，所以分别对 x，y，z 取偏导数得

$$
\left.\begin{aligned}
u\frac{\partial u}{\partial x}&=u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_y}{\partial x}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial x}\\
u\frac{\partial u}{\partial y}&=u_x\frac{\partial u_x}{\partial y}+u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial y}\\
u\frac{\partial u}{\partial z}&=u_x\frac{\partial u_x}{\partial z}+u_y\frac{\partial u_y}{\partial z}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}
\end{aligned}\right\}\tag{4-10}
$$

而单位质量力为某力势函数U偏导的负值，即$X=-\frac{\partial U}{\partial x}$，$Y=-\frac{\partial U}{\partial y}$，$Z=-\frac{\partial U}{\partial z}$。如果我们设某函数$P(x,y,z,t)$它对座标轴和时间的偏导数为

$$
\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x};\quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y};\quad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z},\quad \frac{\partial P}{\partial t}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t}\tag{4-11}
$$

而函数$P(x,y,z,t)$和压强$p(x,y,z,t)$的全微分为

$$
dP=\frac{\partial P}{\partial x}dx+\frac{\partial P}{\partial y}dy+\frac{\partial P}{\partial z}dz+\frac{\partial P}{\partial t}dt
$$

$$
dp=\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy+\frac{\partial p}{\partial z}dz+\frac{\partial p}{\partial t}dt
$$

所以

$$
\begin{aligned}
dP-\frac{\partial P}{\partial t}dt&=\frac{\partial P}{\partial x}dx+\frac{\partial P}{\partial y}dy+\frac{\partial P}{\partial z}dz=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy+\frac{\partial p}{\partial z}dz\right)\\
&=\frac{1}{\rho}\left(dp-\frac{\partial p}{\partial t}dt\right)
\end{aligned}
$$

由于$\frac{\partial P}{\partial t}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t}$，因此可得

$$
dP=\frac{1}{\rho}dp
$$

或

$$
P=\int\frac{dp}{\rho}\tag{4-12}
$$

如果ρ与p的关系确定了，那末函数$P(x,y,z,t)$也就可由（4-12）式求得。以（4-10），（4-11）式代入（4-9）式，得

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(U+P+\frac{u^2}{2}+\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)&=0\\
\frac{\partial}{\partial y}\left(U+P+\frac{u^2}{2}+\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)&=0\\
\frac{\partial}{\partial z}\left(U+P+\frac{u^2}{2}+\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)&=0
\end{aligned}\right\}\tag{4-13}
$$

(4-13) 式说明，虽然U，P，u，Φ都是x，y，z，t的函数，但它们的组合$\left(U+P+\frac{u^2}{2}+\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)$却与$x$，$y$，$z$无关，而只可能是$t$的函数，即

$$U+P+\frac{u^2}{2}+\frac{\partial \Phi}{\partial t}=F(t)$$

或

$$\int \frac{dp}{\rho}+\frac{u^2}{2}+U+\frac{\partial \Phi}{\partial t}=F_2(t) \tag{4-14}$$

这个积分称为拉格朗日积分，也称为柯西积分，适用于理想流体非恒定的势流。对于不可压缩性流体$\rho=c$，则 (4-14) 式成为

$$\frac{p}{\rho}+\frac{u^2}{2}+U+\frac{\partial \Phi}{\partial t}=F_3(t)$$

在不可压缩性流体恒定势流下$\frac{\partial \Phi}{\partial t}=0$，这时任意函数$F_3(t)$变为一常数$C$，则

$$\frac{p}{\rho}+\frac{u^2}{2}+U=C \tag{4-15}$$

(4-15)式称为拉格朗日-柏努利方程。必须指出，欧拉运动方程中每一项均为单位质量流体上受到的力，通过积分后 (4-14) 式中每一项均为单位质量流体的能量。

在非势流场中，欧拉运动方程的积分是困难的，但如果我们针对某一流线进行研究，可以获得满意的结果。在沿一条流线的条件下，流体质点的运动必需满足流线微分方程式，即

$$\left.\begin{aligned}\frac{u_x}{u}&=\frac{dx}{ds}=\cos(s,x)=l_x\\ \frac{u_y}{u}&=\frac{dy}{ds}=\cos(s,y)=l_y\\ \frac{u_z}{u}&=\frac{dz}{ds}=\cos(s,z)=l_z\end{aligned}\right\} \tag{4-16}$$

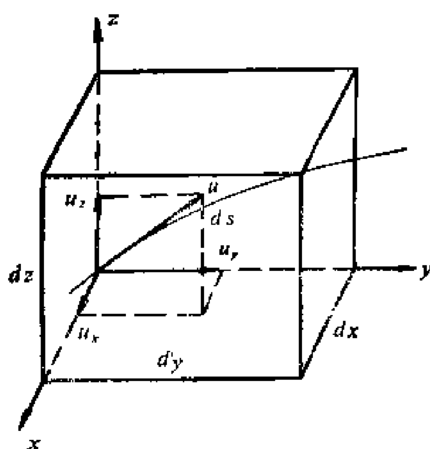


图4-3 直角座标系中的速度与流线

式中u是速度矢量$\boldsymbol{u}$的值，图 4-3，即$u^2=u_x^2+u_y^2+u_z^2$。l_x，l_y，l_z为$\boldsymbol{u}$的方向余弦。以(4-16)式代入(4-6)式的第一式得

$$\begin{aligned}X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}&=\frac{\partial u_x}{\partial t}+u\left(l_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+l_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+l_z\frac{\partial u_x}{\partial z}\right)\\ &=\frac{\partial u_x}{\partial t}+u\left(\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial u_x}{\partial z}\right)\\ &=\frac{\partial u_x}{\partial t}+u\frac{\partial u_x}{\partial s}\end{aligned}$$

同样方法，我们可以代换 (4-6) 式中的第二及第三式，由此得沿流线的运动方程为

$$
\left.\begin{aligned}
X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}&=\frac{\partial u_x}{\partial t}+u\frac{\partial u_x}{\partial s}\\
Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}&=\frac{\partial u_y}{\partial t}+u\frac{\partial u_y}{\partial s}\\
Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}&=\frac{\partial u_z}{\partial t}+u\frac{\partial u_z}{\partial s}
\end{aligned}\right\} \tag{4-17}
$$

(4-17)式各乘方向余弦 l_x，l_y 及 l_z，然后三式相加得

$$
\begin{aligned}
&l_xX+l_yY+l_zZ-\frac{1}{\rho}\left(l_x\frac{\partial p}{\partial x}+l_y\frac{\partial p}{\partial y}+l_z\frac{\partial p}{\partial z}\right)\\
&=l_x\frac{\partial u_x}{\partial t}+l_y\frac{\partial u_y}{\partial t}+l_z\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial s}+u_y\frac{\partial u_y}{\partial s}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial s}
\end{aligned} \tag{4-18}
$$

由（4-16）式我们得

$$
l_xu_x+l_yu_y+l_zu_z=\frac{u_x^2}{u}+\frac{u_y^2}{u}+\frac{u_z^2}{u}=\frac{u^2}{u}=u
$$

将上式对时间 t 偏导得

$$
l_x\frac{\partial u_x}{\partial t}+l_y\frac{\partial u_y}{\partial t}+l_z\frac{\partial u_z}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial t}
$$

因为 $u^2=u_x^2+u_y^2+u_z^2$，对 s 偏导得

$$
u\frac{\partial u}{\partial s}=u_x\frac{\partial u_x}{\partial s}+u_y\frac{\partial u_y}{\partial s}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial s}
$$

而
$$
l_x\frac{\partial p}{\partial x}+l_y\frac{\partial p}{\partial y}+l_z\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial p}{\partial z}\frac{dz}{ds}=\frac{\partial p}{\partial s}
$$

$$
l_xX+l_yY+l_zZ=X\frac{dx}{ds}+Y\frac{dy}{ds}+Z\frac{dz}{ds}=-\frac{\partial U}{\partial s}
$$

代入（4-18）式得

$$
-\frac{\partial U}{\partial s}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial s}
$$

或
$$
\frac{\partial U}{\partial s}+u\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial t}=0
$$

设函数$P(s,\ t)$，且$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s}=\frac{\partial P}{\partial s}$，$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{\partial P}{\partial t}$，则$P=\int\frac{dp}{\rho}$，因此上式可以改写为

$$
\frac{\partial}{\partial s}\left(P+\frac{u^2}{2}+U\right)+\frac{\partial u}{\partial t}=0 \tag{4-19}
$$

上面的简化，使三元的欧拉运动方程成为沿流线的一元运动方程。

(4-19)式沿着流线积分得

$$
P+\frac{u^2}{2}+U+\int\frac{\partial u}{\partial t}ds=f_1(t)
$$

或
$$
\int_1^2\frac{dp}{\rho}+\frac{u_2^2-u_1^2}{2}+U_2-U_1+\int_1^2\frac{\partial u}{\partial t}ds=0 \tag{4-20}
$$

正如前面已经指出，欧拉运动方程是单位质量流体的力平衡方程，(4-20)式是(4-19)式

对 ds 积分，因此(4-20)式就成为机械能性质的方程，它的每一项均表示为单位质量流体的能量。这个方程适用于理想流体非恒定流场内某一流线上。如果是不可压缩性流体非恒定流场，则

$$\frac{p_2-p_1}{\rho}+\frac{u_2^2-u_1^2}{2}+U_2-U_1+\int_1^2\frac{\partial u}{\partial t}ds=0 \tag{4-21}$$

如果是理想流体在恒定流场中，则 $\frac{\partial u}{\partial t}=0$，(4-19)式可改写为 $\frac{d}{ds}\left(P+U+\frac{u^2}{2}\right)=0$，积分之得

$$P+U+\frac{u^2}{2}=C$$

或

$$\int\frac{dp}{\rho}+U+\frac{u^2}{2}=C \tag{4-22}$$

这个积分称为柏努利积分，(4-22)式称为柏努利方程，积分常数 C 叫做柏努利常数，写成微分形式为

$$\frac{dp}{\rho}+dU+udu=0 \tag{4-22 a}$$

§4-4 不可压缩性流体的柏努利方程

不可压缩性流体在恒定流动时，柏努利方程为

$$\frac{p}{\rho}+U+\frac{u^2}{2}=C \tag{4-23}$$

(4-23)式与(4-15)式具有相同的形式，但却是在不同条件(有势流场和非势流场沿流线)下求得的，这就是说 $\frac{p}{\rho}+U+\frac{u^2}{2}=C$ 可以适用于理想不可压缩性流体恒定流动时整个有势流场，或非势流场中的某一条流线上。由于大多数工程问题处在重力场中，因此 $X=0$，$Y=0$ 而 $Z=-g$，则力势函数 $U=gz$，由此(4-15)或(4-23)式为

$$\frac{p}{\rho}+\frac{u^2}{2}+gz=C \tag{4-24}$$

或

$$\frac{p_1}{\rho}+\frac{u_1^2}{2}+gz_1=\frac{p_2}{\rho}+\frac{u_2^2}{2}+gz_2 \tag{4-24 a}$$

(4-24)式是理想不可压缩性流体恒定流动沿流线或势流场的柏努利方程，式中每一项的量纲是 $[L^2/T^2]$，实质上却是 $\left[\frac{ML}{T^2}\cdot\frac{L}{M}\right]$，也就是每项的单位为焦耳每千克(牛顿·米每千克)，即单位质量的能量，所以 p/ρ 表示为单位质量的压强势能，$u^2/2$ 表示为单位质量的动能，gz 表示为单位质量的位置势能。由此可见，柏努利方程说明了流体运动时，不同性质的流体机械能可以相互转换，但总的机械能守恒。

如果将(4-24)式除以 g，可得柏努利方程的另一形式

$$\frac{p}{\rho g}+\frac{u^2}{2g}+z=C=z_0 \tag{4-25}$$

或

$$\frac{p_1}{\rho g}+\frac{u_1^2}{2g}+z_1=\frac{p_2}{\rho g}+\frac{u_2^2}{2g}+z_2 \tag{4-25 a}$$

(4-25)式中各项的物理意义是单位重量流体的机械能，它的量纲均与高度相同为[L]，所以又称为能头，式中三项依次称为压强能头$\frac{p}{\rho g}$，速度能头$\frac{u^2}{2g}$和位置能头z，柏努利常数z_0称为总能头。

如果（4-24）式乘以ρ，则又可得另一形式的柏努利方程

$$p+\rho\frac{u^2}{2}+\rho gz=C=p_0 \tag{4-26}$$

或
$$p_1+\rho\frac{u_1^2}{2}+\rho gz_1=p_2+\rho\frac{u_2^2}{2}+\rho gz_2 \tag{4-26 a}$$

式中各项的物理意义为单位体积流体的机械能，它的量纲都与压强相同，所以依次可称为静压p，动压$\rho\frac{u^2}{2}$及位压ρgz。

§4-5 压缩性流体的柏努利方程

在重力场中，可压缩性流体的U与$\int\frac{dp}{\rho}$及$\frac{u^2}{2}$比较起来是小得可以忽略不计的，则在恒定流动的条件下（4-21）式简化为

$$\int\frac{dp}{\rho}+\frac{u^2}{2}=C \tag{4-27}$$

如果气体在运动时对外界没有能量交换，气体内也不存在剪切应力，则运动过程是可逆的绝热过程，即等熵过程，由此可得压强p与密度ρ的关系为$p/\rho^k=C$。

设物体远前方的运动参数为$p=p_1$，$\rho=\rho_1$，$u=u_1$则

$$\rho=\rho_1\left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/k}$$

由此可得

$$\int\frac{dp}{\rho}=\frac{p_1^{1/k}}{\rho_1}\int p^{-1/k}dp=\frac{p_1}{\rho_1}\frac{k}{k-1}\left(\frac{p}{p_1}\right)^{(k-1)/k}+C$$

代入（4-27）式得

$$\frac{p_1}{\rho_1}\frac{k}{k-1}\left(\frac{p}{p_1}\right)^{(k-1)/k}+\frac{u^2}{2}=C \tag{4-28}$$

或
$$\frac{k}{k-1}\frac{p_1}{\rho_1}\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(k-1)/k}-1\right]+\frac{u_2^2-u_1^2}{2}=0 \tag{4-28 a}$$

(4-28)式是理想可压缩流体恒定流动的柏努利方程。现在我们来求物体在气流中驻点A（图4-4）的压强，在该点的速度$u_A=0$，列出物体远前方1与驻点A的柏努利方程

$$\frac{p_1}{\rho_1}\frac{k}{k-1}\left[\left(\frac{p_A}{p_1}\right)^{(k-1)/k}-1\right]-\frac{u_1^2}{2}=0$$

由此得

$$\frac{p_A}{p_1}=\left[1+\frac{k-1}{k}\frac{\rho_1u_1^2}{2p_1}\right]^{k/(k-1)}$$

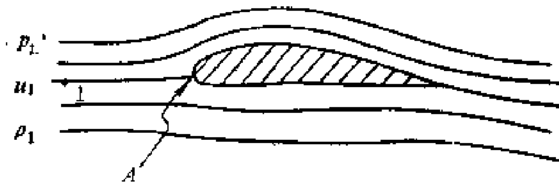


图4-4 物体上的驻点

我们设$\sqrt{\dfrac{\rho_1 u_1^2}{k p_1}}=M$，则

$$\frac{p_A}{p_1}=\left[1+\frac{k-1}{2}M^2\right]^{k/(k-1)} \tag{4-29}$$

按二项式定理展开

$$\begin{aligned}\frac{p_A}{p_1}&=1+\left(\frac{k}{k-1}\right)\left(\frac{k-1}{2}\right)M^2+\frac{\left(\frac{k}{k-1}\right)\left(\frac{k}{k-1}-1\right)}{2!}\left(\frac{k-1}{2}\right)^2M^4+\cdots\cdots\\&=1+\frac{k}{2}M^2+\frac{k}{8}M^4+\cdots\cdots\\&=1+\frac{\rho_1 u_1^2}{2p_1}+\left(\frac{\rho_1 u_1^2}{2p_1}\right)\frac{M^2}{4}+\cdots\cdots\end{aligned}$$

如果$M<1$，则可略去M的高次方项，上式等号右边取三项已足够精确，则

$$p_A=p_1+\frac{\rho_1 u_1^2}{2}\left(1+\frac{M^2}{4}\right) \tag{4-29 a}$$

如果流体是不可压缩性的，由柏努利方程可得驻点A的压强为

$$p_A=p_1+\frac{\rho_1 u_1^2}{2} \tag{4-30}$$

比较一下（4-29 a）与（4-30）式可知两者的差值为$\Delta p=\dfrac{\rho_1 u_1^2}{2}\left(\dfrac{M^2}{4}\right)$，我们把$\Delta p$与动压$\dfrac{\rho_1 u_1^2}{2}$的比称为相对误差$\varepsilon_p$，则

$$\varepsilon_p=\Delta p\Big/\left(\frac{\rho_1 u_1^2}{2}\right)=M^2/4$$

ε_p与M的关系见表 4-1 所示，当$M=0.1$时$\varepsilon_p=0.25\%$，当$M=0.3$时，ε_p也仅为2.25%，由此可见，当$M<0.3$时，把气体作为不可压缩性流体来处理，误差是很小的。

表4-1 ε_p与M的关系

M	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
ε_p, %	0.25	1	2.25	4	6.2	9.0	12.8	17.3	21.9	27.5

§4-6 柏努利方程的适用范围和它的拓广

柏努利方程是流体力学中十分重要，应用广泛的方程，但求得这个方程的前提是假设流体内不存在剪切应力，因此它只适用于理想流体或流体中速度梯度等于零的情况。我们知道，实际上并不存在理想流体，某些流体粘性很小，也只是近似于理想流体，对于油液来说，粘性往往较大，更不能看作理想流体，至于流场中速度梯度是否为零的问题，则要进行具体分析。

从流场所处的环境来说，通常有两种结构，一种是流体的运动被限止在一定的界面（壁面）范围内，或者说运动流体被壁面所包围，例如管道中或缝隙中的流场。另一种是运动流

体包围了某一物体，或流体包围运动物体，即物体潜没在流体中成为潜体，例如飞机在空中航行。下面我们对这两种流场进行分析。

我们先讨论流体包围物体的流场，如果流体是理想的，那末在物体表面上流体可以具有切向流速。如果是实际流体，由于流体的粘性，流体和固体分子之间的附着力，流体流经物体壁面时，紧贴壁面的流体必然粘附于壁面，相对流速为零，即流体在壁面上没有滑移。但流体毕竟易于流动，在壁面附近随着离壁面法向距离的增大，壁面对流体的影响减弱，流体的流速将很快有所增长，至一定距离处就接近原来未受固体扰动的速度，因此速度的改变现象只发生在紧邻壁面的很薄的流层内，这个薄层称为边界层或附面层。在附面层内，速度由壁面的零值向外增长至接近原来的流速，由于附面层极薄，所以速度梯度极大，即使流体的粘性很小，流体内也将呈现一定的剪切应力。在附面层外，

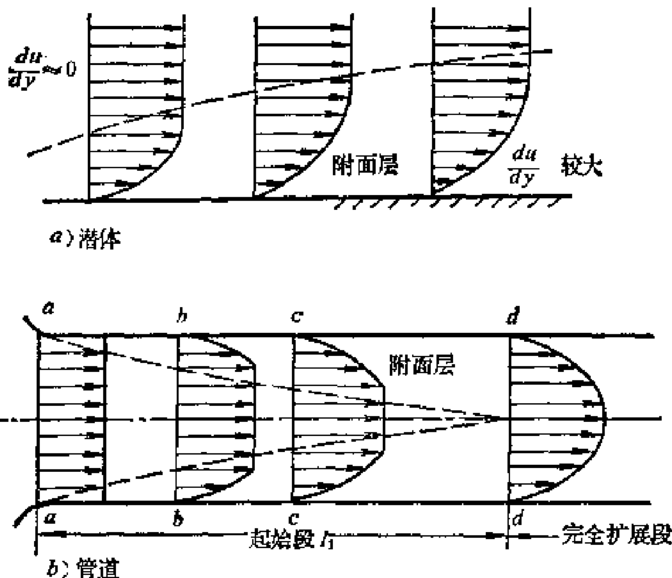


图4-5 附面层的概念

即使流体具有较大的粘性，但由于不存在速度梯度，或速度梯度极小，流体内将不存在剪切应力，或者剪切应力小得可以忽略，也就是说我们可以把这种流场划分为两个区域：在附面层内不能不计剪切应力，因此，上述柏努利方程是不适用的；在附面层外，不仅可以不计剪切应力，而且流场是有势的，所以称为势流区，或自由流动区。在势流区内，上述柏努利方程和势流规律全都适用。由于附面层厚度极薄，附面层内沿法向的压强分布基本上是常数，因此物体上的压强分布与附面层边界上的压强分布相同（可参阅第五章关于附面层的讨论）。

对于壁面包围流体的流场，以管道为例，如果流体从一大容器流入管道，则在进口处 $a-a$ 断面处流速将是均匀的，这时管壁处流体速度为零，附面层厚度也为零，随着流体向管内深入，附面层也向管中心扩展，到离进口为 l_1 距离处的 $d-d$ 断面，附面层已基本上扩展至管道中心，在 $d-d$ 断面以后，流速分布就不再改变了，我们称 $d-d$ 断面以前的区域为起始段，$d-d$ 断以后的区域为完全扩展段，在完全扩展段内，剪切应力是到处存在的。

由此可见，上述不计流体内剪切应力的柏努利方程，具有一定的局限性，但由于它是一个机械能守恒的方程，我们可以用能量守恒的观点把它拓广，当流体中存在剪切应力，那末流体运动时就要用一部分机械能去克服阻力而作功，这是一种无用功，只能转变成热量，一部分散逸出去（$-dq_H$），另一部分使流体温度升高而改变内能 di，并使流体膨胀而产生膨胀功 $pdv=pd\frac{1}{\rho}$。如果每单位质量流体运动时克服阻力作功为 $d(gh'_f)$，根据能量守恒定律，则

$$\frac{dp}{\rho}+dU+udu+d(gh'_f)=0$$

在重力场中，则

$$\frac{dp}{\rho}+gdz+udu+d(gh_f')=0 \tag{4-31}$$

式中
$$d(gh_f')=di+pd\frac{1}{\rho}-dq_H$$

因此
$$\frac{dp}{\rho}+gdz+udu+di+pd\frac{1}{\rho}-dq_H=0 \tag{4-32}$$

如果在流体运动过程中，它通过某一流体机械而作功 W_s，那末(4-32)式可修正为

$$dq_H=\frac{dp}{\rho}+gdz+udu+di+pd\frac{1}{\rho}+dW_s \tag{4-33}$$

(4-33)式是一个十分重要的方程，称为通用能量方程，柏努利方程只是它的一个特殊形式。

§4-7 纳维-斯托克斯方程

以上我们讨论了不计剪切应力的流体运动规律，这些规律只适用于理想流体或附面层外的势流区域。在附面层内剪切应力是不能忽略的，现在我们将讨论存在剪切应力时流体的运动规律。流体中存在剪切应力，不仅是现出阻碍运动的摩擦阻力，而且也影响了法向应力(压强)的性质。在运动流体内取一微小六面体 $dxdydz$，每一面上的表面力可分解为一个法向应力 p 和二个切应力 τ，图 4-6 示出了三个相互垂直面上的应力，p 和 τ 的第一个下标表示垂直于面的轴，第二个下标表示应力平行的轴，这样六个面上共有 6 个法向应力和12个切应力，它们各为：

$$p_{xx},\ p'_{xx},\ p_{yy},\ p'_{yy},\ p_{zz},\ p'_{zz},\ \tau_{xy},\ \tau_{xz},\ \tau'_{xy},\ \tau'_{xz},$$
$$\tau_{yx},\ \tau_{yz},\ \tau'_{yx},\ \tau'_{yz},\ \tau_{zx},\ \tau_{zy},\ \tau'_{zx},\ \tau'_{zy}。$$

现在分别研究 p 和 τ 的特征，图 4-7 是六面体在 yz 平面内的投影，因为流体是连续介

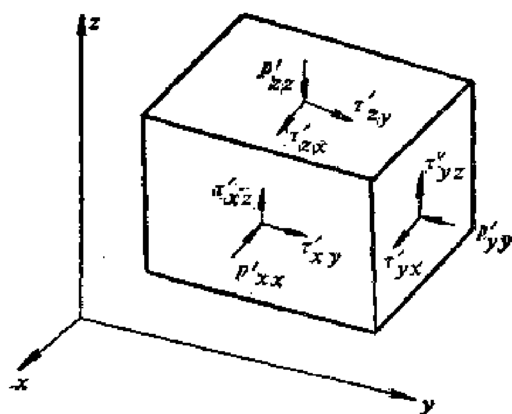


图4-6 流体内的应力

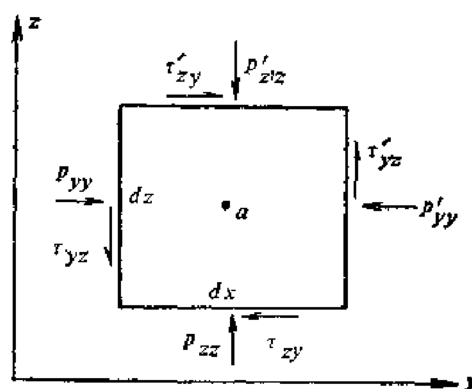


图4-7 yz平面内的应力关系

质，p 和 τ 都是空间座标轴的连续函数，所以 p' 与 p，τ' 与 τ 的关系为

$$p'_{yy}=p_{yy}+\frac{\partial p_{yy}}{\partial y}dy$$

$$p'_{zz}=p_{zz}+\frac{\partial p_{zz}}{\partial z}dz$$

$$\tau'_{yz}=\tau_{yz}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}dy$$

$$\tau'_{zy}=\tau_{zy}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}dz$$

以 a 为中心，求各力对 a 的力矩

$$\frac{1}{2}\tau_{yz}dzdxdy+\frac{1}{2}\tau'_{yz}dzdxdy-\frac{1}{2}\tau_{zy}dxdydz-\frac{1}{2}\tau'_{zy}dxdydz=0$$

或 $\tau_{yz}dxdydz+\left(\tau_{yz}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}dy\right)dxdydz-\tau_{zy}dxdydz-\left(\tau_{zy}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}dz\right)dxdydz=0$

略去高阶无限小得

$$(\tau_{yz}-\tau_{zy})dxdydz=0$$

所以 $\tau_{yz}=\tau_{zy}$

同理可得 $\tau_{xz}=\tau_{zx}$； $\tau_{xy}=\tau_{yx}$

这样，实际上流体内只存在三个独立的切向应力，即 τ_{xy}，τ_{yz} 及 τ_{zx}。

牛顿流体的剪切应力为 $\tau=\mu\frac{du}{dn}=\mu\frac{d\theta}{dt}$，我们把它推广至空间运动中去，我们在第三章中已经求得流体质点运动时的剪切变形率为

$$\frac{d\theta_{xy}}{dt}=2\varepsilon_z=\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)$$

$$\frac{d\theta_{zx}}{dt}=2\varepsilon_y=\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)$$

$$\frac{d\theta_{yz}}{dt}=2\varepsilon_x=\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)$$

所以

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}=\mu\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)=2\mu\varepsilon_z$$

$$\tau_{zx}=\tau_{xz}=\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)=2\mu\varepsilon_y$$

$$\tau_{yz}=\tau_{zy}=\mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)=2\mu\varepsilon_x$$

流体中不存在剪切应力时，某一点的法向应力（压强）不因作用方向不同而改变，但由于剪切应力的存在，这个性质不再能保持，因为流体运动时要发生直线变形，使原来的流体产生拉伸或缩短，这个变形将引起附加的法向应力，如果以 p 为理想条件下的法向应力，则

$$p_{xx}=p-\pi_{xx}$$

$$p_{yy}=p-\pi_{yy}$$

$$p_{zz}=p-\pi_{zz}$$

直线变形引起的附加法向应力可以仿照广义的牛顿内摩擦定律给出

$$\pi_{xx}=\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)=2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x}$$

$$\pi_{yy}=\mu\left(\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)=2\mu\frac{\partial u_y}{\partial y}$$

$$\pi_{zz}=\mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)=2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z}$$

所以

$$p_{xx}=p-2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x}$$

$$p_{yy}=p-2\mu\frac{\partial u_y}{\partial y}$$

$$p_{zz}=p-2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z}$$

由此可得
$$p=\frac{p_{xx}+p_{yy}+p_{zz}}{3}+\frac{2}{3}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)$$

对于不可压缩性流体$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0$，所以

$$p=\frac{p_{xx}+p_{yy}+p_{zz}}{3} \tag{4-34}$$

即不可压缩性粘性流体的理想压强正好是三个法向应力的平均值。

流体上除了上述的表面力外，尚作用着质量力X、Y及Z。根据牛顿第二定律$\Sigma F_x=m\frac{du_x}{dt}$，我们得

$$\rho X dxdydz-(p'_{xx}-p_{xx})dydz+(\tau'_{yx}-\tau_{yx})dxdz+(\tau'_{zx}-\tau_{zx})dxdy=\rho dxdydz\frac{du_x}{dt}$$

而
$$p'_{xx}-p_{xx}=\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}dx=\left(\frac{\partial p}{\partial x}-2\mu\cdot\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}\right)dx$$

$$\tau'_{yx}-\tau_{yx}=\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}dy=\mu\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}\right)dy$$

$$\tau'_{zx}-\tau_{zx}=\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}dz=\mu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z\partial x}\right)dz$$

代入上式得

$$X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right)+\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)=\frac{du_x}{dt}$$

同样方法可得

$$\left.\begin{aligned}
&Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\right)+\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)=\frac{du_y}{dt}\\
&Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right)+\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{du_x}{dx}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)=\frac{du_z}{dt}
\end{aligned}\right\} \tag{4-35}$$

因为不可压缩性流体$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0$，所以

$$X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right)=\frac{du_x}{dt}$$

$$Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\right)=\frac{du_y}{dt}$$

$$Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right)=\frac{du_z}{dt}$$

设算子$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$，上式可写成

$$\left.\begin{aligned}X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\nabla^2 u_x&=\frac{du_x}{dt}\\ Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\nabla^2 u_y&=\frac{du_y}{dt}\\ Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\nabla^2 u_z&=\frac{du_z}{dt}\end{aligned}\right\}\tag{4-35 a}$$

在圆柱座标系中，速度分量为 u_r、u_θ 及 u_z，由（3-4）式可知

$$\begin{aligned}u_x+\mathrm{j}u_y&=u_r\cos\theta-u_\theta\sin\theta+\mathrm{j}u_r\sin\theta+\mathrm{j}u_\theta\cos\theta\\&=u_r(\cos\theta+\mathrm{j}\sin\theta)+\mathrm{j}u_\theta(\cos\theta+\mathrm{j}\sin\theta)\\&=(u_r+\mathrm{j}u_\theta)e^{\mathrm{j}\theta}\end{aligned}\tag{4-36 a}$$

同样，质量力为

$$X+\mathrm{j}Y=e^{\mathrm{j}\theta}(R+\mathrm{j}T)\tag{4-36 b}$$

这里R及T为径向和切向单位质量力。

又因为
$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\theta}=\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\theta}=\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

所以
$$\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{j}\frac{\partial}{\partial y}=e^{\mathrm{j}\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r}+\mathrm{j}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\tag{4-36 c}$$

在x及y方向力的平衡为

$$X+\mathrm{j}Y)-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{j}\frac{\partial}{\partial y}\right)p+\nu\nabla^2(u_x+\mathrm{j}u_y)$$
$$=\frac{d}{dt}(u_x+\mathrm{j}u_y)$$

以(4-36 a)、(4-36 b)及(4-36 c)代入上式得

$$e^{\mathrm{j}\theta}(R+\mathrm{j}T)-\frac{1}{\rho}e^{\mathrm{j}\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r}+\mathrm{j}\frac{\partial}{r\partial\theta}\right)p+\nu\nabla^2[e^{\mathrm{j}\theta}(u_r+\mathrm{j}u_\theta)]$$
$$=\frac{d}{dt}[e^{\mathrm{j}\theta}(u_r+\mathrm{j}u_\theta)]$$

以（3-37）及（4-5）式代入上式，展开后将虚数项和实数项分离，可得径向和切向的力平衡方程为

$$
\left.\begin{aligned}
&R-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right.\\
&\left.-\frac{u_r}{r^2}\right)=\frac{\partial u_r}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}+u_z\frac{\partial u_r}{\partial z}-\frac{u_\theta^2}{r}\\
&T-\frac{1}{r\rho}\frac{\partial p}{\partial \theta}+\nu\left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right.\\
&\left.+\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}-\frac{u_\theta}{r^2}\right)=\frac{\partial u_\theta}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+u_z\frac{\partial u_\theta}{\partial z}+\frac{u_r u_\theta}{r}\\
&\text{z 向的力平衡方程为}\\
&Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial u_z}{\partial t}\\
&+u_r\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}
\end{aligned}\right\}\tag{4-37}
$$

或将上列径向，切向和 z 轴向的三方程写成下列形式

$$
\left.\begin{aligned}
&R-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left(\nabla^2 u_r-\frac{u_r}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right)=\frac{du_r}{dt}\\
&T-\frac{1}{r\rho}\frac{\partial p}{\partial \theta}+\nu\left(\nabla^2 u_\theta-\frac{u_\theta}{r^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)=\frac{du_\theta}{dt}\\
&Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\nabla^2 u_z=\frac{du_z}{dt}
\end{aligned}\right\}\tag{4-37 a}
$$

(4-35 a)及(4-37 a)式各为不可压缩性实际流体的直角座标(笛卡尔座标)系及圆柱座标系的运动微分方程，称为纳维-斯托克斯方程（简写作N-S方程），它们概括了不可压缩性实际流体（具有粘性的流体）的运动普遍规律。这个方程再加上连续性方程，原则上就可以求得实际流体流场的解，但由于N-S方程比欧拉方程多了一摩阻项 $\nu\nabla^2\boldsymbol{u}$，在方程中出现了速度的二阶导数，它的普遍解在数学上还有困难，只对某些特殊情况使方程得到简化，才能求出近似解。

与沿流线对欧拉方程积分相类似，对N-S方程积分时，公式（4-19）中将出现 $\frac{\partial}{\partial s}[\nu(\nabla^2 u_x dx+\nabla^2 u_y dy+\nabla^2 u_z dz)]$项，这就是流体在运动时需克服的粘性摩擦力，因此方括号内的值即为克服摩擦力所作的功，它使有用的机械能变成热量而逸散，并使流体温度升高。这样就使同一流线上流体的有用机械能沿着流动方向降低，所以实际流体的柏努利方程应为

$$\frac{p_2-p_1}{\rho}+\frac{u_2^2-u_1^2}{2}+g(z_2-z_1)+\int_1^2\frac{\partial u}{\partial t}ds+gh_f'=0 \tag{4-38}$$

恒定流动时

$$\frac{p_1}{\rho}+\frac{u_1^2}{2}+gz_1=\frac{p_2}{\rho}+\frac{u_2^2}{2}+gz_2+gh_f' \tag{4-38 a}$$

式中 gh_f' 为单位质量流体的机械能损失，h_f' 即为能头损失，习惯上也常称为水头损失。

§4-8　实际流体总流的柏努利方程

我们已经求得了实际流体沿流线的柏努利方程，可以用它来解决某些实际问题，但流线只是一种流动的抽象概念，实际上我们遇到的往往是过流断面具有有限大小的流动，我们称它为总流。因此，我们应将沿流线的柏努利方程推广到沿总流上去，将（4-38 a）式乘以 ρdQ，然后对整个总流断面积分，这样就获得总流的能量关系式

$$\int_Q\left(\frac{p_1}{\rho}+gz_1+\frac{u_1^2}{2}\right)\rho dQ=\int_Q\left(\frac{p_2}{\rho}+gz_2+\frac{u_2^2}{2}\right)\rho dQ+\int_Q gh_f'\rho dQ \qquad (4\text{-}39)$$

下面我们将对上式中各积分式进行讨论：

1）$\int_A\left(\frac{p}{\rho}+gz\right)\rho dQ$ 为单位时间内通过过流断面 A 的势能总和，这个积分不易求得，但如果我们把过流断面上的流动局限于缓变流动（见§3-4）范畴，并设流向基本上与 x 轴相符合（图4-8），则

$$u_x\neq 0,\quad u_y=u_z\approx 0$$

由N-S方程得

$$X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\nabla^2u_x=\frac{du_x}{dt}$$

$$Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}=0$$

$$Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=0$$

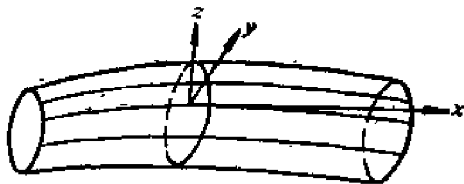


图4-8　缓变流动

上述N-S方程的第2及第3式与流体静力学的平衡方程相同，这说明缓变流时，yz 断面上各点保持流体静力学的规律，即 $gz+\frac{p}{\rho}=C$，所以在缓变流动条件下积分式

$$\int_Q\left(\frac{p}{\rho}+gz\right)\rho dQ=\left(\frac{p}{\rho}+gz\right)\rho\int_Q dQ=\left(\frac{p}{\rho}+gz\right)\rho Q \qquad (4\text{-}40)$$

2）$\int_Q\frac{u^2}{2}\rho dQ$ 为单位时间内通过断面 A 的流体动能，因为在断面上速度 u 是变量，如果用平均流速 v 来表示，则 $u=v+\Delta u$。因为流量 $Q=\int_A udA$，所以

$$Q=\int_A udA=\int_A(v+\Delta u)dA=v\int_A dA+\int\Delta udA=Q+\int\Delta udA$$

由此可知 $\int_A\Delta udA=0$，通过断面 A 的动能为

$$\int_A\frac{u^2}{2}\rho dQ=\frac{\rho}{2}\int_A u^3dA=\frac{\rho}{2}\int_A(v+\Delta u)^3dA$$

$$=\frac{\rho}{2}\left(\int_A v^3dA+3v^2\int_A\Delta udA+3v\int_A\Delta u^2dA+\int_A\Delta u^3dA\right)$$

因为断面 A 上的 Δu 有正有负，故 $\int_A\Delta u^3dA\approx 0$，由此得

$$\int_A \frac{u^2}{2}\rho dQ = \frac{\rho}{2}\left(v^3 A + 3v\int_A \Delta u^2 dA\right) = \frac{\rho}{2}\left(1 + \frac{3v\int_A \Delta u^2 dA}{v^3 A}\right)v^2 Q$$

或

$$\int_A \frac{u^2}{2}\rho dQ = \frac{\alpha v^2}{2}\rho Q \tag{4-41}$$

式中

$$\alpha = \left(1 + \frac{3\int_A \Delta u^2 dA}{v^2 A}\right)$$

系数 α 是断面上的实际动能与以平均流速计算的动能的比值，称为动能修正系数，它的值总是大于1，并与断面上流速分布有关，流速分布越不均匀，α 值越大，流速分布较均匀时 α 接近于1。

3）$\int_Q gh'_f\rho dQ$ 为单位时间内流体克服摩擦阻力作功而消耗的机械能，如果令 h_f 为 h'_f 的平均值，则

$$\int_Q gh'_f\rho dQ = gh_f\rho\int_Q dQ = gh_f\rho Q \tag{4-42}$$

将（4-40）至（4-42）式代入（4-39）式得

$$\left(\frac{p_1}{\rho} + gz_1\right)\rho Q + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2}\rho Q = \left(\frac{p_2}{\rho} + gz_2\right)\rho Q + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2}\rho Q + gh_f\rho Q$$

等号两边除以 ρQ 即得在重力场中实际不可压缩性流体恒定流动总流的柏努利方程

$$\frac{p_1}{\rho} + gz_1 + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + gz_2 + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2} + gh_f \tag{4-43}$$

在非恒定流动的情况下，应加入惯性项，因为

$$\int\frac{\partial u}{\partial t}ds\int_Q \rho dQ = \rho\int\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\int_A u^2 dA\right)ds = \rho\int\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\alpha_0}{2}v^2 A\right)ds = \rho Q\int\alpha_0\frac{\partial v}{\partial t}ds$$

则

$$\frac{p_1}{\rho} + gz_1 + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + gz_2 + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2} + gh_f + \int_1^2 \alpha_3\frac{\partial v}{\partial t}ds \tag{4-43 a}$$

上两式中任意过流断面上（流动为缓变流）的势能项 $\frac{p}{\rho} + gz$ 和动能项 $\frac{\alpha v^2}{2}$，在整个断面上都是常数，故可以任意选择断面上某点来写柏努利方程。

由于总流的柏努利方程仍是机械能守恒方程，我们可以用能量的观点把它拓广，当两个过流断面之间安装有流体机械（泵或马达）它将使通过机器的流体得到外加的功（泵）而增加机械能，或者流体对外界作功（马达）而失去部分机械能。设单位质量流体获得的能量为 W_s，失去的能量记为 $-W_s$，则机械能守恒方程为

$$\frac{p_1}{\rho} + gz_1 + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2} \pm W_s = \frac{p_2}{\rho} + gz_2 + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2} + gh_f \tag{4-44}$$

最后必须指出，在使用柏努利方程时，必需把计算断面选取在缓变流动上，但两断面间的流动并不必须为缓变流动。

§4-9 柏努利方程的应用

柏努利方程广泛用于流体工程技术部门，是流体力学中极为重要的方程，必须很好掌握，下面我们将阐述它的具体应用。

在流速为 v，压强为 p 的均匀流场中有一障碍物，流体到达障碍物的前缘点（驻点）2，受到障碍物的阻滞而滞止，流速由原来的 v 变为零，压强则增为 p_2，利用柏努利方程就可以确定驻点处的压强 p_2。在2点前方的同一流线上未受障碍物干扰处取一点1，列出1与2点的柏努利方程得

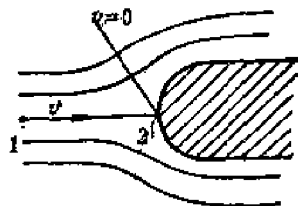


图4-9 速度滞止

$$p_1+\rho\frac{v_1^2}{2}+\rho g z_1=p_2+\rho\frac{v_2^2}{2}+\rho g z_2+\rho g h_f$$

因为 $z_1=z_2$，$v_2=0$，因流场为均匀，点1至2 $h_f\approx 0$，所以

$$p_2=p_1+\rho\frac{v_1^2}{2}$$

由于流体中动能转换为压能，所以驻点2的压强比流体原来的压强 p_1 为高，为了区别起见，我们称流体原来的压强 p_1 为静压强，由流速转换而增加部分 $\rho\frac{v_1^2}{2}$ 称为动压强，它们的总和称为总压强。

如果用一弯成直角的细管，称为毕托管，来代替障碍物，管端正对着流体的运动方向，当流体流进管中并在垂直管段中升至一定高度 h_2 后，管内流体呈近似静止状态，这时毕托管就相当于一障碍物。按流体静力学原理 h_2 可以度量弯管端（驻点）的总压强，即

$$\rho g h_2=p_2=p_1+\rho\frac{v_1^2}{2}$$

或
$$h_2=\frac{p_1}{\rho g}+\frac{v_1^2}{2g}$$

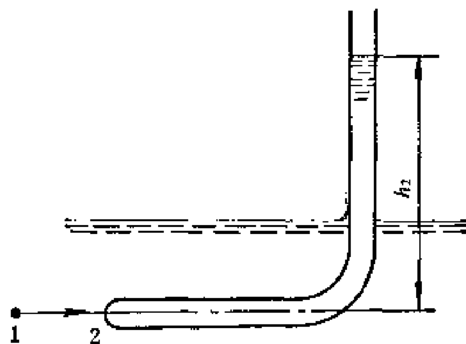


图4-10 毕托管

如果我们能测出流场中的静压强 p_1，量得 h_2 后就可求得流场中的 v_1。例如在管道中我们可以在管壁上开一小孔，并用U形差压计与毕托管相连接，如图4-11所示。U形差压计可测得 p_2 与 p_3 的压差，由流体静力学知 $p_A=p_B$，而

$$p_A=p_3+\rho_1 g m+\rho_2 g h$$

$$p_B=p_2+\rho_1 g(r+m+h)$$

所以
$$p_2-p_3=gh(\rho_2-\rho_1)-\rho_1 g r$$

因为管道中流线基本上是平行的，而且直管中流线曲率半径为无穷大，所以管道断面上 $p+\rho g z=C$，由此得 $p_1+\rho_1 g z_1=p_3+\rho_1 g z_3$，或 $p_3=p_1+\rho_1 g(z_1-z_3)=p_1+\rho g r$，代入上式得

$$p_2-p_1=gh(\rho_2-\rho_1)$$

由1至2的柏努利方程得

$$p_1+\rho_1 g z_1+\rho_1\frac{u_1^2}{2}=p_2+\rho_1 g z_2$$

因为 $z_1=z_2$，所以流速 u_1 为

$$u_1=\sqrt{\frac{2}{\rho_1}(p_2-p_1)}=\sqrt{2gh\frac{(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1}}$$

如果我们用同心套管做成同时可以测总压和静压的测速仪（毕托测速管），如图 4-12 所

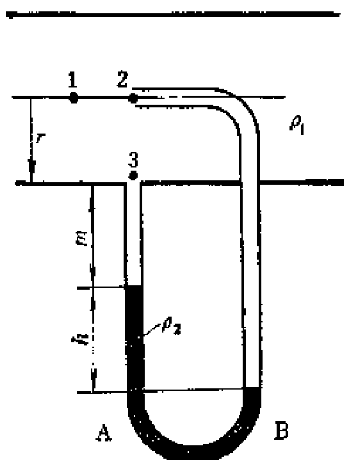


图4-11　毕托管测流速

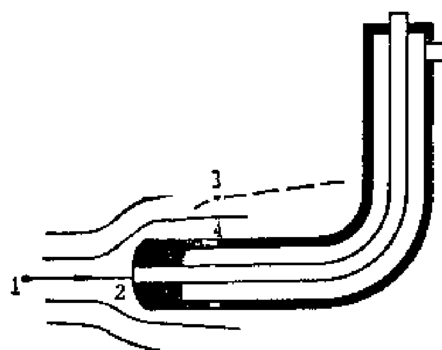


图4-12　毕托测速管

示。将测速管放在测试点 1 的附近，前缘 2 对正流速，使点 1 及 2 在同一流线上，因为 $u_2\approx 0$，所以由柏努利方程

$$p_1+\rho g z_1+\rho\frac{u_1^2}{2}=p_2+\rho g z_2$$

测速管并不能测得 p_1，但能测得 p_4，点 1 及点 4 即使在同一流线上，但由于点 4 是在附面层内，该处速度梯度极大，摩阻损失不能忽略，而 1 与 4 之间的摩阻损失我们并不知道。我们在测速管测压孔附近的附面层外边界处取点 3，由于附面层极薄 p_3 应该与 p_4 相等，又由于点 3 在附面层外边界上，所以 $u_3\approx u_1$，且点 1 和点 3 在势流区，由拉格朗日-柏努利方程可得

$$p_1+\rho g z_1=p_3+\rho g z_3=p_4+\rho g z_3$$

代入上列柏努利方程得

$$\rho\frac{u_1^2}{2}=p_2+\rho g z_2-(p_4+\rho g z_3)$$

因为测速管直径是很小的，所以 $z_2\approx z_3$，则

$$u_1=\sqrt{\frac{2}{\rho}(p_2-p_4)}=\sqrt{\frac{2}{\rho}\Delta p} \tag{4-45}$$

$p_2-p_4=\Delta p$，可用差压计测得。

为了测量管道中的流量，在管道中装置了叫做孔板流量计的仪器，这种测量流量的仪器包括一块有孔的薄板，安装在管道的法兰中，如果板上的孔径 d 小于管径 D，则流体通过孔口的流速将增大，根据柏努利方程，速度的变化将引起压强的变化，因此如果测出孔板前后的压差，就能计算速度和流量。列出 1 及 2（图4-13）的柏努利方程（注意：断面 1 及 2 的流动均属缓变流动！）

$$\frac{p_1}{\rho}+gz_1+\frac{\alpha_2 v_1^2}{2}=\frac{p_2}{\rho}+gz_2+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2}+gh_f$$

因为 $z_1=z_2$，如果暂不计能量损失 gh_f，且 α_1 与 α_2 均接近于1，再由连续性方程 $v_1=\frac{A_2}{A_1}v_2=\left(\frac{d}{D}\right)^2 v_2$，代入上式得

$$\frac{\Delta p}{\rho}=\frac{p_1-p_2}{\rho}=\frac{v_2^2}{2}\left[1-\left(\frac{d}{D}\right)^4\right]$$

或
$$v_2=\sqrt{\frac{2(p_1-p_2)}{\rho\left[1-\left(\frac{d}{D}\right)^4\right]}}=\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho\left[1-\left(\frac{d}{D}\right)^4\right]}}=\sqrt{\frac{2g\Delta h_p(\rho'-\rho)}{\left[1-\left(\frac{d}{D}\right)^4\right]\rho}}$$

理论流量为
$$Q_T=A_2v_2=A_2\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho\left[1-\left(\frac{d}{D}\right)^4\right]}}$$

由于液体通过孔板时有能量损失，而且由孔板流出的流股还要发生收缩，所以实际流量 Q 小于理论流量 Q_T，我们用下列通用形式来表示流量

$$Q=C_qA_2\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} \tag{4-46}$$

式中 C_q 为计及能量损失，出流流股收缩和 d/D 影响的流量系数，C_q 由试验测得，它随着孔板的结构和流体的流动状态而异，具体数据可查阅有关手册，通常对锐缘的孔板流量计，当 $A_2/A_1\leqslant 0.2$ 时，C_q 约为 0.60～0.62。

液流经过孔板流量计时，孔板对液流引起较大的阻力，因此使液流产生了一定的能量损失，具体表现在孔板以后较远处流速虽已恢复，但压强却不能很好恢复。为了改善这个现象，我们可用二个圆锥管组成的文丘利流量计，如图 4-14 所示。它的测量流量的原理和具体计算方法，完全与孔板流量计相同，但由于减小了阻力，液流通过文丘利流量计后，压降很小，流量系数也可达 0.98 左右。

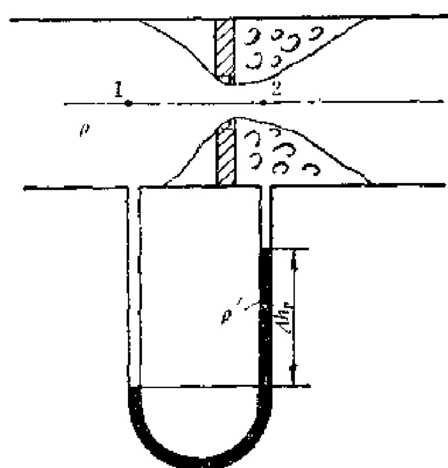


图4-13　孔板流量计

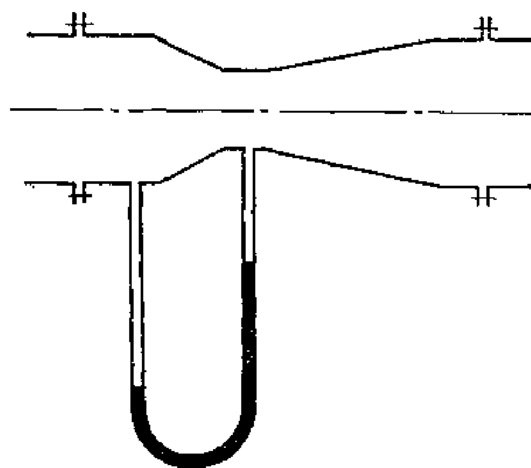


图4-14　文丘利流量计

又如射流泵装置的计算，也可利用柏努利方程来解决。射流泵是由一个收缩的喷管和另一个具有细颈的收缩扩散管及真空室所组成（图4-15），自喷管射出的液流经收缩扩散管的细颈处，流速急剧增大，结果使该处的压强小于大气压而造成真空，如果在该处连一管道通

至有流体的容器，则流体就能被吸入泵内，与射流液体一起流出。

例4-1 某设备要求用射流泵产生真空为200 mmHg，设 $H_2=1.5\,m$（图4-15），管径 $d=75mm$，喷管直径 $d_n=50mm$，求 H_1。

解 要求射流泵产生的真空用水柱表示为 $(p_a-p_{vac})/\rho g=0.2\times13.6=2.72\ mH_2O$

对真空室（断面1-1）及出水管出口（断面2-2）列柏努利方程，设暂不计能头损失，则

$$\frac{p_{vac}}{\rho g}+\frac{v_1^2}{2g}=H_2+\frac{p_a}{\rho g}+\frac{v_2^2}{2g}$$

根据连续性方程 $v_2=v_n\left(\frac{A_n}{A_2}\right)$，所以

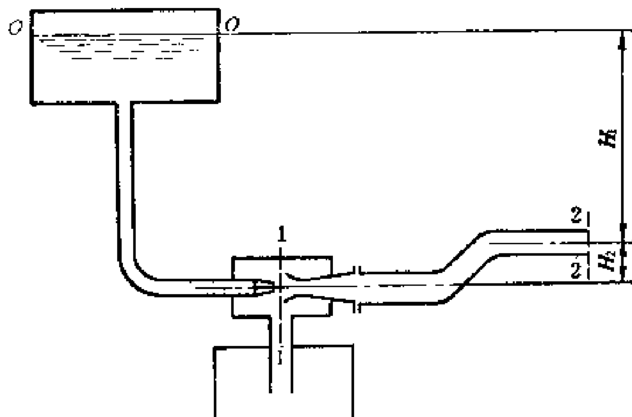


图4-15 射流泵装置

$$v_2^2=v_n^2\left(\frac{A_n}{A_2}\right)^2=v_n^2\left(\frac{d_n}{d}\right)^4=\left(\frac{50}{75}\right)^4v_n^2=0.198v_n^2$$

代入柏努利方程得

$$\frac{v_n^2}{2g}(1-0.198)=H_2+\frac{p_a-p_{vac}}{\rho g}=1.5+2.72=4.22\ mH_2O$$

或
$$\frac{v_n^2}{2g}=5.26mH_2O$$

列出断面0-0至真空室断面1-1的柏努利方程：

$$\frac{p_a}{\rho g}+H_1+H_2=\frac{p_{vac}}{\rho g}+\frac{v_n^2}{2g}$$

所以
$$H_1=\frac{v_n^2}{2g}-\left(\frac{p_a-p_{vac}}{\rho g}\right)-H_2=5.26-2.72-1.5=1.04\,m$$

上述计算中没有计入管道中的能量损失，所以实际上要用射流泵来产生上述真空，水箱应放得更高些。

液体从容器中出流的问题也可借助柏努利方程进行计算。

例4-2 一水塔储水深度由水位调节器控制为4 m，水通过一直径为75 mm长为20 m的垂直管自由出流，出流管嘴为60 mm（直径），求管嘴出口流速，管中水流速度，管道进口及中点处的静压，并画出压强分布曲线。

解 已知 $h=4\ m$，$h_1=20\,m$，$h_2=10\,m$，$h_3=0.1\,m$，$d_4=60mm$，$d_1=d_2=d_3=75\ mm$

列出0-0至4-4的柏努利方程，因为 p_0 及 p_4 均为大气压强，即 $p_0=p_4=0$，不计能量损失，并设 $\alpha_0\approx\alpha_4\approx1$，则

$$\frac{\alpha_0v_0^2}{2g}+z_0=\frac{\alpha_4v_4^2}{2g}+z_4$$

或
$$\frac{v_4^2}{2g}=(z_0-z_4)+\frac{v_0^2}{2g}$$

因为0-0断面较大，v_0 是很小的，$\frac{v_0^2}{2g}$ 与 z_0-z_4 比较起来可以忽略不计，由此得管嘴出

流速度为

$$v_4=\sqrt{2g(z_0-z_4)}=\sqrt{19.6\times24}=21.68\,m/s$$

管中水流速度则为

$$v_1=v_2=v_4\left(\frac{d_4}{d_2}\right)^2=21.68\left(\frac{60}{75}\right)^2=13.9\,m/s$$

列出 0-0 至 1-1 断面的柏努利方程

$$\frac{p_0}{\rho g}+z_0+\frac{\alpha_0 v_0^2}{2g}=\frac{p_1}{\rho g}+z_1+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}$$

设 $\alpha_0\approx\alpha_1\approx1$，则管道进口处的压强为

$$\frac{p_1}{\rho g}=z_0-z_1-\frac{v_1^2}{2g}=4-\frac{(13.9)^2}{19.6}=-5.86\ mH_2O$$

即
$$p_1=-5.86\times9.8\times1000=-5.75\times10^4Pa=-0.575\ bar$$

列出 0-0 至 2-2 断面的柏努利方程得

$$\frac{p_0}{\rho g}+z_0+\frac{\alpha_0 v_0^2}{2g}=\frac{p_2}{\rho g}+z_2+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}$$

设 $\alpha_0\approx\alpha_2\approx1$，则管道中点的压强为

$$\frac{p_2}{\rho g}=(z_0-z_2)-\frac{v_2^2}{2g}=14-\frac{(13.9)^2}{19.6}=4.1\ mH_2O$$

即
$$p_2=4.1\times9.8\times1000=4.06\times10^4Pa=0.406\ bar$$

同样方法可求得管嘴进口处压强为

$$\frac{p_3}{\rho g}=(z_0-z_3)-\frac{v_3^2}{2g}=23.9-\frac{(13.9)^2}{19.6}=14.04\ mH_2O$$

或
$$p_3=1.37\ bar$$

压强分布如图 4-16 所示，压强从水面的零值增大至水箱底部为 $4\times9.8\times10^{-2}=0.392$ bar，在水管进口处又突然降落为 -0.575 bar，在管道内按直线分布规律逐渐增加到管嘴进口处为 1.37 bar，以后又逐渐降低至管嘴出口处为零值。

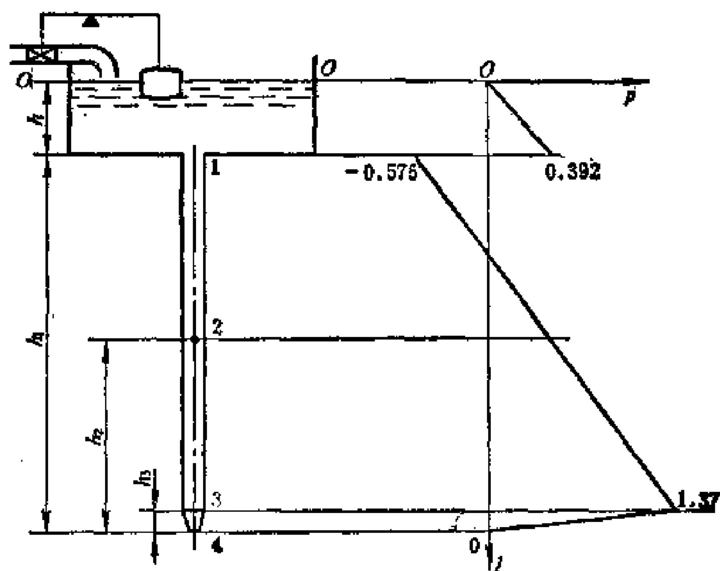


图4-16　例4-2

扩大管嘴出流口径，管中水流速度增大，管道进口压强 p_1 进一步减小，如果 p_1 降到水在该环境温度时的汽化压强，则管道进口处水流将产生汽泡，使水流断裂，这种现象称为汽穴。汽穴还将引起噪声、振动和损坏壁面。

水在 20 ℃时的汽化压强为 0.24 mH_2O 绝对，即 $0.24-10.33=-10.09\ mH_2O$ 真空，所以不发生汽穴现象的管道进口最大流速 v_{max} 为

$$\left(\frac{p_1}{\rho g}\right)_v = z_0 - z_1 - \frac{v_{1max}}{2g}$$

或
$$\frac{v_{1max}^2}{2g} = z_0 - z_1 - \left(\frac{p_1}{\rho g}\right)_v = 4 + 10.09 = 14.09$$

$$v_{1max} = \sqrt{19.6 \times 14.09} = 16.6 \text{m/s}$$

由此可计算出管嘴的最大口径 d_{4max} 为

$$d_{4max} = d_1\left(\frac{v_{1max}}{v_4}\right)^{\frac{1}{2}} = 75\left(\frac{16.6}{21.68}\right)^{\frac{1}{2}} = 65.6 \text{ mm}$$

再如泵的吸液过程，也可运用柏努利方程来说明。如图 4-17 所示，列出液面(1-1断面)至泵进口处（2-2断面）的柏努利方程

$$\frac{p_a}{\rho} + gz_0 + \frac{v_0^2}{2} = \frac{p_1}{\rho} + gz_1 + \frac{v_1^2}{2} + gh_f$$

或
$$\frac{p_a - p_2}{\rho} = g(z_1 - z_0) + \frac{v_1^2 - v_0^2}{2} + gh_f$$

因为 $z_1 - z_0 = h$，v_0 与 v_2 比较起来是小量，所以 $\frac{v_1^2 - v_0^2}{2} \approx \frac{v_1^2}{2}$，则

$$\frac{p_a - p_1}{\rho g} = h + \frac{v_1^2}{2g} + h_f$$

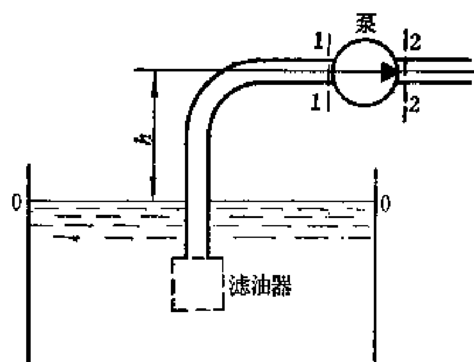


图4-17 泵的吸液

因为 p_2 是泵进口的绝对压强，所以 $p_a - p_1$ 是泵进口的真空度，而 $\frac{p_a - p_1}{\rho g}$ 为用液柱表示的真空度。由此可见，泵进口处的真空度是由三部分造成：安装高度 h，进口动能 $\frac{v_1^2}{2g}$ 和吸入管内的能量损失 h_f。因为动能 $\frac{v_1^2}{2g}$ 和能量损失 h_f 总是正值，如果泵安装在液面之上，那末 h 也是正值，这样，泵的进口处必定造成真空。液体的吸入实际上是靠液面的大气压强压进去的。如果泵安装在液面之下，那末 h 为负值，当 $|h| > \frac{v_1^2}{2g} + h_f$ 时，泵的进口处可以没有真空度，液体是倒灌进去的。

如果泵的进口处真空度太大，即压强 p_2 太低，一旦低于液体在该温度下的空气分离压，空气就要析出，使泵和输液系统的正常工作受到干扰，如果压强 p_1 低于汽化压 p_v 时，就要产生汽穴现象。为了使泵的正常工作不受破坏，泵进口处真空度不应过大。由于 v_2 是与泵的进口尺寸有关，对于一个具体的泵，例如定量液压泵 v_2 基本上是定值，我们只能尽可能减小 h_f 和 h，必要时甚至可以采用负的 h 值，即把泵装在液面以下。减小 h_f 的措施是使吸入管尽可能短些，直径大些，滤油器上能量损失尽可能小些。

某些工程实际问题是流体流经某一机器，流体或者吸收了能量（例如流经泵、压气机、通风机等），或者放出了能量（例如通过液压马达，空气马达，涡轮机等）。这类问题可用拓广了的柏努利方程来计算，例如油液通过一液压泵，设泵的进口取为 1-1 断面，排液口取为 2-2断面(图4-17)，列出柏努利方程

$$\frac{p_1}{\rho} + gz_1 + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2} + W_t = \frac{p_2}{\rho} + gz_2 + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2} + gh_f$$

由此得单位质量油液通过该泵时必须供给的能量 W_t 为

$$W_s=\frac{p_2-p_1}{\rho}+g\ (z_2-z_1)+\frac{\alpha_2 v_2^2-\alpha_1 v_1^2}{2}+gh_f$$

对于液压泵来说，等号右边第一项$\frac{p_2-p_1}{\rho}$是较大的，而$g\ (z_2-z_1)$及$\frac{\alpha_2 v_2^2-\alpha_1 v_1^2}{2}$与它比较起来就可忽略不计，因此$W_s=\frac{p_2-p_1}{\rho}+gh_f$，这里$gh_f$是能量损失，如果我们暂时不计该项，则

$$W_s=\frac{p_2-p_1}{\rho}=\frac{\Delta p}{\rho}$$

如果每秒通过该泵的油液质量为ρQ，则油液获得的理论功率为$\rho QW_s=Q\Delta p$，设Q以m^3/s计，Δp以Pa为单位，则理论功率N_T为

$$N_T=\frac{Q\Delta p}{1000}\text{kW}$$

在液压技术中，流量常以 l /min(升每分)计，压差常以 bar 计，则功率N_T为

$$N_T=\frac{Q\Delta p\times10^5}{60\times10^3\times10^3}=\frac{Q\Delta p}{600}\text{kW}$$

这是油液通过该泵所获得的功率，由于能量损失gh_f的存在，我们所供给的功率应大一些，而且除了流体运动过程中产生的能量损失gh_f外，尚有泄漏，机械摩擦等损失，所以泵实际所需的功率为

$$N=\frac{Q\Delta p}{600\eta}\text{kW} \tag{4-47}$$

式中η为考虑全部能量损失的系数，称为效率。

在液压领域中，不仅要计算功率，也常常碰到如何合理使用功率的问题。例如某压机快速下行时压强$p=10$ bar，流量$Q=138$ l/min；当加压慢速送进时$p=300$ bar，$Q=18$ l/min，这时如果只采用一只液压泵供液，那末，该泵的流量应为$Q=138$ l/min，而压强应满足加压送进时的$p=300$ bar。溢流阀也只能调定为300 bar。在加压时实际用油液的流量$Q=18$ l/min，即从溢流阀排走流量为120 l/min。设泵和电机的效率为0.8，那末所需总功率N为

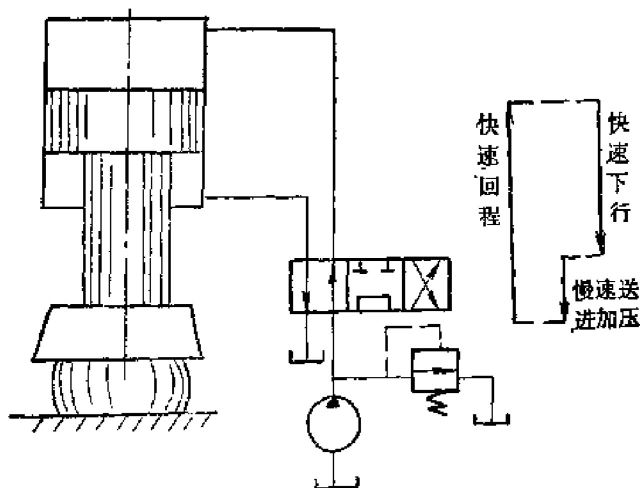


图4-18　不合理的压机系统

$$N=\frac{pQ}{600\eta}=\frac{300\times138}{600\times0.8}=86\ \text{kW}$$

从溢流阀排走的油液的无用功率N_w为

$$N_w=\frac{300\times120}{600\times0.8}=75\ \text{kW}$$

用以加工的有效功率N_e为

$$N_e=N-N_w=86-75=11\text{kW}$$

因此，采用一台液压泵的方案有以下的缺点：

1. 液压泵，电动机功率大，尺寸大，价格高；
2. 溢流阀流量大，压强高，尺寸大，价格高；
3. 浪费大量电能；
4. 大量能量从溢流阀排走，使油温升高，油液易于变质。

为了克服这些缺点，可采用高低压双泵系统，如图 4-19 所示，高压溢流阀 1 调定在300 bar，当加压时高压泵功率为$\frac{18\times300}{600\times0.8}=11.2\text{kW}$。此时低压溢流阀 2 作卸荷阀用，使低压泵在很低的压强下卸荷，如果这时的排油压强为 3 bar，则低压泵所耗功率仅$\frac{3\times120}{600\times0.8}=0.75\text{kW}$，全部功率为$11.2+0.75=11.95\text{ kW}$。

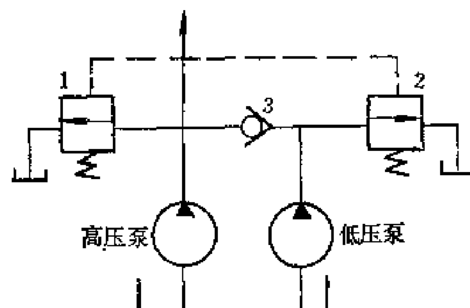


图4-19　高低压双泵系统

当压机快速下行时，单向阀 3 打开，双泵联合供油，设供油压强为 8 bar，则所需功率仅$\frac{8\times138}{600\times0.8}=2.3\text{ kW}$。当快速回程时压强比快速下行为高，设低压溢流阀 2 调定在 15 bar，则双泵联合供油总功率为$\frac{15\times138}{600\times0.8}=4.3\text{ kW}$。

这样，采用 300 bar，18 l/min 的高压泵，15 bar，120 l/min 的低压泵组成的双泵系统时，最大功率仅为 11.95 kW≈12 kW。这样的方案比采用单泵合理得多。

最后，我们举一个非恒定流柏努利方程应用的例子，一水库的输水系统，如果管道长为 l、水头为H（图 4-20 a），当阀门A突然开启，由于惯性的缘故，管内流速是由 0 逐渐增大至某恒定值（设出流不影响水位降低），试求起动过程中管内流速随时间的增长规律。如果我们不计管路的能量损失，则由非恒定流柏努利方程（4-43 a）式得

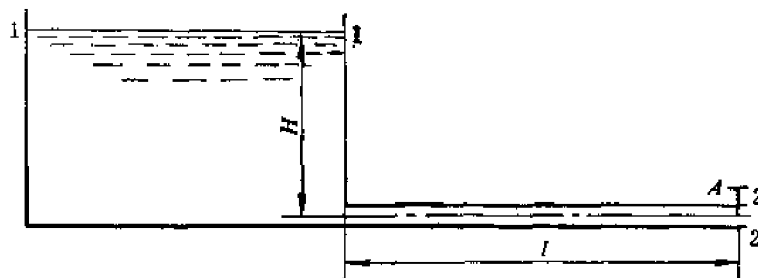


图4-20 a　水库输水系统示意

$$\frac{p_1}{\rho}+\frac{v_1^2}{2}+gz_1=\frac{p_2}{\rho}+\frac{v_2^2}{2}+gz_2+\int_1^2\frac{\partial v}{\partial t}ds$$

因为断面 1-1 及 2-2 均与大气接触，所以 $p_1=p_2=p_a$，而 $v_1\approx0$，$v_2=v$，$z_1-z_2=H$，因此上式为

$$gH=\frac{v^2}{2}+\int_1^2\frac{\partial v}{\partial t}ds$$

由于水库内流速很小，因此流速变化微不足道，即水库流体运动的惯性项可以忽略，我们近似地只考虑输水管内的惯性项，而且由于管道是等断面的，则 $v=v(t)$，因此$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{dv}{dt}$且$\frac{dv}{dt}$不随 s 而变，则惯性项为

$$\int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds = \int_0^l \frac{dv}{dt} ds = l \frac{dv}{dt}$$

由此得

$$gH = \frac{v^2}{2} + l \frac{dv}{dt}$$

分离变量后得

$$\frac{dt}{2l} = \frac{dv}{2gH - v^2}$$

从 $t = 0$，$v = 0$ 积分至 $t = t$，$v = v$ 则

$$\frac{t}{2l} = \int_0^v \frac{dv}{2gH - v^2} = \left[\frac{1}{\sqrt{2gH}} \text{Arth} \left(\frac{v}{\sqrt{2gH}}\right)\right]_0^v$$

因为 Arth(0) = 0 所以

$$\frac{t}{2l} = \frac{1}{\sqrt{2gH}} \text{Arth}\left(\frac{v}{\sqrt{2gH}}\right)$$

或

$$v = \sqrt{2gH}\,\text{th}\left(\frac{t}{2l}\sqrt{2gH}\right)$$

如果 $H = 3$ m，$l = 6$ m 则 $\sqrt{2gH} = \sqrt{19.6\times 3} = 7.67$ m/s，$\frac{t}{2l}\sqrt{2gH} = \frac{t}{12}\times 7.67 = 0.639\,t$ 则

$$v = 7.67\text{th}(0.639\,t)$$

起动过程中速度增长规律如图 4-20 b)所示。

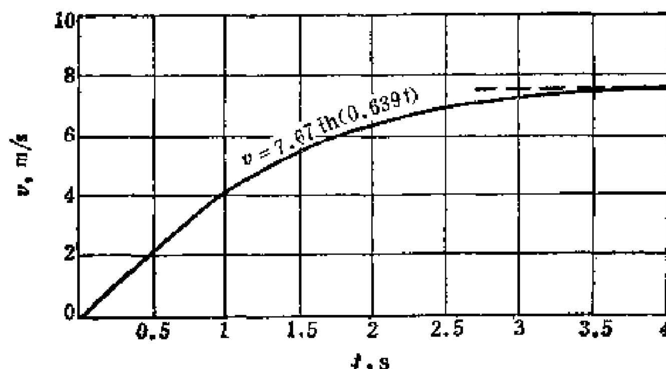


图4-20 b　起动过程曲线

§4-10　动 量 定 理

欧拉运动方程或N－S方程是描述流体质点运动规律的方程，但实际的流体工程问题往往要求知道由界面包围的流体质点系统的运动规律。原则上质点系统的运动规律可以由质点运动规律积分求得，但欧拉方程只适用于理想流体，N－S方程求解困难，所以要采用另外的办法。

物体质量 m 和运动速度 u 的乘积叫做动量 M，根据牛顿运动定律，物体受到外力 F 的作用必然产生加速度，物体速度 u 就要改变，因此物体的动量也必然发生改变

$$\Sigma \boldsymbol{F}=m\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}=\frac{dm\boldsymbol{u}}{dt}$$

即作用于物体的外力 $\Sigma\boldsymbol{F}$ 等于该物体在力的作用方向上的动量改变率，称为动量定理，用动量定理来计算流体质点系统与接触它的界面之间的相互作用是比较方便的。

现在让我们利用控制体积法来研究流体质点系统。在时间 t 时，这部分流体占有控制体积 $V_t=V_{cv}$ 的空间，在稍后的时间 $t+\Delta t$，这个流体质点系统将占有空间 $V_{t+\Delta t}$，一部分流体将从控制体积 V_{cv}（图 4-21 的实线所围的体积）中流出，另一些流体则流入了控制体积 V_{cv} 以取代已流出的流体。在 Δt 时间内从 V_{cv} 内流出的流体动量为 $(m\boldsymbol{u})_o$，而在 Δt 时间内流入 V_{cv} 的新流体的动量为 $(m\boldsymbol{u})_i$，控制体积 V_{cv} 内所有流体在任何瞬时的动量为 $(m\boldsymbol{u})_{cv}$，而质点系统在任何瞬时的动量为 $(m\boldsymbol{u})_{sys}$，则质点系统最初和最终的动量分别为：

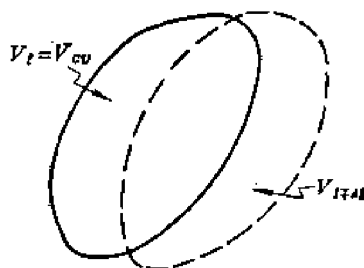


图4-21　控制体积法

$$[(m\boldsymbol{u})_t]_{sys}=[(m\boldsymbol{u})_t]_{cv}$$

$$[(m\boldsymbol{u})_{t+\Delta t}]_{sys}=[(m\boldsymbol{u})_{t+\Delta t}]_{cv}-(m\boldsymbol{u})_i+(m\boldsymbol{u})_o$$

由此得

$$\Sigma\boldsymbol{F}=\frac{\Delta(m\boldsymbol{u})}{\Delta t}=\frac{[(m\boldsymbol{u})_{t+\Delta t}]_{sys}-[(m\boldsymbol{u})_t]_{sys}}{\Delta t}$$

$$=\frac{[(m\boldsymbol{u})_{t+\Delta t}]_{cv}-[(m\boldsymbol{u})_t]_{cv}}{\Delta t}+\frac{(m\boldsymbol{u})_o-(m\boldsymbol{u})_i}{\Delta t}$$

当 Δt 趋于零为极限，则

$$\Sigma\boldsymbol{F}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta(m\boldsymbol{u})}{\Delta t}=\frac{d\,(m\boldsymbol{u})_{sys}}{dt}$$

$$=\frac{d\,(m\boldsymbol{u})_{cv}}{dt}+\left[\frac{(m\boldsymbol{u})_o}{dt}-\frac{(m\boldsymbol{u})_i}{dt}\right] \tag{4-48}$$

这就是说流体质点系统的动量变化率可用二部分来表达：控制体积内流体动量的变化率 $d\,(m\boldsymbol{u})_{cv}/dt$，以及流出控制表面和流入控制表面的动量差 $[(m\boldsymbol{u})_o/dt]-[(m\boldsymbol{u})_i/dt]$，也就是流出控制表面的净变化率。前者是在同一地点（控制体积）内由于时间变化而产生的力，称为瞬态力 $\boldsymbol{F}_t$，后者由于质点所处的空间变化而产生的力，叫做稳态力 $\boldsymbol{F}_s$。瞬态力与控制体积相联系，而稳态力则与控制表面有关。设在微小控制表面 dA 上的流速矢量为 $\boldsymbol{u}$（图4-22），它的法向分量为 u_n，则通过该 dA 的流量 $dQ=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}dA=u_ndA$。在 dt 时间内流出控制表面 A 的动量净变化率即稳态力 $\boldsymbol{F}_s$ 为

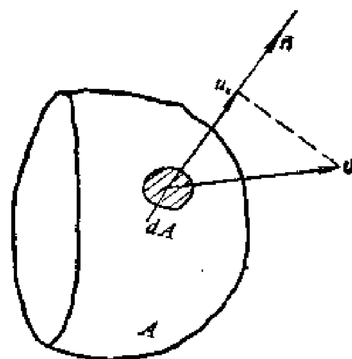


图4-22　控制表面

$$\boldsymbol{F}_s=\frac{(m\boldsymbol{u})_o-(m\boldsymbol{u})_i}{dt}=\int_A \boldsymbol{u}\rho u_n dA=\int_A \boldsymbol{u}\rho dQ \tag{4-49}$$

由此得作用力 $\Sigma\boldsymbol{F}$ 为

$$\Sigma F = F_i + F_s = \frac{d(mu)_{cv}}{dt} + \int_A u\rho dQ \tag{4-50}$$

上述讨论是设控制体积静止不动的，但某些工程问题中控制体积本身也是运动的，例如滑阀开启或关闭过程，火箭上升过程等。设控制体积的运动速度为 u_c，流体对控制体积或控制表面的相对运动速度为 u_r，则流体的绝对运动速度 u 为

$$u = u_c + u_r$$

则作用力 $\Sigma F'$ 为

$$\Sigma F' = F_i + F_s = \frac{d}{dt}[m(u_c + u_r)]_{cv} + \int_A (u_c + u_r)\rho dQ$$

$$= \frac{d(mu_c)_{cv}}{dt} + \frac{d(mu_r)_{cv}}{dt} + \int_A u_c \rho dQ + \int_A u_r \rho dQ$$

因为控制体积的运动速度是一个独立变数，且与控制表面无关，因此上式中右边第一项可展开为：

$$\frac{d(mu_c)_{cv}}{dt} = u_c \frac{dm_{cv}}{dt} + m_{cv}\frac{du_c}{dt}$$

第三项则为：

$$\int_A u_c \rho dQ = u_c \int_A \rho dQ$$

因此

$$\Sigma F' = m_{cv}\frac{du_c}{dt} + \frac{d(mu_r)_{cv}}{dt} + u_c\left(\frac{dm_{cv}}{dt} + \int_A \rho dQ\right) + \int_A u_r \rho dQ$$

上式中括号内第一项为控制体积内质量的改变率，第二项为流出该控制体积的质量净变化率，根据质量守恒定律，它们的和应为零，所以

$$\Sigma F' = m_{cv}\frac{du_c}{dt} + \frac{d(mu_r)_{cv}}{dt} + \int_A u_r \rho dQ$$

必须指出，在运动控制体积情况下，组成控制体积的运动固体也产生动量改变，所以外力不仅使流体改变动量，也要使固体改变动量。因此，使流体发生动量改变的力仅为 $\Sigma F' = \Sigma F - m_R \frac{du_c}{dt}$，这里 m_R 为组成控制体积的运动固体的质量。由此得

$$\Sigma F = (m_R + m_{cv})\frac{du_c}{dt} + \frac{d(mu_r)_{cv}}{dt} + \int_A u_r \rho dQ \tag{4-51}$$

§4-11 动量定理的应用

在流体工程中，往往要计算流体对固体的相互作用力。这类问题理论上可用能量方程求出流体与固体界面上的压强分布，用积分方法求解。但这种方法不仅十分复杂，在某些情况下甚至不能求得压强分布而无法求解。如果利用动量定理，则能很容易地求得结果，所以我们必需掌握动量定理的应用。

我们先讨论恒定流动的情况，这时 $\frac{du_c}{dt} = 0$ $\frac{d(mu_r)_{cv}}{dt} = 0$，即动量改变只产生稳态力 F，

$$F_s = \Sigma F = \int_A u\rho dQ$$

为了计算方便，我们常沿流道的壁面取控制体积，而使进出流速与进出断面 1-1 和 2-2（图 4-23）的法线方向相符，由于断面上流速 u 的分布往往是不均匀的，如果用平均流速 v 代替断面实际流速，与动能相似要进行修正，则稳态力为

$$F_s = \int_A u\rho dQ = \beta_2\rho_2 Q_2 v_2 - \beta_1\rho_1 Q_1 v_1$$

式中 $\beta = \frac{1}{A}\int_A\left(\frac{u}{v}\right)^2 dA$，称为动量修正系数，它的值随断面流速分布不均匀程度而异，层流时可达 4/3；紊流时约为 1.03～1.05，通常在计算中把它简略地作为 1。由连续性方程 $\rho_1 Q_1 = \rho_2 Q_2 = \rho Q$，则

$$F_s = \rho Q(v_2 - v_1) \tag{4-52}$$

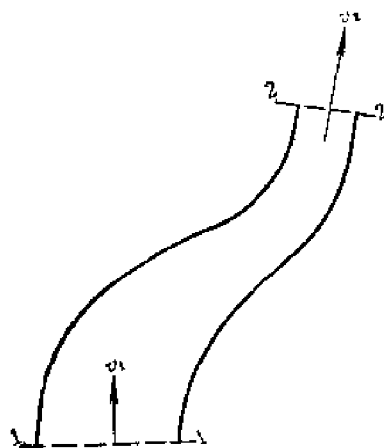


图4-23 沿流道取控制体积

下面我们将举几个流体与固体相互作用的计算稳态力的例子，计算的是固体对流体的作用力，流体对固体的作用力则大小相等方向相反。

1. 射流与挡板的作用力

划出控制体积 $abcdef$，则断面 ab、cd、ef 上均为大气压强（图 4-24），设挡板对射流的作用力为 F，由动量定理得

$$p_1A_1 - F = \Sigma F = \rho Q(0 - v_1)$$
$$= -\rho Q v_1$$

因为 p_1 为大气压强，即 $p_1 = 0$，所以

$$F = \rho Q v_1$$

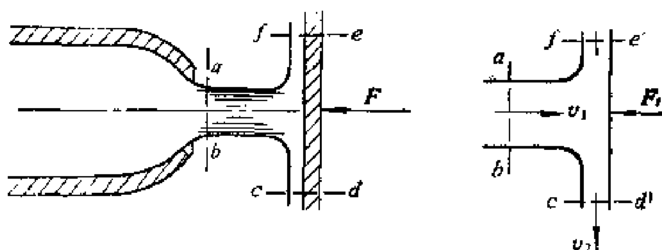


图4-24 射流对挡板的作用

2. 弯管

如图 4-25 所示，划出控制体积 $abcd$，设弯管壁面对液体的作用力为 F_x 及 F_z，根据动量定理得

$$p_1A_1 - F_x - p_2A_2\cos\theta = \Sigma F_x = \rho Q(v_2\cos\theta - v_1)$$

及

$$-p_2A_2\sin\theta + F_z = \Sigma F_z = \rho Q(v_2\sin\theta - 0)$$

由此得

$$F_x = p_1A_1 - p_2A_2\cos\theta - \rho Q(v_2\cos\theta - v_1)$$
$$= \rho Q(v_2\sin\theta) + p_2A_2\sin\theta$$

3. 流道突然扩大的能量损失

流道发生突然扩大时，由于流线不能转折，因此流道虽然突然扩大，但运动的主流却只能逐渐扩大，而在流道突然扩大处形成旋涡区(图 4-26)。在 1-1 断面处，主流部分是缓变流动，旋涡区内由于流体质点的混杂运动，压强也只能按静压分布，因此在 1-1 断面上可以认为作用着 p_1A_2 的压力，沿扩大的流道壁面和 1-1 及 2-2 断面取控制体积 $abcd$，由于控制体积的 1-1 和 2-2 断面间距离较小，略去流体和壁面的剪切力，根据动量定理得

$$p_1A_2 - p_2A_2 = \Sigma F = \rho Q(\beta_2 v_2 - \beta_1 v_1)$$

或

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho} = \frac{Q}{A_2}(\beta_2 v_2 - \beta_1 v_1) = v_2(\beta_2 v_2 - \beta_1 v_1)$$

再列出 1-1 及 2-2 断面的柏努利方程

$$\frac{p_1}{\rho}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2}=\frac{p_2}{\rho}+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2}+gh_f$$

则
$$gh_f=\frac{p_1-p_2}{\rho}+\frac{\alpha_1 v_1^2-\alpha_2 v_2^2}{2}=\beta_2 v_2^2-\beta_1 v_1 v_2+\frac{\alpha_1 v_1^2-\alpha_2 v_2^2}{2}$$

或突然扩大的能头损失 h_f 为

$$h_f=\frac{\alpha_1 v_1^2-2\beta_1 v_1 v_2+(2\beta_2-\alpha_2)v_2^2}{2g} \tag{4-53}$$

当 $\alpha_1\approx\alpha_2\approx 1$，$\beta_1\approx\beta_2\approx 1$ 时

$$h_f=\frac{v_1^2-2v_1v_2+v_2^2}{2g}=\frac{(v_1-v_2)^2}{2g}$$

上面我们研究了控制体积固定不动的恒定流情况时动量定理的应用，下面我们将阐述控制体积具有速度 u_c 时的动量定理的应用。我们先以火箭为例，予以说明。

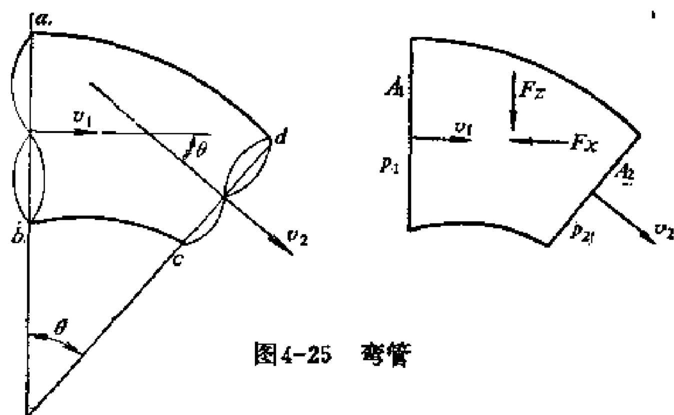


图4-25 弯管

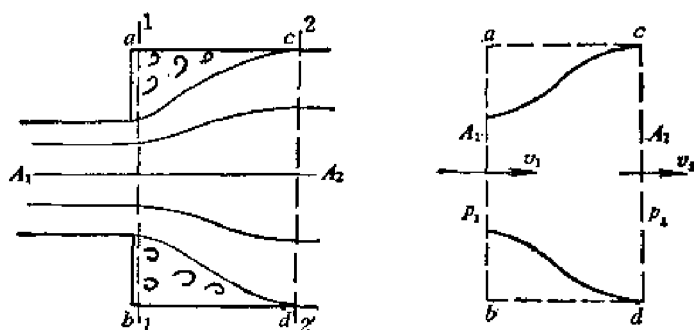


图4-26 流道突然扩大

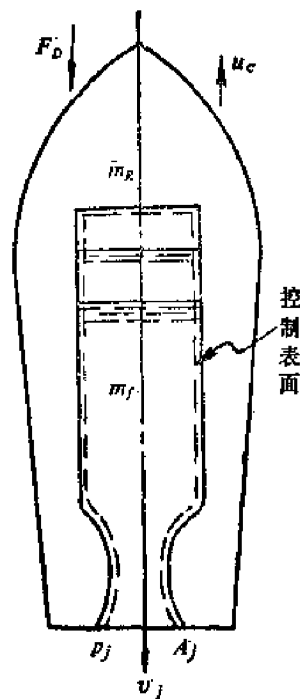


图4-27 火箭

壳体质量为 m_R 的火箭，内储质量为 m_f 的液体燃料，沿火箭内腔和喷管出口断面取控制体积，由（4-51）式

$$\Sigma F=(m_R+m_{cv})\frac{du_c}{dt}+\frac{d(mu_r)_{cv}}{dt}+\int_A u_r\rho dQ$$

我们对上式逐项加以讨论：等号左边的 ΣF 项为控制体积所受的外力，有些力是通过火箭壳体而作用于控制体积的，它们是火箭壳体重量 $m_R g$ 和空气阻力 F_D。此外，尚有液体燃料的重量 $m_f g$ 和喷管出口断面上的压力 $(p_j-p_a)A_j$，由此得

$$\Sigma F = -(m_R + m_f)g + (p_j - p_a)A_j - F_D$$

(4-51) 式等号右边第一项为控制体积内质量 m_f 和组成控制体积的运动固体，也就是火箭壳体质量 m_R 与加速度 $\frac{d\boldsymbol{u}_c}{dt}$ 的乘积，是惯性力。第二项为控制体积内动量变化率。我们知道，控制体积内质量包括储存燃料及燃烧气体，前者的相对速度为零，燃烧气体虽对控制体积有相对速度，但它的质量却很小，因此第二项与第一项比较起来可以忽略不计，即 $\frac{d(m\boldsymbol{u}_r)_{cv}}{dt} \approx 0$。第三项为流出控制表面的动量净变化率，对于火箭来讲，它只有燃烧气体从喷管以高速 $\boldsymbol{v}_j$ 出流，所以

$$\int \boldsymbol{u}_r \rho dQ = -\rho Q_j \boldsymbol{v}_j = -\dot{m}_f \boldsymbol{v}_j$$

式中 $\dot{m}_f = \frac{dm_f}{dt}$ 为燃料的质量流量，$\boldsymbol{v}_j$ 为喷气速度，代入 (4-51) 式并整理之，得火箭的运动方程为

$$[\dot{m}_f v_j + (p_j - p_a)A_j] - [(m_R + m_f)g + F_D] = (m_R + m_f)\frac{du_c}{dt} \tag{4-54}$$

式中第一个方括号表示火箭的推力，第二个方括号则为火箭的阻力，它们的差就使火箭产生加速度 $\frac{d\boldsymbol{u}_c}{dt}$。

滑阀是液压技术中应用十分广泛的元件，现在让我们用动量定理来研究滑阀上的力学问题。

图 4-28 a) 所示为一四边滑阀，b) 及 c) 为滑阀的一个阀腔内进出油液的情况，由于阀的开度 x 一般都较小，即在 ab 处的面积要比 cd 处小得多，因此 cd 处的流速 v' 与 ab 处形

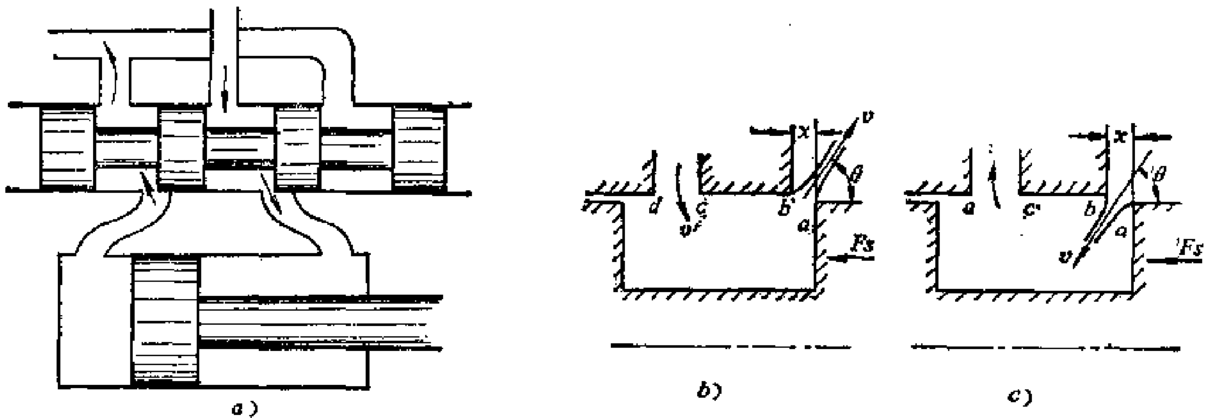


图4-28 滑阀稳态力计算

成的射流速度 v 相比，就可以忽略不计，由动量定理可求得油液流入或流出阀腔时产生的轴向稳态力 F_s 为

$$F_s = \rho Q v \cos\theta \tag{4-55}$$

由柏努利方程，阀口的流速 v 为

$$v = C_v \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}$$

式中 Δp 为阀口处的压降，C_v 为考虑阀口能量损失的系数，称为流速系数，一般为 0.96～0.99。

设阀口开度为 x，阀口周长为 w，则阀口开度面积为 wx，因此流量为

$$Q=C_q w x\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}$$

代入（4-55）式得

$$F_s=2C_qC_v w x\Delta p\cos\theta \tag{4-56}$$

如果组成阀口的工作边为直角锐缘，且阀口开度 x 比阀腔其他尺寸小得多，阀芯与阀套间径向缝隙 c_r 为零，这种滑阀称为理想滑阀，理想滑阀的阀口射流角 θ 为 69°，即 $\cos\theta=0.358$。在实际的滑阀中，径向间隙 c_r 不可能为零，θ 角也将有所改变，径向间隙对射流方向角 θ 的影响见图 4-29。

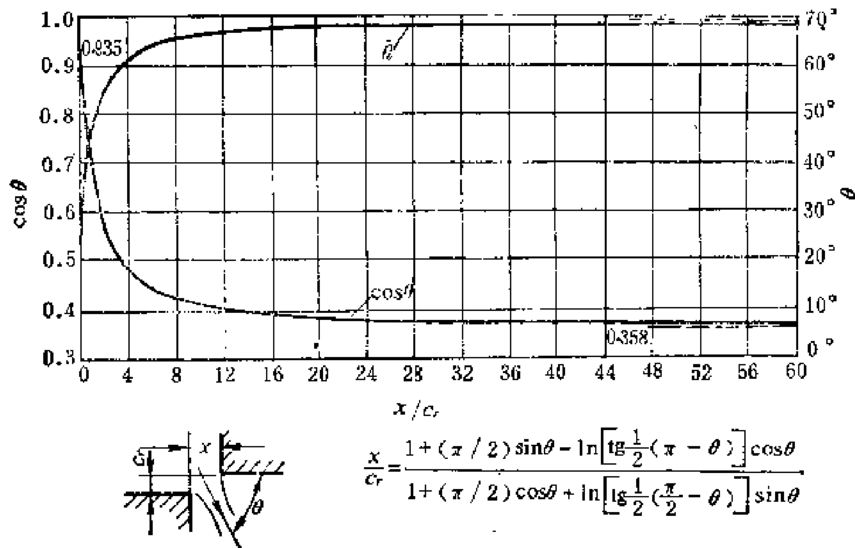


图4-29 阀口射流角 θ

由于 θ 角总是小于 90°，所以稳态力总是正的，它作用于阀芯总是使阀口趋于关闭。

在阀芯移动过程中，阀口开度 x 变化而使流量随时间 t 发生改变，因此阀腔内油液速度 v 将随时间 t 的改变而产生瞬态力 F_t。

由于油液是不可压缩性流体，所以阀腔内的油液质量 m 是常数，阀腔内油液速度改变率为 $\frac{dv}{dt}$，则（4-51）式中右边第二项瞬态力为

$$F_t=\frac{d(mu_r)_{cv}}{dt}=m\frac{dv}{dt}$$

式中 m ——阀腔内长度为 L 那块油液的质量；

v ——质量为 m 的油液在阀腔内的轴向平均流速。

这里阀腔长度取 L 而不取阀腔全长是因为油液在阀腔内实际流程长为 L（图 4-30）。

如果阀腔的断面积为 A，则质量 $m=\rho AL$，代入上式得

$$F_t=m\frac{dv}{dt}=\rho L\frac{d(Av)}{dt}=\rho L\frac{dQ}{dt}$$

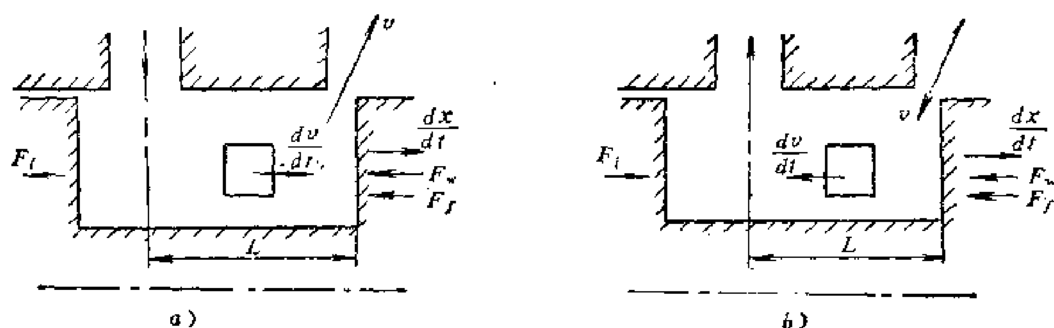


图4-30　滑阀瞬态力计算

因为阀腔内的流量即为阀口流量，即

$$Q = C_q w x \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}$$

所以

$$\frac{dQ}{dt} = C_q w \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} \frac{dx}{dt}$$

代入 F_t 式中得

$$F_t = \rho L C_q w \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} \frac{dx}{dt} = C_q w L \sqrt{2\rho\Delta p} \frac{dx}{dt}$$

或

$$F_t = k_t \frac{dx}{dt} \tag{4-57}$$

式中　$k_t = C_q w L \sqrt{2\rho\Delta p}$；

$\frac{dx}{dt}$——阀口开度变化率，即阀芯移动速度。

油液上 F_t 力的方向总是与阀腔内油液加速度 $\frac{dv}{dt}$ 同向，在图4-30 a）的情况，$\frac{dv}{dt}$ 与 $\frac{dx}{dt}$ 方向相一致，F_t 力与阀芯运动速度 $\frac{dx}{dt}$ 同向，即（4-57）式中系数 k_t 应为正值，或者说长度 L 是正值。在图 4-30 b）的情况，系数 k_t 应为负值，即 L 是负值，所以这里的 L 是有方向性的，称为阻尼长。图4-30中 F_t 力为油液作用于阀芯的瞬态力。

因为我们是沿阀腔取控制体积，当阀芯移动时，控制体积也是运动的，它的运动速度为 $u_c = \frac{dx}{dt}$，所以（4-51）式右边第一项

$$(m_R + m_{cv})\frac{du_c}{dt} = (m_R + m_{cv})\frac{d^2x}{dt^2}$$

式中　m_{cv}——阀腔中所包含的全部油液质量；

m_R——阀芯质量。

通过阀芯作用在控制体积上的外力有：

1）弹簧力 F_w：

设弹簧刚度 k_w，预压缩量为 x_0，则

$$F_w = -k_w(x_0 + x)$$

2）阀芯与阀套间的摩擦力 F_f：

设油液粘度为μ，阀芯与阀套间摩擦面积为 A_f，间隙为 c_r，则

$$F_f = -\tau A_f = -\mu\frac{u}{c_r}A_f = -\mu\frac{A_f}{c_r}\frac{dx}{dt} = -k_\mu\frac{dx}{dt}$$

由此得作用力 ΣF 为

$$\Sigma F = -k_w(x_0 + x) - k_\mu\frac{dx}{dt}$$

代入（4-51）式并整理之得

$$(m_{cv}+m_g)\frac{d^2x}{dt^2}+(k_\mu+k_i)\frac{dx}{dt}+(k_w+k_s)x+k_wx_0=0 \tag{4-58}$$

式中　$k_s = 2C_qC_vw\Delta p\cos\theta$

（4-58）式是滑阀的运动方程或称动态方程。这是一个二阶线性常系数微分方程，我们以 $x = y - \dfrac{k_wx_0}{k_w+k_s}$ 代入（4-58）式，可将该式变换成无任意常数项的常系数微分方程

$$(m_{cv}+m_g)\frac{d^2y}{dt^2}+(k_\mu+k_i)\frac{dy}{dt}+(k_w+k_s)y=0$$

这个微分方程的通解为

$$y = C_1e^{\alpha_1t}+C_2e^{\alpha_2t}$$

由此可得（4-58）式的解为

$$x = C_1e^{\alpha_1t}+C_2e^{\alpha_2t}-\frac{k_wx_0}{k_w+k_s}$$

式中 C_1 及 C_2 为任意常数；

α_1 及 α_2 为代数方程 $(m_{cv}+m_g)\alpha^2+(k_\mu+k_i)\alpha+k_w+k_s=0$ 的根。

由于 m_{cv}、m_g、k_w、k_s 及 k_μ 都是正值，只有 k_i 要视 L 的符号而定，如果 L 为正值(正阻尼)，则 k_i 也为正值，因此 $(k_\mu+k_i)>0$，则代数方程有负根，即 α_1 及 α_2 为负值，这样 x 将随时间的增大而减小，所以滑阀的工作是稳定的。如果阻尼长 L 为负值（图 4-30 *b*）则 k_i 也为负值，即出现负阻尼，当负阻尼不大时，即 $|k_i|<k_\mu$，则 $(k_\mu+k_i)$ 仍大于零，滑阀的工作仍是稳定的，如果负阻尼很大，即 $(k_\mu+k_i)<0$，则代数方程就出现正根，滑阀将变成不稳定。

§4-12　动 量 矩 定 理

动量方程实际上是力平衡方程，一个力对某一点 *o* 的力矩为力矢 $\boldsymbol{F}$ 与自 *o* 点出发至力矢作用线的径矢 $\boldsymbol{r}$ 的矢性积 $\boldsymbol{T}$，即

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{F}\times\boldsymbol{r}$$

由此，根据动量定理，我们可得

$$\Sigma\boldsymbol{T} = \Sigma\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{r} = (m_g+m_{cv})\frac{d\boldsymbol{u}_c\times\boldsymbol{r}}{dt}+\frac{d}{dt}[m\boldsymbol{u}_r\times\boldsymbol{r}]_{cv}+\int\rho\boldsymbol{u}_r\times\boldsymbol{r}\rho dQ$$

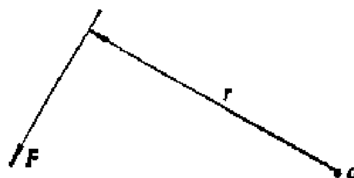


图4-31　力矩

这就是角动量方程或称动量矩方程，是分析汽轮机、

压气机、水轮机及离心泵等涡轮机械的基本方程之一，在控制体积固定不动和恒定流动条件下则

$$\Sigma \boldsymbol{T} = \int_A \rho \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{r} dQ$$

如图 4-32 所示，沿整个叶轮进出口取控制体积，这样，叶轮虽然作旋转运动，但控制体积却是固定不动，由此

$$\Sigma T = \rho_2 Q_2 r_2 v_2 \cos\alpha_2 - \rho_1 Q_1 r_1 v_1 \cos\alpha_1$$

由连续性方程得$\rho_2 Q_2 = \rho_1 Q_1 = \rho Q$，而 $v_1\cos\alpha_1 = v_{1u}$，$v_2\cos\alpha_2 = v_{2u}$，所以

$$\Sigma T = \rho Q(r_2 v_{2u} - r_1 v_{1u})$$

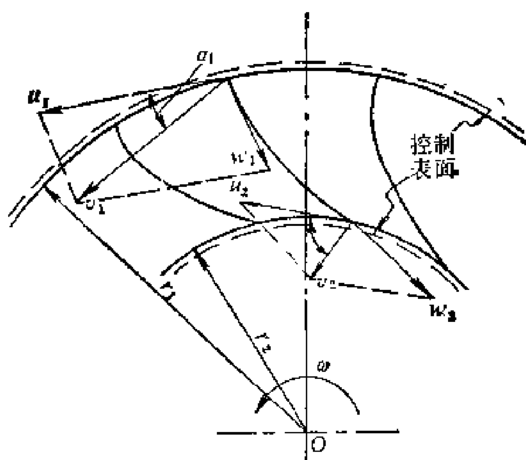


图4-32　叶轮

功率N为

$$N = \Sigma T\omega = \rho Q(r_2 \omega v_{2u} - r_1 \omega v_{1u}) = \rho Q(u_2 v_{2u} - u_1 v_{1u}) \tag{4-59}$$

式中　ω——叶轮的旋转角频率；

u——叶轮的周速。

§ 4-13　流体中压强波传递和马赫数

在静水中投一石块，静水受到了一个小小的干扰，这时水并不流动，但这个干扰信息却很快传播到静水的各处，本节将对这个问题的本质加以讨论。有两种传播，一种是干扰信息在整个流体中的传播，另一种是信息在液体表面的传播，我们的讨论只限于前者。

我们采用一元模型（图 4-33）来讨论，在一管道内充满流体，并有一面积为A的活塞，在初始条件下，流体和活塞均呈静止状态，然后活塞以速度v在微小时间Δt内移动一微小距离$v\Delta t$，即自位置 1-1 移动到 2-2 位置，如果流体是不可压缩的，则活塞右边的流体必然将随活塞的移动而运动，如果流体具有一定的压缩性，则活塞的移动使活塞右边的流体受到压缩，首先是活塞右边附近的流体增加了压强Δp，因此密度也增大了$\Delta\rho$，这些干扰的信息，将在活塞右边的流道内比速度v大得多的速度c向右传播，在Δt时间内到达了 3-3 断面，这时断面 3-3 处的流体也将增加Δp的压强，并开始以速度v运动。根据连续性方程，由活塞移动所排开的流体质量$\rho A v\Delta t$，应该等于活塞右边 2-2 断面至 3-3 断面间质量的增加$\Delta\rho A(c-v)\Delta t$，即

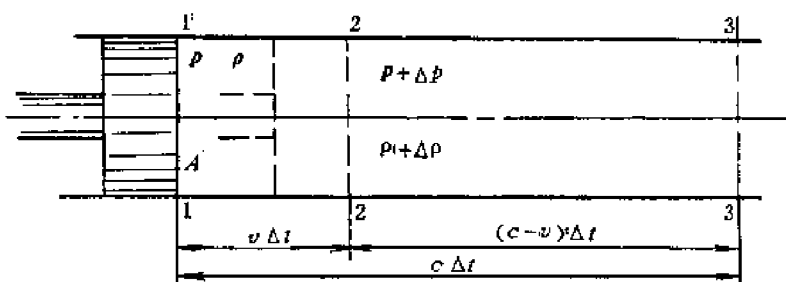


图4-33　声波传递的一元模型

$$\rho A v\Delta t = \Delta\rho A(c-v)\Delta t$$

因为$v \ll c$，所以$c - v \approx c$，则上式为

$$\rho v = c\Delta\rho$$

我们沿流道壁面和 1-1 及 3-3 断面取控制体积，如果我们略去流体与流道壁面的剪切应力，则活塞的移动使活塞右边的流体作用着一附加力 $A\Delta p$，这个力使质量 $m=\rho Ac\Delta t$ 的流体，在 Δt 时间内从原来的静止状态变为以速度 v 运动的状态，即

$$A\Delta p = \frac{\Delta mv}{\Delta t} = \frac{\rho Ac\Delta t}{\Delta t}(v-0) = \rho Avc$$

或
$$\rho v = \frac{\Delta p}{c}$$

由此得
$$\frac{\Delta p}{c} = \rho v = c\Delta\rho$$

或
$$c^2 = \Delta p/\Delta\rho$$

当 $\Delta t \to 0$ 为极限，则

$$c^2 = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta p}{\Delta\rho} = \frac{dp}{d\rho}$$

或
$$c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \tag{4-60}$$

c 是压强波传播速度，也就是声速。因为流体的体积弹性模量 $K=-V\dfrac{dp}{dV}$，而 $\dfrac{dV}{V}=-\dfrac{d\rho}{\rho}$ 所以 $\dfrac{dp}{d\rho}=\dfrac{K}{\rho}$，因此

$$c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \tag{4-61}$$

由此可见，c 是与流体压缩性有关的物理量，压缩性越小，K 值越大，则 c 值也越大。对于气体来说，K 值与干扰传播时的过程有关，如果是等温过程 $pV=c$，则 $pdV+Vdp=0$ 得 $K=-V\dfrac{dp}{dV}=p$，因此，压强波传播速度为

$$c = \sqrt{\frac{p}{\rho}}$$

如果传播过程是绝热（等熵）的 $pV^k=C$，则 $kpV^{k-1}dV+V^kdp=0$ 得 $K=kp$，因此

$$c = \sqrt{\frac{kp}{\rho}}$$

对于完全气体，状态方程为 $p=\rho RT$，则绝热条件下的传播速度 c 为

$$c = \sqrt{kRT} \tag{4-62}$$

我们把流速 v 与压强波传播速度或声速 c 的比值称为马赫数（Mach number），用符号 M 表示，即

$$M = \frac{v}{c} \tag{4-63}$$

由此可见，马赫数 M 是一个考虑压缩性影响的无量纲数，如果我们将它平方后分子分母各乘以 ρA，则 $M^2=\dfrac{\rho Av^2}{\rho Ac^2}=\dfrac{\rho Av^2}{KA}$，式中分子为惯性力，分母则为弹性力，所以它是一

个衡量弹性力影响的准数。另一方面 $M^2=\frac{v^2}{c^2}=\frac{v^2}{kRT}$，根据气体分子运动理论，绝对温度 T 与分子运动平均动能成正比，这样，马赫数 M 又与气体的动能（以 v^2 表示）和内能（与 T 有关）比值有关，由此可见马赫数有多方面的意义，是一个十分重要的相似准数。

本章§4-5中曾设 $\sqrt{\frac{\rho_1 u_1^2}{kp_1}}=M$，这个 M 就是马赫数，所以当低速气流时，即马赫数 M 较小的气流可以忽略气体的压缩性。

§4-14 相似理论

在关于流体运动的工程实际问题中，流体的运动是十分复杂的，为了简化问题，便于求解，我们往往要加入一些假设，这些假设可能是正确的，近似的，也可能是违反客观规律的。因此，根据假设和理论计算而设计出来的东西，并不一定能符合我们的要求。我们经常要把设计工作和实验结合起来，也就是说设计过程中要根据试验结果来改进。但如果要设计的是一种尺寸很大的器具，或规模宏大的工程，在实验室中不可能用实际大小的尺寸来试验，只能用尺寸较小的模型来进行试验。当然，模型在实验室中的工作条件完全不同于实际的工作条件，那末怎样利用模型试验所得的结果来分析改进实际设计呢？或者模型试验应采用怎样的工作参数，才能正确反映实际工程的情况？要解决这个问题，就要掌握相似理论。

如果有两个流动场，它们具有：（1）相似的边界条件；（2）相似的起始条件和流动图形及（3）在对应点上作用着相同性质的力，并且这些力所组成的力多边形相似，则我们称该两流动场完全相似。上面所提出的三点就是流动场完全相似的条件。第一个条件要求流场内的固体边界呈几何相似。第二个条件要求流场中各对应点的速度比率为常数，称为运动相似。第三个条件则为动力相似。实际上凡是几何相似的条件下，由动力相似获得的解，也一定满足运动相似。因此我们可以在满足几何相似的原则下，根据动力相似，即对应点力多边形相似的条件来求出相似准数。

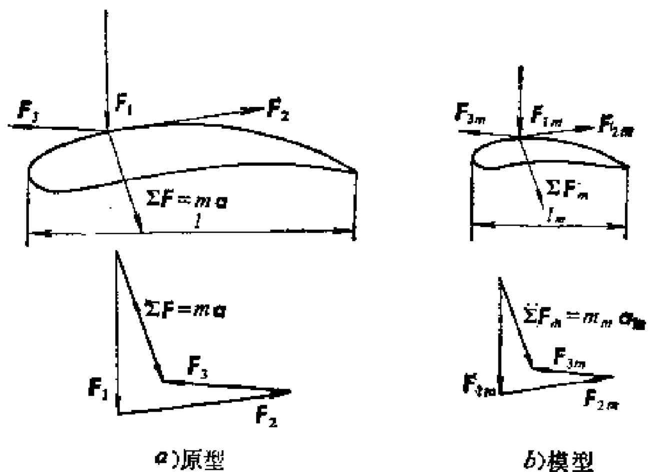


图4-34 动力相似

如图4-34所示，在两个具有相似边界条件的流动场中的对应点上作用着 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_3$……$\boldsymbol{F}_n$ 及 $\boldsymbol{F}_{1m}$、$\boldsymbol{F}_{2m}$、$\boldsymbol{F}_{3m}$……$\boldsymbol{F}_{nm}$。这些力所引起的流体质点的惯性力为 $m\boldsymbol{a}$ 及 $m_m\boldsymbol{a}_m$，则

$$\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\cdots+\boldsymbol{F}_n=m\boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{F}_{1m}+\boldsymbol{F}_{2m}+\cdots+\boldsymbol{F}_{nm}=m_m\boldsymbol{a}_m$$

因为加速度 $\boldsymbol{a}$ 为

$$\boldsymbol{a}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+v\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial s}$$

式中$\frac{\partial v}{\partial t}$为定点加速度而$v\frac{\partial v}{\partial s}$则为变位加速度，因此$m\frac{\partial v}{\partial t}$为定点惯性力或称非恒定流动惯性力用$F_L$表示，而$mv\frac{\partial v}{\partial s}$则为变位惯性力，用$F_c$表示。

我们知道在流动场中一般作用着压力F_p、粘性力F_μ及重力F_g，因此，力平衡方程为

$$\boldsymbol{F}_p+\boldsymbol{F}_\mu+\boldsymbol{F}_g=\boldsymbol{F}_L+\boldsymbol{F}_c \tag{4-64}$$

$$\boldsymbol{F}_{mp}+\boldsymbol{F}_{m\mu}+\boldsymbol{F}_{mg}=\boldsymbol{F}_{mL}+\boldsymbol{F}_{mc} \tag{4-65}$$

设l为流场的线性尺寸，则l^2表示为面积，l^3为体积，我们得压力$\boldsymbol{F}_p$、粘性力$\boldsymbol{F}_\mu$及重力$\boldsymbol{F}_g$的数值为：

$$F_p=pl^2;\quad F_\mu=\mu\frac{dv}{dl}l^2;\quad F_g=\rho gl^3$$

设k为物理量的比例常数，并用下标表示各有关物理量则

$$\frac{\boldsymbol{F}_p}{\boldsymbol{F}_{mp}}=\frac{pl^2}{p_m l_m^2}=k_p k_l^2$$

$$\frac{\boldsymbol{F}_\mu}{\boldsymbol{F}_{m\mu}}=\frac{\mu\frac{dv}{dl}l^2}{\mu_m\frac{dv_m}{dl_m}l_m^2}=k_\mu k_v k_l$$

$$\frac{\boldsymbol{F}_g}{\boldsymbol{F}_{mg}}=\frac{\rho gl^3}{\rho_m g_m l_m^3}=k_\rho k_g k_l^3$$

$$\frac{\boldsymbol{F}_L}{\boldsymbol{F}_{mL}}=\frac{\rho l^3\frac{\partial v}{\partial t}}{\rho_m l_m^3\frac{\partial v_m}{\partial t_m}}=k_\rho k_l^3 k_v k_t^{-1}$$

$$\frac{\boldsymbol{F}_c}{\boldsymbol{F}_{mc}}=\frac{\rho l^3 v\frac{\partial v}{\partial l}}{\rho_m l_m^3 v_m\frac{\partial v_m}{\partial l_m}}=k_\rho k_l^2 k_v^2$$

代入（4-64）式得

$$k_p k_l^2(\boldsymbol{F}_{mp})+k_\mu k_v k_l(\boldsymbol{F}_{m\mu})+k_\rho k_g k_l^3(\boldsymbol{F}_{mg})=k_\rho k_l^3 k_v k_t^{-1}(\boldsymbol{F}_{mL})+k_\rho k_l^2 k_v^2(\boldsymbol{F}_{mc}) \tag{4-66}$$

如果两个流动场呈动力相似，则对应点的力多边形相似，即两流动场内对应点上性质相同的力的比值为一常数。因此，如果要（4-64）式和（4-65)式所代表的流动场呈动力相似，则（4-66）式中各力前面的系数应相等，即

$$k_p k_l^2=k_\mu k_v k_l=k_\rho k_g k_l^3=k_\rho k_l^3 k_v k_t^{-1}=k_\rho k_l^2 k_v^2$$

以惯性力$\boldsymbol{F}_c$前的系数$k_\rho k_l^2 k_v^2$除之得

$$\frac{k_p}{k_\rho k_v^2}=\frac{k_\mu}{k_\rho k_l k_v}=\frac{k_l k_g}{k_v^2}=\frac{k_l}{k_t k_v}=1$$

因此

$$\frac{k_p}{k_\rho k_v^2}=1\quad 即\frac{p}{\rho v^2}=\frac{p_m}{\rho_m v_m^2}=同量=Eu$$

$$\frac{k_\mu}{k_\rho k_l k_v}=1\quad 即\frac{\mu}{\rho lv}=\frac{\mu_m}{\rho_m l_m v_m}=同量=\frac{1}{Re}$$

$$\frac{k_l k_g}{k_v^2}=1 \quad 即\frac{lg}{v^2}=\frac{l_m g_m}{v_m^2}=同量=\frac{1}{Fr}$$

$$\frac{k_l}{k_t k_v}=1 \quad 即\frac{l}{vt}=\frac{l_m}{v_m t_m}=同量=\frac{1}{Sh}$$

我们知道声速 $c=\sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$或$c^2=\frac{dp}{d\rho}$，因此如果两个流动场相似，则 $k_c^2=\frac{k_p}{k_\rho}$，又因为 $\frac{k_p}{k_\rho k_v^2}=1$，所以

$$\frac{k_v}{k_c}=1 \quad 即\frac{v}{c}=\frac{v_m}{c_m}=同量=M$$

上述各式中，M为马赫数，前面已有说明，Sh 称为斯脱鲁哈数（Strouhal number），是非恒定惯性力相似准数，Fr 称为弗洛德数（Froude number）是重力相似准数，Re 是雷诺数（Reynolds number）是粘性力相似准数，因为实际流体运动时，大多数情况下受到粘性力的制约，流动情况与 Re 数有关，我们可用 Re 数来判别流型。Eu 称为欧拉数（Euler number）是压力相似准数。我们知道，压强是流场的基本参数之一，二个流场的压强分布规律相同，那末压力就呈相似，即 Eu 数为同量，因此我们也可用流场内对应两点之间的压差来代替压强，即

$$Eu=\frac{\Delta p}{\rho v^2}$$

由于压强或压差并不是流体固有的物理性质，它往往决定于其它参数，因此欧拉数Eu不是独立的相似准数，而可以是其他相似准数的函数。

由上所述，两个流动场完全相似的必要和充分条件是：边界条件、起始条件相似，雷诺数 Re、弗洛德数 Fr、斯脱鲁哈数 Sh、马赫数M及欧拉数 Eu 等为同量。

必须指出，要同时满足 Eu、Re、Fr 等准数是很难办到的，例如用相同的流体进行模型试验时，即 $k_\mu=1$，$k_l\neq1$，要满足 $Re=(Re)_m$ 则 $v_m/v=l/l_m$，而要满足 $Fr=(Fr)_m$时，则要求 $v_m/v=\sqrt{l_m/l}$，这显然是互相矛盾的。如果用不同的流体进行试验，则同时满足 Fr 和 Re 数时，要求 $\nu/\nu=(l/l_m)^{3/2}$，要获得符合这样条件的流体是有困难的。因此，完全相似的条件很难满足，但在解决实际工程问题时，我们可以根据具体情况，根据实验所要完成的任务，抓主要矛盾，忽略一些次要因素，例如：

（1）流动是恒定的，则 Sh 数可以不为同量。

（2）理想流体，或流动时 Re 数很大，可以认为进入了粘性影响很小的自模区（关于 Re 数很大时进入自模区的讨论将在第五章中说明），则 Re 数可以不为同量。

（3）如果流场中压强为常数，则 Eu 可忽略，实际上 Eu 数总是能满足的。

（4）如果流场中重力与其他力比较起来是个小量，则 Fr 数可不考虑。

（5）如果流体的压缩性很小，或流速较低，则M数可不考虑。

在液压技术中，多数情况要求满足 Re 数。

例4-3 测量空气流量的孔板流量计，它的孔径 $d=100$mm，管径$D=200$mm，校正时用水进行试验，试验结果得流量系数开始为固定值时的最小流量为 $Q_{min}=8$ l/s，同时测得差压计汞柱差 $\Delta h_m=22$mm，试确定：

（1）孔板测量空气时的 Q_{min}；

（2）空气流量为 Q_{min} 时差压计水柱读数。

已知水的运动粘度 $\nu_w=10^{-6}m^2/s$，空气的粘度 $\nu_a=15.65\times10^{-6}m^2/s$，空气密度 $\rho_a=1.175kg/m^3$。

解 影响孔板流量计内流体运动特性的因素主要是粘性力，所以必须使雷诺数 Re 为同量，才能保证水与气的流场相似，则

$$\left(\frac{vd}{\nu}\right)_w=\left(\frac{vd}{\nu}\right)_a$$

式中下标W代表水，a代表空气，因为 $d_w=d_a$

所以
$$v_a=v_w(\nu_a/\nu_w)$$

而
$$v_w=\frac{4Q_w}{\pi d^2}=\frac{4\times0.008}{\pi(0.1)^2}=\frac{3.2}{\pi}\ m/s$$

所以
$$v_a=v_w\left(\frac{\nu_a}{\nu_w}\right)=\frac{3.2}{\pi}(15.65)=16\ m/s$$

则
$$(Q_{min})_a=\frac{\pi}{4}(0.1)^2(16)=0.125m^3/s$$

因为孔板流量计的流量公式(见§4-9)为

$$Q=c_q\frac{\pi}{4}d^2\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}$$

因为在相似状态时，流量系数应相同，所以

$$\frac{(\Delta p/\rho)_w}{(\Delta p/\rho)_a}=\left(\frac{Q_w}{Q_a}\right)^2=\left(\frac{v_w}{v_a}\right)^2=\left(\frac{\nu_w}{\nu_a}\right)^2$$

由流体静力学知

$$(\Delta p/\rho)_w=g\left(\frac{\rho_m-\rho_w}{\rho_w}\right)\Delta h_m=12.6\times22g=277.2g$$

$$(\Delta p/\rho)_a=g\left(\frac{\rho_w-\rho_a}{\rho_a}\right)\Delta h_w=\frac{998.825}{1.175}g\Delta h_w=850g\Delta h_w$$

由此得
$$\frac{277.2g}{850g\Delta h_w}=\left(\frac{1}{15.65}\right)^2$$

所以，测量空气时差压计读数为

$$\Delta h_w=\frac{277.2}{850}(15.65)^2=80mmH_2O$$

§4-15 量 纲 分 析

科学的进展有赖于理论分析与科学实验的有机结合，因为世界上的各种物理现象往往受到各种因素的影响，情况十分复杂，理论分析有一定的困难，需要通过实验来验证，来显示某些物理现象的规律，使理论分析进一步深入。但是，由于影响因素很多，如果没有理论的指导，盲目实验，旷日持久，虽然获得一大堆数据，却不能抓住现象的本质。量纲分析就是指导实验的一种有力工具，它能将影响物理现象的各种变量加以合理的组合，成为无量纲积，

由于无量纲积的数量小于原来变量的数量，因此，用无量纲积来替代原来变量，就可使问题得到简化。通过量纲分析，还能将这些无量纲积进行组合而求得一个含有待定系数的通式。这个待定系数就需通过实验来确定，这样就使我们有针对性地进行实验。流体力学，刚体力学，传热传质以及电磁学等学科中都广泛采用量纲分析的方法。

量纲是物理量的基本实质之一，例如速度这个物理量是单位时间内运动物体所通过的路程，它与长度和时间有关，它的量纲是长度〔L〕和时间〔T〕的组合。但是量纲与单位不同，例如长度的单位可以为米、厘米或毫米，而它的量纲却总是长度〔L〕。时间的单位可以是秒，也可为分，但它的量纲也总是时间〔T〕。速度的单位可以是米每分，也可以是厘米每秒，但它的量纲总是长度和时间的组合〔LT^{-1}〕。量纲分析中需要确定一些基本量纲，在流体力学范围内，各种变量可用五个基本量纲来表示：长度〔L〕、时间〔T〕、质量〔M〕、温度〔θ〕和热量〔H〕，必须指出，热量是能量的一种，可以用能量的量纲〔ML^2T^{-2}〕来表示，但把热量独立出来作为基本量纲有不少方便之处。

进行量纲分析，首先需将问题中有关的物理变量 α_1、α_2……α_n（例如：几何尺寸、密度、速度、加速度、压强、流量、粘度等等）列出，这些变量的量纲均用基本量纲来表示（见表4-2），并以这些变量 α_i 表示为函数关系，即

$$f_1(\alpha_1, \ \alpha_2, \ \alpha_3 \cdots\cdots) = 0$$

或

$$\alpha_1 = f_2(\alpha_2, \ \alpha_3 \cdots\cdots)$$

例如初速为 u_0，以恒加速度 a 运动的物体，在时间 t 后所经过的路程为 s，写成函数关系为

$$f_1(s, \ u_0, \ a, \ t) = s - u_0 t - \frac{1}{2}at^2 = 0$$

或

$$s = f_2(u_0, \ a, \ t) = u_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

表4-2　常用物理量的量纲

物　理　量	量　纲	物　理　量	量　纲
面积 A	L^2	压强 p	$ML^{-1}T^{-2}$
体积 V	L^3	应力 τ，σ	$ML^{-1}T^{-2}$
速度 u，v，c	LT^{-1}	力　F	MLT^{-2}
加速度 a	LT^{-2}	粘度 μ	$ML^{-1}T^{-1}$
转速 n	T^{-1}	运动粘度 ν	L^2T^{-1}
热量 Q_H，q_H	H	流量 Q	L^3T^{-1}
比热 c_p，c_v，c	$HM^{-1}\theta^{-1}$	杨氏弹性模量 E	$ML^{-1}T^{-2}$
密度 ρ	ML^{-3}	体积弹性模量 K	$ML^{-1}T^{-2}$
能量 E	ML^2T^{-2}	切变弹性模量 G	$ML^{-1}T^{-2}$
气体常数 R	$L^2\theta^{-1}T^{-2}$	惯性矩 I	L^4

上列公式各项的量纲是一致的，均为〔L〕，因此，如果对各项同乘以某一由变量组合的值，可使各项的量纲均为零，即各项均成为一无量纲积，例如乘以 $\frac{1}{u_0 t}$，则

$$\frac{s}{u_0 t} - 1 - \frac{1}{2}\frac{at}{u_0} = f_3\left(\frac{s}{u_0 t}, \ \frac{at}{u_0}\right) = 0$$

或乘以$\frac{a}{u_0^2}$则

$$\frac{as}{u_0^2}-\frac{at}{u_0}-\frac{1}{2}\left(\frac{at}{u_0}\right)^2=f_4\left(\frac{as}{u_0^2},\ \frac{at}{u_0}\right)=0$$

式中$\frac{s}{u_0 t}$，$\frac{at}{u_0}$，$\frac{as}{u_0^2}$均为无量纲积，我们用π表示之，因此原来用变量α表示的关系式可以用无量纲积π来表示，即

$$f_1(\pi_1,\ \pi_2,\ \pi_3\cdots\cdots)=0$$

或

$$\pi_1=f_2(\pi_2,\ \pi_3\cdots\cdots)$$

必须指出，乘以不同的变数组合可以获得不同的无量纲积，一个实际问题中，不同的变量组合可以获得很多无量纲积，但由上例可见，由u_0、s、a及t组成的无量纲积π虽很多，但每组函数关系中只有二个无量纲积，即用无量纲积π来表示函数关系时，将比原来的变量α为少，这就使问题得到了一定的简化。

根据上述例题，我们可以阐述如下：

设有m个变量α_1，$\alpha_2\cdots\cdots\alpha_m$，如果用$n$个基本量纲（$n<m$）$D_1$，$D_2$，$D_3\cdots\cdots D_n$（例如$M$，$L$，$T$等）来表示，则变量的量纲式为

$$[\alpha_1]=D_1^{b_{11}}D_2^{b_{21}}D_3^{b_{31}}\cdots\cdots D_n^{b_{n1}}$$
$$[\alpha_2]=D_1^{b_{12}}D_2^{b_{22}}D_3^{b_{32}}\cdots\cdots D_n^{b_{n2}}$$
$$\vdots$$
$$[\alpha_m]=D_1^{b_{1m}}D_2^{b_{2m}}D_3^{b_{3m}}\cdots\cdots D_n^{b_{nm}}$$

式中的指数b是已知的，例如变量α_1为压强$[p]=M^1L^{-1}T^{-2}$，则$b_{11}=1$，$b_{21}=-1$，$b_{31}=-2$，变量α_2为速度$[u]=L^1T^{-1}$则$b_{12}=0$，$b_{22}=1$，$b_{32}=-1$等等。如果由变量组成的无量纲积为π则

$$\pi=\alpha_1^{k_1}\alpha_2^{k_2}\cdots\cdots\alpha_m^{k_m}$$

式中指数k为待定值。因为π是无量纲积，它的量纲为零，即

$$D_1^0D_2^0\cdots D_n^0=(D_1^{b_{11}}D_2^{b_{21}}\cdots D_n^{b_{n1}})^{k_1}(D_1^{b_{12}}D_2^{b_{22}}\cdots D_n^{b_{n2}})^{k_2}\cdots(D_1^{b_{1m}}D_2^{b_{2m}}\cdots D_n^{b_{nm}})^{k_m}$$

由此可得

$$b_{11}k_1+b_{12}k_2+\cdots+b_{1m}k_m=0$$
$$b_{21}k_1+b_{22}k_2+\cdots+b_{2m}k_m=0$$
$$\vdots$$
$$b_{n1}k_1+b_{n2}k_2+\cdots+b_{nm}k_m=0$$

这是一个齐次线性方程组，有m个待定值k_1，k_2，$\cdots k_m$，却只有n个方程，由于$m>n$，我们只能任意假定$m-n$个k值，然后从n个方程中求出其余n个k值。这样，就使满足上列线性方程的k值有无穷数，也就是m个变量可以组成无穷多个无量纲积π。以上述运动学问题为例，s，u_0，a，t共四个变量，即$m=4$，它们的量纲各为

$$[s]=L^1;\ [a]=L^1T^{-2};\ [u_0]=L^1T^{-1};\ [t]=T^1$$

由此可见，基本量纲$n=2$，无量纲积π为

$$\pi=s^{k_1}t^{k_2}u_0^{k_3}a^{k_4}$$

量纲式为

$$L^0T^0=[L^1]^{k_1}[T^1]^{k_2}[L^1T^{-1}]^{k_3}[L^1T^{-2}]^{k_4}$$

则 L：$k_1+k_3+k_4=0$

T：$k_2-k_3-2k_4=0$

用两个方程求解四个 k 值，只能任意假定二个 k 值，例如设 $k_1=1$，$k_2=-1$，解得 $k_3=-1$，$k_4=0$，则 $\pi=s/u_0t$。如果设 $k_1=0$，$k_2=-1$ 则 $k_3=1$，$k_4=-1$，得 $\pi=u_0/at$，如此等等，可列表如下：

k_1	k_2	k_3	k_4	π
1	-1	-1	0	s/u_0t
0	-1	1	-1	u_0/at
-1	0	2	1	u_0^2/as
1	1	-3	2	sa^2t/u_0^3.
……				

由此可得无穷多个无量纲积，但仔细观察可以发现上列无量纲积并不都是独立的，例如 $u_0^2/as=\left(\frac{u_0}{at}\right)/\left(\frac{s}{u_0t}\right)$，而 $sa^2t/u_0^3=\left(1/\frac{u_0}{at}\right)\left(1/\frac{u_0^2}{as}\right)$。显然，方程中不应该包括可用其他无量纲积来表示的 π。因此，问题归结为 m 个变量可以组成几个独立的无量纲积，即由线性方程组能获得几个线性无关非零解。根据线性代数知，方程组的系数矩阵为

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12}\cdots\cdots b_{1m} \\ b_{21} & b_{22}\cdots\cdots b_{2m} \\ \vdots & \\ b_{n1} & b_{n2}\cdots\cdots b_{nm} \end{bmatrix}$$

如果这个矩阵的秩（rank）为 r，则 m 个变数的方程组的线性无关非零解为 $m-r$ 个，所谓矩阵的秩即为矩阵中不等于零的子行列式的最高阶数。

实际上不必列出线性方程组即可写出系数矩阵的行和列，采用下列表格形式来计算是很简便的：

基本量纲	变量 α_i 的量纲系数		
	α_1	α_2	$\alpha_3\cdots\cdots\alpha_m$
D_1	b_{11}	b_{12}	$b_{13}\cdots\cdots b_{1m}$
D_2	b_{21}	b_{22}	$b_{23}\cdots\cdots b_{2m}$
⋮			
D_n	b_{n1}	b_{n2}	$b_{n3}\cdots\cdots b_{nm}$

上述运动学问题为例：

基本量纲	变量的量纲系数			
	s	t	u_0	a
M	0	0	0	0
L	1	0	1	1
T	0	1	-1	-2

不等于零的子行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\neq 0$ 为二阶，即系数矩阵的秩为 2，则独立的无量纲积为

$m - r = 4 - 2 = 2$。

独立的无量纲积 π 的组成可选定 r 个 α 变量，它们的任何组合都不能形成无量纲数，然后在 $m - r$ 个变量中依次各取一个与它们组成 $m - r$ 个无量纲积 π。

例4-4 集中负载简支梁的挠度 y 与负载 F，跨度 l 及材料的杨氏弹性模量 E 和断面惯矩 J 的积有关，求它们的函数关系。

解 各物理量的量纲为

$[y] = L^1$；$[F] = M^1L^1T^{-2}$；$[l] = L^1$；$[E] = M^1L^{-1}T^{-2}$；$[J] = L^4$；$[EJ] = M^1L^3T^{-2}$

基本量纲	y	l	F	EJ
M	0	0	1	1
L	1	1	1	3
T	0	0	-2	-2

系数矩阵秩 $r = 2$，则无量纲积为 $m - r = 4 - 2 = 2$。选取 l 和 EJ 为不能组成无量纲数的变量，则

$$\pi_1 = l^{k_1}(EJ)^{k_2}y$$

则 M： $$0 + k_2 + 0 = 0$$

L： $$k_1 + 3k_2 + 1 = 0$$

解方程得：$k_1 = -1$，$k_2 = 0$ 所以 $\pi_1 = \dfrac{y}{l}$。

$$\pi_2 = l^{k_1}(EJ)^{k_2}F$$

则 M： $$0 + k_2 + 1 = 0$$

L： $$k_1 + 3k_2 + 1 = 0$$

解方程得：$k_1 = 2$，$k_2 = -1$ 所以 $\pi_2 = \dfrac{Fl^2}{EJ}$

由此得
$$f\left(\frac{y}{l},\ \frac{Fl^2}{EJ}\right) = 0$$

或
$$\frac{y}{l} = f_1\left(\frac{Fl^2}{EJ}\right)$$

通过试验就可画出 y/l 与 Fl^2/EJ 的关系曲线，然后即可求得挠度 y。

例4-5 液体从水箱的V形缺口出流（三角堰出流）流量 Q 可能与离缺口最低点的液位高 H（称为堰上水头）、重力加速度 g，V形缺口夹角 φ，趋近堰口的流速 v_0 及液体粘度 μ 和密度有关，试求它们的函数关系。

解 各物理量的量纲为

$$[Q] = L^3T^{-1};\ [H] = L^{-1};\ [g] = L^1T^{-2};\ [v_0] = L^1T^{-1};$$
$$[\varphi] = M^0L^0T^0;\ [\mu] = M^1L^{-1}T^{-1};\ [\rho] = M^1L^{-3}$$

基本量纲	H	g	μ	φ	Q	v_0	ρ
M	0	0	1	0	0	0	1
L	1	1	-1	0	3	1	-3
T	0	-2	-1	0	-1	-1	0

系数矩阵的秩为3，所以$m-r=7-3=4$。选取H、g和μ为不能组成无量纲数的物理量，则

$$\pi_1=H^{k_1}g^{k_2}\mu^{k_3}\varphi$$

因为φ本身为无量纲数，所以 $k_1=k_2=k_3=0$，

即 $$\pi_1=\varphi$$

$$\pi_2=H^{k_1}g^{k_2}\mu^{k_3}Q$$

M： $$0+0+k_3+0=0$$

L： $$k_1+k_2-k_3+3=0$$

T： $$-2k_2-k_3-1=0$$

解方程得：$k_1=-\frac{5}{2}$；$k_2=-\frac{1}{2}$；$k_3=0$，所以

$$\pi_2=Q/H^{5/2}\sqrt{g}$$

$$\pi_3=H^{k_1}g^{k_2}\mu^{k_3}v_0$$

M： $$0+0+k_3+0=0$$

L： $$k_1+k_2-k_3+1=0$$

T： $$-2k_2-k_3-1=0$$

解方程得：$k_1=-\frac{1}{2}$；$k_2=-\frac{1}{2}$；$k_3=0$，所以

$$\pi_3=v_0/\sqrt{Hg}$$

$$\pi_4=H^{k_1}g^{k_2}\mu^{k_3}\rho$$

M： $$0+0+k_3+1=0$$

L： $$k_1+k_2-k_3-3=0$$

T： $$0-2k_2-k_3+0=0$$

解方程得：$k_1=\frac{3}{2}$；$k_2=\frac{1}{2}$；$k_3=-1$，所以

$$\pi_4=H^{3/2}g^{1/2}\rho/\mu$$

由此得 $$f(\varphi,Q/H^{5/2}g^{1/2},\ v_0/\sqrt{Hg},\ H^{3/2}g^{1/2}\rho/\mu)$$

或 $$\frac{Q}{H^{5/2}g^{1/2}}=f_2\left(\frac{v_0}{\sqrt{gH}},\ \frac{H^{3/2}g^{1/2}\rho}{\mu},\ \varphi\right)$$

因为$\frac{v^2}{gH}=Fr$，而$\sqrt{gH}$与v成正比，所以$H^{3/2}g^{1/2}\rho/\mu$可以改写成$\frac{\rho vH}{\mu}=Re$。由此可见，三角堰的流量Q为

$$Q=H^{5/2}\sqrt{g}\,f(\varphi,\ Fr,\ Re)$$

由于堰口出流主要由重力引起，粘性力的影响较次要，特别是当雷诺数Re较大时，粘性力完全可以忽略不计，则

$$Q=H^{5/2}g^{1/2}f(\varphi,\ Fr)$$

例4-6 流体的流动状态决定于流速v，密度ρ，一些线性尺寸s，s_1，s_2，压强损失Δp，重力g，粘度μ和体积弹性模量K，试用量纲分析求它的函数式。

解 9个物理量的量纲各为

$[v]=L^1T^{-1}$；$[s]=L^1$；$[s_1]=L^1$；$[s_2]=L^1$；$[\Delta p]=ML^{-1}T^{-2}$；$[g]=LT^{-2}$；$[\mu]=ML^{-1}T^{-1}$；$[K]=ML^{-1}T^{-2}$；$[\rho]=ML^{-3}$。

基本量纲	ρ	v	s	Δp	s_1	s_2	g	K	μ
M	1	0	0	1	0	0	0	1	1
L	−3	1	1	−1	1	1	1	−1	−1
T	0	−1	0	−2	0	0	−2	−2	−1

系数矩阵的秩为3，所以$m-r=9-3=6$，选取ρ、s、v为不能组成无量纲数的物理变量，则

$$\pi_1=\rho^{k_1}v^{k_2}s^{k_3}\Delta p$$

M：　$k_1+0+0+1=0$

L：　$-3k_1+k_2+k_3-1=0$

T：　$0-k_2+0-2=0$

解方程得：$k_1=-1$；$k_2=-2$；$k_3=0$，即

$$\pi_1=\Delta p/\rho v^2$$

$$\pi_2=\rho^{k_1}v^{k_2}s^{k_3}s_1$$

M：　$k_1+0+0+0=0$

L：　$-3k_1+k_2+k_3+1=0$

T：　$0-k_2+0+0=0$

解方程得：$k_1=0$；$k_2=0$；$k_3=-1$，即

$$\pi_2=s_1/s$$

同理可计算其它无量纲积如下表

π_i(假设)	k_1	k_2	k_3	π_i(结果)
$\pi_3=\rho^{k_1}v^{k_2}s^{k_3}s_2$	0	0	−1	$\pi_3=s_2/s$
$\pi_4=\rho^{k_1}v^{k_2}s^{k_3}g$	0	−2	1	$\pi_4=gs/v^2$
$\pi_5=\rho^{k_1}v^{k_2}s^{k_3}K$	1	−2	0	$\pi_5=K/\rho v^2$
$\pi_6=\rho^{k_1}v^{k_2}s^{k_3}\mu$	−1	−1	−1	$\pi_6=\mu/\rho vs$

所以要求的函数关系为

$$f\left(\frac{\Delta p}{\rho v^2},\ \frac{s_1}{s},\ \frac{s_2}{s},\ \frac{gs}{v^2},\ \frac{K}{\rho v^2},\ \frac{\mu}{\rho vs}\right)=0$$

因为　$\frac{v^2}{gs}=Fr$，$\frac{\rho vs}{\mu}=Re$，$\frac{v}{\sqrt{K/\rho}}=M$，所以

$$f_1\left(\frac{\Delta p}{\rho v^2},\ \frac{s_1}{s},\ \frac{s_2}{s},\ Fr,\ Re,\ M\right)=0$$

或

$$\frac{\Delta p}{\rho v^2}=f_2\left(Fr,\ Re,\ M,\ \frac{s_1}{s},\ \frac{s_1}{s}\right)$$

由量纲分析求得的结果是一种函数关系，要进一步求得各物理变量之间明确的关系，一

方面可依靠实验，另一方面也要依靠物理知识的判断，例如流体流经直径为 d，长为 l 的水平管道的压强损失，主要是由流体粘性引起的，重力的影响极微小，设流速较低（与声速 c 比较）则马赫数M也是次要的。如果管道直径为 d，长度为 l，管壁粗糙尺度为 ε，压强损失 Δp 与管长成正比与管径成反比，而且与管壁粗糙度 ε 有关，我们把原来的线性尺寸 s，s_1，s_2 换成管径 d，管长 l，粗糙度 ε 则

$$\frac{\Delta p}{\rho v^2}=\frac{l}{d}f_3\left(Re,\quad \frac{\varepsilon}{d}\right)$$

或

$$\Delta p=\rho v^2\frac{l}{d}f_3\left(Re,\quad \frac{\varepsilon}{d}\right)$$

函数 $f_3\left(Re,\quad \frac{\varepsilon}{d}\right)$可以用实验求出。

第五章　流 体 阻 力

实际流体具有粘性运动时要出现阻力，这是客观存在的自然规律。为了克服阻力就要产生能量损失，探索流体阻力的规律、正确估算能量损失、解决工程实际问题，这是本章的任务。

由于流体所处的环境不同和性质差异，处理方法也不尽同，所以对管流和潜体，液体和气体分别加以讨论。

§5-1　层流、紊流和雷诺判据

由于实际的需要，人们致力于探索流体摩擦阻力的规律，1883年雷诺（Osborne Reynolds）通过大量试验，终于发现了液体在管道中流动时存在两种不同状态，它们的阻力性质也不相同。虽然这是在管道液流中发现的现象，却对气流和潜体也同样适用。因此，雷诺的发现对流体阻力的研究工作有很大的贡献。下面我们简述雷诺所做的试验。

试验装置如图5-1所示，试验时保持水箱中水位恒定和尽可能平静，然后将阀门A微微开启，使少量水流流经玻璃管，即玻璃管内平均流速v很小。这时，如将颜色水容器的阀门B也微微开启，使颜色水也流入玻璃管内，我们可以在玻璃管内看到一条细直而鲜明的颜色

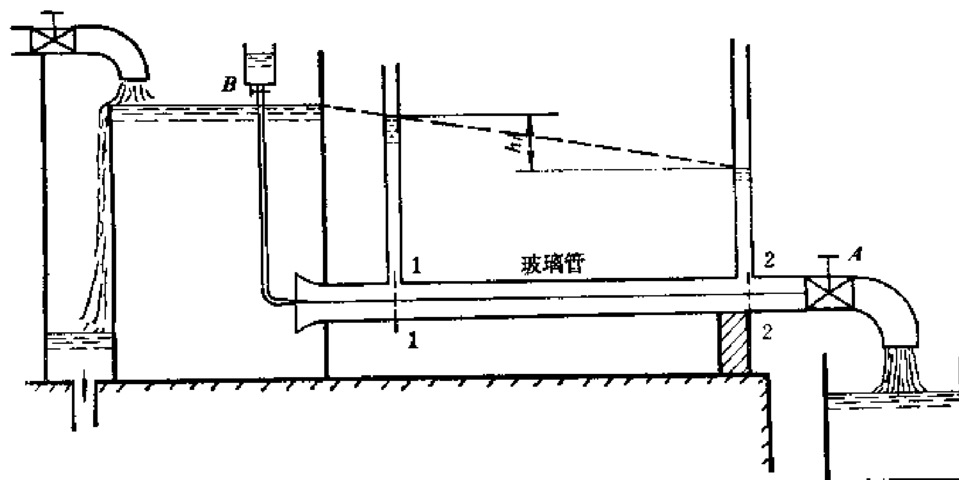


图5-1　雷诺试验

流束，而且不论颜色水放在玻璃管内的任何位置，它都能呈直线状，这说明管中水流都是安定地沿轴向运动，液体质点没有垂直于主流方向的横向运动，所以颜色水和周围的液体没有混杂。如果把A阀缓慢逐渐开大，那末，管中流量和它的平均流速v也将逐渐增大，直至平均流速增加至某一数值，颜色流束开始弯曲颤动，这说明玻璃管内液体质点不再保持安定，开始发生脉动，不仅具有横向的脉动速度，而且也具有纵向脉动速度。如果A阀继续开大，脉动加剧，颜色水就完全与周围液体混杂而不再维持流束状态。

在液体运动时，如果质点没有横向脉动，不引起液体质点的混杂，而是层次分明，能够维持安定的流束状态，这种流动称为层流。如果流体运动时，质点具有脉动速度，引起流层间质点的相互错杂交换，这种流动称为紊流或湍流。当试验向相反方向进行时，即阀门 A 从全开逐渐关闭，则现象以相反的顺序重复出现，但由紊流转为层流时的平均流速 v 的数值要比层流转为紊流时为小。流态转变时的速度称为临界流速，层流转为紊流时的流速称为上临界流速，反之称为下临界流速。

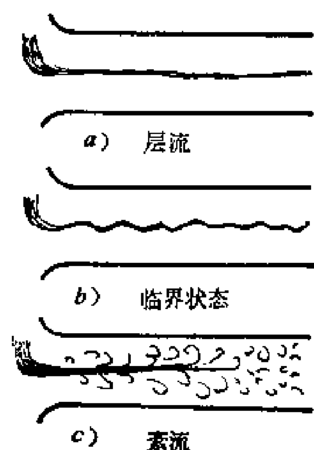


图5-2　层流与紊流

雷诺试验不仅示出了不同的流态，而且也揭示了不同流态时摩擦阻力的性质。根据伯努利方程，流体从图 5-1 的 1-1 断面流至 2-2 断面，由摩擦阻力引起的能量损失 h_f 即为该两断面上的压差液柱高 h_f。我们把不同平均流速 v 时的 h_f 记录下来，画在对数座标纸上，如图5-3 所示。图上 ABK_2C 为层流向紊流转变的过程，CK_1A 为紊流向层流的转变过程，K_1 为下临界点，与 K_1 相应的速度为下临界流速，K_2 为上临界点，与该点相适应的流速则为上临界流速。AK_1 一定呈层流状态，CK_2 一定呈紊流状态，K_1K_2 为过渡区。由图 5-3 可见层流与紊流的摩擦阻力规律是截然不同的，因为代表层流状态的 AK_1 直线的斜率为 m_1，它的方程为

$$\lg h_f = \lg k_1 + m_1 \lg v$$

或

$$h_f = k_1 v^{m_1}$$

而代表紊流的 K_2C 线具有斜率 m_2，它的方程为

$$\lg h_f = \lg k_2 + m_2 \lg v$$

或

$$h_f = k_2 v^{m_2}$$

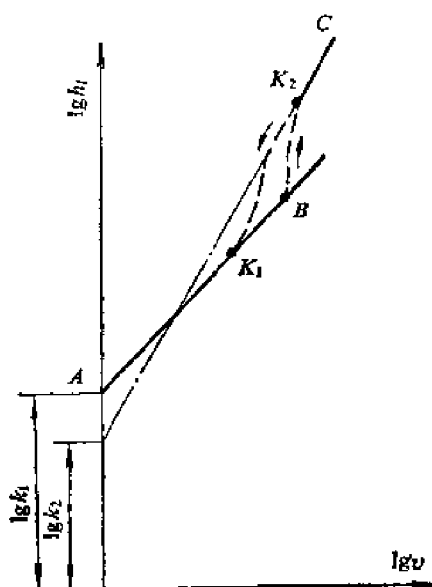


图5-3　层流和紊流时摩擦阻力的规律

试验得 $m_1 = 1$，而 $m_2 = 1.75 \sim 2$，即层流的能量损失与流速一次方成正比，而紊流时却与流速的 $1.75 \sim 2$ 次方成正比。由此可见，计算流体摩擦阻力，确定能量损失，首先必须决定它的流动状态。因为流体的摩擦阻力是粘性引起的力，根据相似理论，雷诺数 $Re = \frac{\rho v L}{\mu}$ 可以用来判定流动状态。雷诺数中的特性尺度 L，在潜体问题中可用潜体的某一代表性尺寸，在圆管中可用管道内径 d 来表示，但在非圆形流道的流动问题中，例如环状缝隙，矩形断面等，就较难用某一尺寸来表示。如果用过流断面积 A 与过流断面上流体与固体壁面接触的周界长度称为湿周 χ 的组合来表示特性长度，应该是合理的。对于圆管来说，过流断面积的四倍即 $4A$ 与湿周 χ 的比值恰好就是直径 d，所以我们把这个比值称为等效直径，或水力直径 d_H，并以 d_H 来计算流道内流体运动时的雷诺数，即

$$d_H = \frac{4A}{\chi}$$

例如，流道断面是边长为 a 及 b 的矩形（图 5-4 a），则

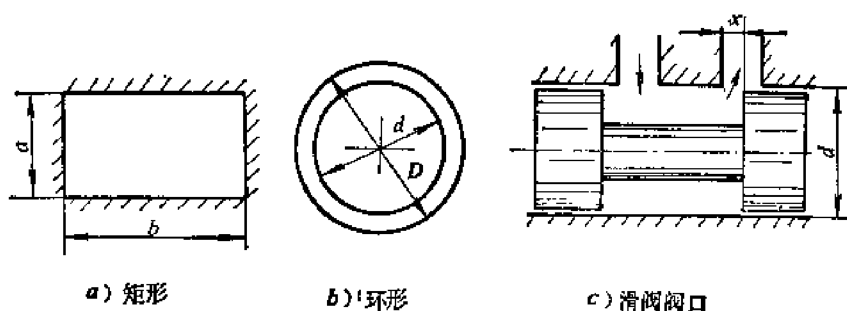
$$d_H=\frac{4ab}{2(a+b)}=\frac{2ab}{a+b}$$

如果流道断面是直径为D及d的环形（图 5-4 b），则

$$d_H=\frac{4\left(\frac{\pi}{4}\right)(D^2-d^2)}{\pi(D+d)}=(D-d)$$

如果是开度为x的滑阀阀口（图 5-4 c），则

$$d_H=\frac{4\pi xd}{2\pi d}=2x$$



a）矩形　　b）环形　　c）滑阀阀口

图5-4　几种流道的尺寸

为了书写简便，我们在Re数中不用d_H的符号而仍用d，但这个d应理解为水力直径。

通过大量试验，雷诺建议下临界点的雷诺数约为 2300。在一般情况下，这个数值较难达到，仅为 2000 左右，所以我们把下临界值Re_{cr}取 2000，即Re在 2000 以下，圆管内一定是层流。雷诺提供的上临界值为 12000，后来有人在特别安静的环境下曾获得上临界值为 40000[1]。在工程上，上临界点是没有实用意义的，我们是以$Re=2000$作为管道内层流与紊流的判据。对于特殊形状的流道，判别流态的下临界雷诺数如表 5-1。

表5-1　异形流道临界雷诺数

流道形状	Re_{cr}	流道形状	Re_{cr}
同心环缝	1100	带沉割槽的偏心环缝	400
偏心环缝	1000	滑阀阀口	260
带沉割槽的同心环缝	700		

§5-2　流道中能量损失的种类

在第四章中我们曾详细地讨论了柏努利方程，并且用能量守恒的原理把它拓广为

$$\frac{p_1}{\gamma}+z_1+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}\pm W=\frac{p_2}{\gamma}+z_2+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}+h_f$$

应用上述方程，可以解决很多与流体有关的实际问题，但必须掌握能量损失h_f的计算。涉及流体的问题，特别是液压技术领域内，很多是用管道作为流体的运输通道，因此研究管

[1] Streeter V. S., Fluid Mechanics, McGraw-Hill, 1966 p. 224.

道内的阻力和阻力引起的能量损失，具有很重要的实用意义。

在管道内，流体运动时的能量损失 h_f 是由于流体在等断面直管内的摩擦阻力所引起的沿程能量损失，简称沿程损失 h_l，和由于流道形状改变，流速受到扰动，例如断面积变化，流动方向改变等引起的局部能量损失，简称局部损失 h_m 组合而成的。通常认为每种阻力都能充分的显示出来，而且独立地不受其它阻力的影响，因此阻力或由阻力引起的能量损失可以叠加，所以管道中的总能量损失 h_f 可以看作各个不同阻力单独作用所引起的能量损失的和，即

$$h_f = \Sigma h_l + \Sigma h_m \tag{5-1}$$

式中 Σh_l 表示相连接的各管道的沿程损失的总和，Σh_m 表示管道中所有局部损失的总和。

必须指出，构成局部损失的两个元件，如果间距很小，即两元件非常靠近，则它们产生的损失将相互发生影响，因此应该将两元件作为一个组件来考虑，它的损失在多数情况下要比两个独立的局部损失之和为小，但在某种组合情况下也可能大一些，详细可以参考 D. S. Miller 的著作[1]。

根据第四章中量纲分析部分中的讨论，我们求得流体流经水平管道的压降 Δp 为

$$\Delta p = \rho v^2 \frac{l}{d} f_3\left(Re, \frac{\varepsilon}{d}\right) \tag{5-2}$$

对于一水平放置的等断面管道，由柏努利方程可得：

$$\frac{p_1}{\rho g} = \frac{p_2}{\rho g} + h_f$$

由于 1 与 2 断面间并没有使流速受到扰动之处，所以这里的 h_f 实际上就是沿程损失 h_l，所以

$$h_l = \frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \frac{\Delta p}{\rho g} = f_3\left(Re, \frac{\varepsilon}{d}\right)\frac{l}{d}\ \frac{v^2}{g}$$

由于 h_l 是能量损失，我们用动能 $\frac{v^2}{2g}$ 来表示，则

$$h_l = 2f_3\left(Re, \frac{\varepsilon}{d}\right)\frac{l}{d}\ \frac{v^2}{2g} = \lambda \frac{l}{d}\ \frac{v^2}{2g} \tag{5-3}$$

式中 $\lambda = 2f_3\left(Re, \frac{\varepsilon}{d}\right)$ 称为摩阻系数；

l ——管道长度；

d ——水力直径；

v ——平均流速。

另一方面，如果管壁处剪切应力为 τ_0，则摩擦阻力 $R_f = \tau_0 \chi l$，这里 χ 为湿周。这个力应该与断面 1-1 和 2-2 上的压力 F_1 及 F_2 相平衡，则

$$(p_1 - p_2)A = R_f = \tau_0 \chi l$$

或

$$\tau_0 = \frac{(p_1 - p_2)\ A}{l\chi} = \frac{\Delta p d}{4l}$$

式中 d 为水力直径，以 (5-2)式代入则

[1] Miller D. S., Internal Flow, A guide to losses in pipe and duct systems, BHRA 1971.

$$\tau_0=\frac{\rho v^2}{4}f_3\left(Re,\ \frac{\varepsilon}{d}\right)=\frac{\rho v^2}{8}\lambda$$

或

$$\lambda=\frac{8\tau_0}{\rho v^2} \tag{5-4}$$

τ_0是未知值，而且不同流态τ_0也不相同，以后要分别进行讨论。

由于局部损失h_m是能量损失，所以也用动能$\frac{v^2}{2g}$表示。因为这种损失是流速在某一局部地方受到扰动而产生的，它只发生在局部地点，我们把所有产生损失的因数总括在一个系数ζ中，即

$$h_m=\zeta\frac{v^2}{2g} \tag{5-5}$$

ζ称为局部阻力系数，它随局部处扰动流速的条件而异。某些情况下，例如突然扩大等可以求得ζ的理论值，但大多数情况只能用试验法求得。

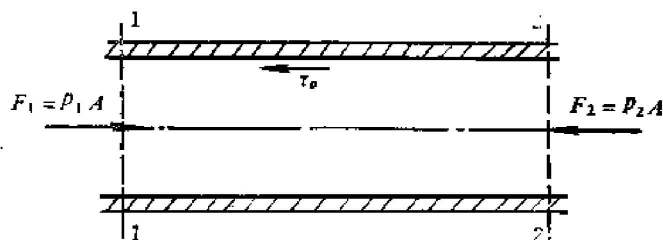


图5-5　管道内流体上的作用力

§5-3　圆管中的层流

第四章中曾指出，管道中的流动有二种情况：一种为起始段，在这一段中附面层逐渐扩展，断面上流速分布不断改变，因此要产生附加能量损失。另一种是附面层已扩展至整个流道，断面上速度分布不再改变，称为完全扩展段。本节讨论圆管内恒定流动完全扩展段的层流。层流的特点是流线安定，质点只有轴向流速而无横向流速，如果我们将圆管水平放置，管轴与x座标轴符合，如图5-6所示则

$$u_x=u\neq 0$$
$$u_y=u_z=0$$

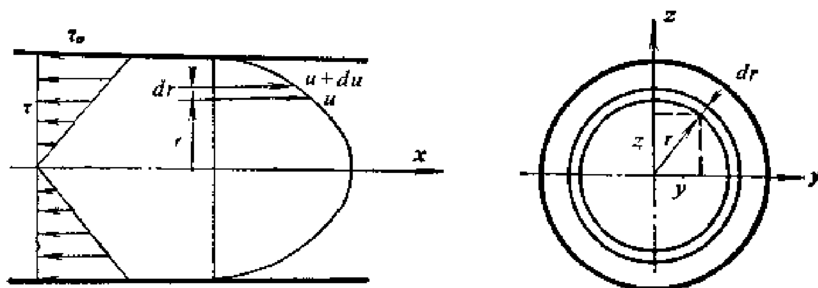


图5-6　圆管内层流中的流速和剪切应力

由于管道水平放置，如果管道直径并不十分巨大，管中具有一定的压强，则重力的影响可以忽略，即单位质量力$X=0$，$Y=0$，$Z\approx 0$，代入N-S方程得

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u_x}{\partial z^2}\right)=\frac{du_x}{dt}=\frac{\partial u_x}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}=0$$

$$\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial p}{\partial z}=0$$

由此可见，压强p只是x的函数，因为管道是等断面的，而讨论的又是完全扩展段中的恒定层流，所以u_x不随x和t而变，只是y与z的函数，即$\frac{\partial u_x}{\partial t}=0$，$\frac{\partial u_x}{\partial x}=0$，$\frac{\partial p}{\partial t}=0$，则上式可写成

$$\frac{1}{\rho}\ \frac{dp}{dx}=\nu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right)$$

或

$$\frac{dp}{dx}=\mu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right) \tag{5-6}$$

上式中等号右边只是y，z的函数而等号左边却又只是x的函数，这只有当等式两边等于常数时才能成立，即

$$\frac{dp}{dx}=\text{常数}=\frac{p_2-p_1}{l}=-\frac{\Delta p}{l}$$

式中$\Delta p=p_1-p_2$是长度为l的水平直管上的压降。又由于$u_x=u$，所以（5-6）可写成

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\Delta p}{\mu l} \tag{5-6 a}$$

这是个二阶偏微分线性方程，给定了边值条件，可以求得它的解。因为我们讨论的是圆管中的流动，是对称于x轴的，如果采用以x为心轴的圆柱座标就更为方便，由（3-37）式知

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\ \frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

因为速度u的分布是轴对称的，所以$\frac{\partial u}{\partial \theta}=0$，则（5-6 a）式就成为二阶常微分方程

$$\frac{d^2 u}{dr^2}+\frac{1}{r}\ \frac{du}{dr}+\frac{\Delta p}{\mu l}=0$$

或

$$r\frac{d^2 u}{dr^2}+\frac{du}{dr}+\frac{\Delta p r}{\mu l}=0$$

积分二次可得

$$u=C_1\ln r-\frac{\Delta p r^2}{4\mu l}+C_2 \tag{5-7}$$

积分常数C_1及C_2可由边界条件确定：在管轴处，即当$r=0$时，u为有限值，则$C_1=0$。在管壁处，即$r=\frac{d}{2}$时，$u=0$则

$$C_2=\frac{\Delta p d}{16\mu l}$$

由此得：

$$u=\frac{\Delta p}{4\mu l}\left(\frac{d^2}{4}-r^2\right) \tag{5-8}$$

式中d为圆管直径。

由（5-8）式可知，层流时圆管断面上的速度分布为对称于管轴的抛物体，最大流速在管

轴（$r=0$）处

$$u_{max}=\frac{\Delta pd^2}{16\mu l}$$

求出流速分布规律后就可以计算流量。设在管内离管道轴心为 r 处取一薄层，它的厚度为 dr，如图 5-6 所示，则通过此薄层圆环的流量为 $dQ=2\pi urdr$，由此得通过圆管的总流量 Q 为

$$Q=\int dQ=\int_0^{\frac{d}{2}}\frac{\pi\Delta p}{2\mu l}\left(\frac{d^2}{4}-r^2\right)rdr=\frac{\pi d^4\Delta p}{128\mu l} \tag{5-9}$$

平均流速 v 为

$$v=\frac{Q}{\frac{\pi}{4}d^2}=\frac{\Delta pd^2}{32\mu l}=\frac{1}{2}u_{max} \tag{5-10}$$

由此可求得流体在圆管中流经 l 距离后的压降 Δp 为：

$$\Delta p=\frac{32\mu lv}{d^2}=\frac{128\mu lQ}{\pi d^4} \tag{5-11}$$

在使用上述公式时要注意各参数的单位必须统一。例如长度以 cm 计，时间以 s 计，粘度以 bar·s 计，则流量的单位应为 cm^3/s，压降的单位应为 bar。

剪切应力 τ 为

$$\tau=-\mu\frac{du}{dr}=-\mu\frac{d}{dr}\left[\frac{\Delta p}{4\mu l}\left(\frac{d^2}{4}-r^2\right)\right]=\frac{\Delta pr}{2l}$$

剪切应力随 r 成直线分布，如图 5-6 所示，在管轴处为零，在管壁处为最大，它的值 τ_0 为

$$\tau_0=-\mu\left.\frac{du}{dr}\right|_{r=\frac{d}{2}}=\frac{\Delta pd}{4l}=\frac{8\mu v}{d}$$

以 $\tau_0=\frac{8\mu v}{d}$ 代入（5-4）式就可得圆管中完全扩展段层流的 λ 的理论值为

$$\lambda=\frac{8\tau_0}{\rho v^2}=\frac{64\mu v}{\rho v^2 d}=\frac{64}{Re} \tag{5-12}$$

如果以（5-12）式代入（5-3）式则

$$h_l=\lambda\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}=\frac{64}{Re}\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}=\frac{32\mu l}{\rho gd^2}v$$

由此可见层流时能量损失 h_l 与平均流速 v 成正比，这个理论结论与前述实验结果完全符合。由（5-12）式也可看出，层流时阻力与管壁的粗糙度 ε 无关。在液压技术中，考虑其它影响常采用

$$\lambda=\frac{75}{Re} \tag{5-12 a}$$

最后，计算一下层流完全扩展段中动能修正系数 α 和动量修正系数 β。因为 α 和 β 是断面上实际动能和动量与按平均流速计算的动能和动量之比，即

$$\alpha = \int_A \frac{u^2}{2}\rho dQ \Big/ \frac{v^2}{2}\rho Q = \int_A u^3 dA / v^3 A$$

以 $u = \dfrac{\Delta p}{4\mu l}\left(\dfrac{d^2}{4} - r^2\right)$，$dA = 2\pi r dr$，$v = \dfrac{\Delta p d^2}{32\mu l}$ 及 $A = \dfrac{\pi}{4}d^2$ 代入得

$$\alpha = \frac{\int_0^{\frac{d}{2}} \left[\frac{\Delta p}{4\mu l}\left(\frac{d^2}{4} - r^2\right)\right]^3 2\pi r dr}{\left[\frac{\Delta p d^2}{32\mu l}\right]^3 \frac{\pi}{4}d^2} = 2$$

同样方法可得

$$\beta = \frac{1}{A}\int_A \left(\frac{u}{v}\right)^2 dA = \frac{4}{3}$$

§5-4　圆管中的紊流

紊流的特点是流体质点的速度无论数值和方向都随时间作无规律的变动，称为脉动。因此它的结构极为复杂，对它的规律迄未完全搞清。由于紊流的脉动，质点的真实速度瞬息万变，无法表示，我们只能用一定时间间隔 T 内的统计平均值，称为时均流速 $\bar{u}$ 来代替真实速度 u，即

$$\bar{u} = \frac{1}{T}\int_0^T u dt$$

在时间间隔 T 内，虽然 u 是随时间变化的，但 $\bar{u}$ 有可能不随时间而变，它只是空间点的函数，即 $\bar{u} = \bar{u}(s)$。真实速度 $u = u(s, t)$ 与时均流速 $\bar{u}$ 的差称为脉动流速 u'，即

$$u' = u - \bar{u}$$

在管道内，如果管道水平放置，则 $\bar{u}_x = \bar{u}$，$\bar{u}_y = \bar{u}_z = 0$，但脉动流速的分量

$$u'_x = u_x - \bar{u}_x = u_x - \bar{u}$$

$$u'_y = u_y - \bar{u}_y = u_y$$

$$u'_z = u_z - \bar{u}_z = u_z$$

脉动流速的时均值为

$$\bar{u}' = \frac{1}{T}\int_0^T u' dt = \frac{1}{T}\int_0^T u dt - \frac{1}{T}\int_0^T \bar{u} dt = \bar{u} - \bar{u} = 0$$

由此可见，紊流的性质是非恒定流动，但采用时均流速后就可以作为恒定流动来处理，当然这只是一种准恒定型流动（Quasi-steady flow）。

由于液体具有粘性，即使在紊流条件下，流体仍然粘附于壁面，壁面处的相对流速应为零，离开壁面流体速度也不可能突然增加，因此，靠近壁面处的流体质点仍比较安定，即在壁面附近有一层呈层流状态的薄层，称为近壁层流层或层流次层。层流次层的厚度很薄，而且速度梯度很大，我们近似地认为该层内的速度梯度为常数，因此剪切应力也恒定不变。层流次层的厚度 Δ 与主流的紊动程度有关，紊动程度越剧烈，层流次层越薄，而紊动程度又与雷诺数有关，所以 Δ 与 Re 成反比，约为

$$\Delta \approx 30 \frac{d}{Re\sqrt{\lambda}}$$

式中 λ 是摩阻系数。

任何壁面都不是绝对平整光滑的，它的凹凸不平的绝对尺寸称为壁面的绝对粗糙度 ε，当层流次层的厚度大于壁面粗糙度的尺寸时，即 $\Delta > \varepsilon$，粗糙凸出的 ε 淹没在层流次层中，ε 对液流没有影响，而由于层流次层的存在，粘度对阻力有一定的影响，这种管道称为水力光滑管，否则就称为水力粗糙管。在粗糙管情况下，层流次层被破坏，这时流体的阻力主要决定于壁面的粗糙度。必须指出，这里的所谓光滑管或粗糙管只决定于管内流体的运动情况，同一管道可以为粗糙管，也可以为光滑管，主要决定于层流次层厚度 Δ，或者说决定于雷诺数 Re。

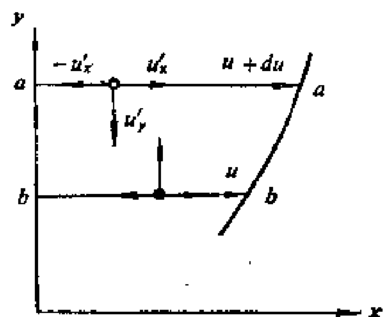


图5–7　质点混杂模型

现在让我们来讨论紊流的某些规律。由于紊流运动的脉动速度，流层之间有质点交换，每个质点都带有自己的动量，当它进入另一层时，它的动量发生了改变，引起附加的切应力。因此紊流中除了由于流体粘性产生的阻力外，还有因质点混杂而形成的阻力，而且后者往往是主要的。探求这个阻力非常困难，1925 年普朗特尔（L. Frandtl）提出了混和长理论，使紊流的理论工作有了一定的进展，但仍然没有全部解决。设 $a-a$ 层的流体质点，纵向脉动速度为 u_x'，横向脉动速度为 u_y'，当它经过 l' 距离后到 $b-b$ 层（图 5–7）时混和安定下来，则

$$u_x' = l' \frac{d\bar{u}}{dy} \tag{5-13}$$

式中 l' 只是一个假想的长度参数，就是普朗特尔混和长的物理意义。

在 dt 时间内，$a-a$ 层上通过 dA 面积流出的流体质量 dm 为

$$dm = \rho u_y' dAdt$$

它们到达 $b-b$ 层时的动量变化为

$$dmu_x' = \rho u_y' u_x' dAdt$$

因动量变化而产生的阻力 F_f 为

$$F_f = \frac{dmu_x'}{dt} = \rho u_x' u_y' dA$$

由此得由于质点混杂而产生的剪切应力 τ_t 为

$$\tau_t = \frac{F_f}{dA} = \rho u_x' u_y' \tag{5-14}$$

普朗特尔根据连续性原理，认为要维持质量守恒，纵向脉动必将影响横向脉动，两者互相制约（图 5–8），因此，u_x' 及 u_y' 必为同一数量级，也就是说 u_x' 与 u_y' 是相关的，或 $u_y' = k_1 u_x'$，则

$$\tau_t = \rho u_x' u_y' = \rho k_1 l'^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^2 = \rho l^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^2$$

式中 $l^2 = k_1 l'^2$，l 称为普朗特尔混和长。

由此可见，流体内剪切应力 τ 由粘性剪切应力 $\tau_v=\mu\frac{d\bar{u}}{dy}$ 及紊动剪切应力 $\tau_t=\rho l^2\left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^2$ 组成

$$\tau=\tau_v+\tau_t=\mu\frac{d\bar{u}}{dy}+\rho l^2\left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^2 \tag{5-15}$$

当层流时质点没有混杂，第二项不存在，只有粘性应力，紊流时则第二项有很大影响。如果我们将 τ_t 与 τ_v 相比，则

$$\frac{\tau_t}{\tau_v}=\frac{\rho l^2\left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^2}{\mu\left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)}=\frac{\rho l^2\frac{d\bar{u}}{dy}}{\mu}\approx\frac{\rho l\bar{u}}{\mu}$$

因为 $\frac{\rho l\bar{u}}{\mu}$ 正好是雷诺数 Re 的型式，所以 τ_t 与 τ_v 的比值与雷诺数有关。Re 数越大，紊动越剧烈，τ_v 的影响越小，当 Re 数很大时，τ_v 就可忽略，则

$$\tau=\rho l^2\left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^2$$

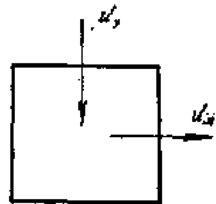


图5-8　u'_y 与 u'_x 的关系

前已述及在壁面附近层流次层内质点没有混杂，因此该处只有 τ_v 而 $\tau_t\approx 0$，由于层流次层内速度梯度为常数，则层内剪切应力 $\tau=\tau_v=$ 常数，我们认为它就是壁面处的剪切应力 τ_0，由此得当 $y\leqslant\Delta$ 时

$$\tau_0=\mu\frac{\bar{u}}{y}$$

我们设 $\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}=u_*$，它具有速度的量纲，称为剪切速度，则

$$\frac{\bar{u}}{u_*}=\frac{\rho u_* y}{\mu}\quad(y\leqslant\Delta) \tag{5-16}$$

在层流次层外，$y>\Delta$，紊动剧烈，粘性影响可以忽略，则

$$\tau\approx\tau_t=\rho l^2\left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^2$$

普朗特尔假设在近壁处混和长 l 与离壁面的距离 y 成正比（因为 y 越大，质点的紊动自由度越大，紊动切应力也应越大），即 $l=ky$，根据尼古拉兹（J. Nikuradse）的实验资料证明，这个规律可以扩展到整个紊流区域。此外，还假设在整个紊流区内剪切应力也为常数 τ_0，则

$$\tau_0=\rho k^2 y^2\left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^2$$

或

$$\frac{d\bar{u}}{u_*}=\frac{1}{k}\frac{dy}{y}$$

积分之得：

$$\frac{\bar{u}}{u_*}=\frac{1}{k}\ln y+C \tag{5-17}$$

积分常数由边值确定，当 $y=\Delta$ 时，$\bar{u}=\bar{u}_0$（图 5-9）则

$$\frac{\bar{u}_0}{u_*} = \frac{1}{k}\ln\Delta + C \tag{5-18}$$

在层流次层边上$\tau_0 = \mu\frac{\bar{u}_0}{\Delta}$，则$\frac{\tau_0}{\rho} = \frac{\mu\bar{u}_0}{\rho\Delta}$，由此得

$$\frac{\bar{u}_0}{u_*} = \frac{\rho u_*\Delta}{\mu} = N \tag{5-19}$$

因为N具有雷诺数的形式，所以它实际上是在$y = \Delta$处保持层流的临界值，可由实验求得。将（5-19）式代入（5-18）式得

$$C = \frac{\bar{u}_0}{u_*} - \frac{1}{k}\ln\Delta = \frac{\bar{u}_0}{u_*} - \frac{1}{k}\ln\frac{\mu N}{\rho u_*}$$

$$= N - \frac{1}{k}\ln\frac{\mu N}{\rho u_*}$$

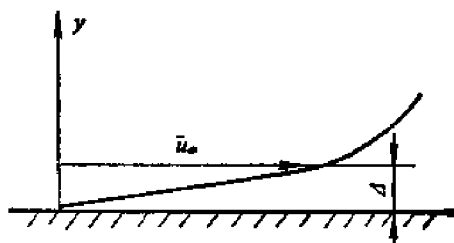


图5-9　层流次层内速度分布

代入（5-17）式得

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = A + \frac{1}{k}\ln\frac{\rho u_* y}{\mu} \tag{5-20}$$

式中　$A = N - \frac{1}{k}\ln N$

图 5-10 为尼古拉兹对光滑圆管的试验结果[1]，图中曲线 1 代表（5-16）式，表示为层流次层，直线 2 代表（5-20）式为紊流区，它们的交点就是层流次层与紊流区的理论分界处，

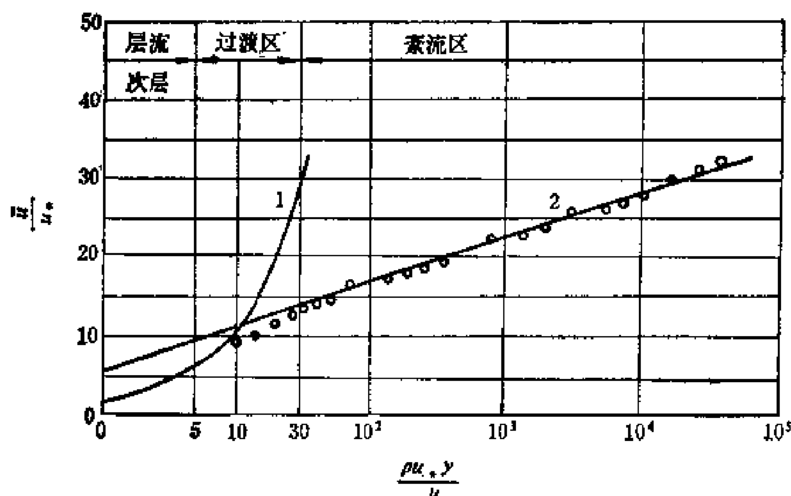


图5-10　光滑管中速度分布

该点在$\frac{\bar{u}}{u_*} = 11.6$处，也就是临界值$N = 11.6$，直线 2 的斜率为 5.75，因此得$\frac{1}{k} = \frac{5.75}{2.3} = 2.5$，或$k = 0.4$，由此可得$A = 5.5$。试验资料表明层流次层与紊流区并不是突然转变的，当$\frac{\rho u_* y}{\mu} \leqslant 8$时为层流次层，在$\frac{\rho u_* y}{\mu} > 30$才进入完全紊流区，中间为过渡层。各层的速度分布规律为

层流次层 $0 < \frac{\rho u_* y}{\mu} < 8$，　$\frac{u}{u_*} = \frac{\rho u_* y}{\mu}$

[1] Bakhmeteff B. A., The mechanics of turbulent flow, Princeton University Press, Princeton, N. J. 1941。

过渡层 $8<\frac{\rho u_* y}{\mu}\leqslant 30$，$\frac{u}{u_*}=-3.05+5\ \ln\frac{\rho u_* y}{\mu}$；

紊流区 $\frac{\rho u_* y}{\mu}>30$，$\frac{u}{u_*}=5.5+2.5\ \ln\frac{\rho u_* y}{\mu}$。

流体经过光滑平板时的速度分布与圆管情况基本相类似，在紊流区内 $N=11.6$，$k=0.417$，$A=5.84$。

普朗特尔曾建议指数型式的紊流速度分布公式

$$\frac{\bar{u}}{\bar{u}_{max}}=\left(\frac{y}{r}\right)^n \tag{5-21}$$

式中 $\bar{u}_{max}$ 为管道中心速度，r 为管道半径，指数 n 随雷诺数 Re 而异，在 $Re\approx 10^5$ 时 $n=\frac{1}{7}$，这时公式称为 1/7 方公式，是较常用的经验公式。

上面介绍的速度分布公式都是属于半经验或经验式，虽然它们与实际很逼近，但都有一定的缺点，因为在管道轴心处 $\frac{d\bar{u}}{dg}$ 应为零，但（5-20）和（5-21）式都不能给出零值。

上面讨论的是绝对粗糙度 ε 淹没在层流次层内，即 $\frac{\rho u_*\varepsilon}{\mu}<8$ 的情况，这时 ε 对流体运动的阻力没有影响，如果 $\frac{\rho u_*\varepsilon}{\mu}>30$ 则壁面粗糙度将穿过层流次层而进入紊流区，层流次层遭到破坏，粘性影响可忽略，阻力决定于粗糙度，其速度分布为

$$\frac{\bar{u}}{u_*}=B+2.51\ln\frac{y}{\varepsilon}$$

式中 B 为与 ε 有关的系数。

由（5-3）式可见，要计算摩阻系数 λ，必须求出平均流速 v，由于紊流的流速分布规律各层都不相同，需要分层计算，比较复杂，我们只能求得它的结构形式：

$$v=\frac{1}{\pi r^2}\int_0^r \bar{u}\cdot 2\pi(r-y)dy$$

分别将各层的速度 $\bar{u}$ 代入后积分可得

光滑管：
$$\frac{v}{u_*}=A_1+2.5\ \ln\frac{\rho u_* r}{\mu}$$

粗糙管：
$$\frac{v}{u_*}=B_1+2.5\ \ln\frac{r}{\varepsilon}$$

由（5-4）式得

$$\lambda=\frac{8\tau_0}{\rho v^2}=8\left(\frac{u_*}{v}\right)^2$$

或

$$\frac{v}{u_*}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}}$$

由此得

光滑管：
$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=A_s+0.86\ \ln(Re\sqrt{\lambda})$$

粗糙管：
$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=A_r\left(\frac{\varepsilon}{d}\right)-0.86\ \ln\frac{\varepsilon}{d}$$

根据尼古拉兹[1]的试验，光滑管的 $A_s=-0.8$，在人造粗糙管上 $A_r\left(\frac{\varepsilon}{d}\right)$ 基本上也是一个常数，约为 1.14[2]。如果上式中的自然对数改作常用对数则

光滑管：
$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=2\lg(Re\sqrt{\lambda})-0.8 \tag{5-22}$$

粗糙管：
$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=2\lg\frac{d}{\varepsilon}+1.14$$

或
$$\lambda=\frac{1}{\left(2\lg\frac{d}{\varepsilon}+1.14\right)^2} \tag{5-23}$$

（5-22）式称为卡门-普朗特尔公式，它的结构形式有一定的理论根据，而且又由实验资料确定系数，比较精确，缺点是计算不方便。勃拉修斯[3]收集了大量资料，提供了一个可在雷诺数 $Re<10^5$ 范围内使用的光滑管摩阻系数公式：

$$\lambda=0.3164/Re^{\frac{1}{4}} \tag{5-24}$$

尼古拉兹指出在 $10^4<Re<10^5$ 范围内，勃拉修斯公式最为精确，在 $10^5<Re<3\times10^6$ 范围内可以改用下式

$$\lambda=0.0032+\frac{0.221}{Re^{0.237}} \tag{5-25}$$

粗糙管用（5-23）式计算，该式是尼古拉兹根据人造粗糙管中的试验资料提供的，式中的绝对糙度 ε 是粘在管壁的沙粒尺寸。人造粗糙管中的 ε 是均匀的，而实际管道壁面粗糙度是不均匀的，我们是用试验方法求出完全紊流（λ 为恒定值）时的 λ 值，再用（5-23）式来确定各种实际管道的 ε，因此它只是一个当量值。各种实际管道的 ε 值如表 5-2 所示。

表5-2　各种管道的 ε 值

管道种类	ε，mm	管道种类	ε，mm
钢管	0.03～0.07	新铸铁管	0.2～0.4
铜管	0.001～0.002	旧铸铁管	0.5～1.5
涂锌铁管	0.1～0.2	砼管	0.3～3.0

在过渡区，实际管道与人造粗糙管的摩阻系数出现了差异，因为过渡区是介于光滑管和粗糙管之间，由粗糙管公式

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}+0.86\ \ln\frac{\varepsilon}{d}=1.14 \tag{5-26}$$

如果在光滑管公式等号两边各加 $0.86\ \ln\frac{\varepsilon}{d}$ 项，则

〔1〕Nikuradse J., Gesetzmassigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Rohren, VDI-Forschungsheft vol. 356, 1932.

〔2〕Nikuradse J., Strömungsgesetze in rauhen Rohren, VDI-Forschungsheft vol. 361, 1933.

〔3〕Blasius H., Das Aehnlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen in Flüssigkeiten, VDI-Forschungsheft vol. 131, 1913.

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}+0.86\ \ln\frac{\varepsilon}{d}=0.86\ \ln\left(Re\sqrt{\lambda}\frac{\varepsilon}{d}\right)-0.8 \tag{5-27}$$

以$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}+0.86\ \ln\frac{\varepsilon}{d}$为纵座标，$\ln\left(Re\sqrt{\lambda}\frac{\varepsilon}{d}\right)$为横座标则（5-26)为一水平线，(5-27）则为一斜率为0.86的直线，如图5-11所示。图上画出了实际商用管道和尼古拉兹人造粗糙管的试验曲线，两者在过渡区有较大的偏差，因此C. F. Colebrook[1] 建议实际管道采用下列紊流过渡区公式：

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=1.14-0.86\ \ln\left(\frac{\varepsilon}{d}+\frac{9.32}{Re\sqrt{\lambda}}\right) \tag{5-28}$$

图5-12为摩台[2]提供的实际管道摩阻系数图，图中过渡区的λ系按（5-28）计算的。

最后，我们总结紊流的主要规律如下：

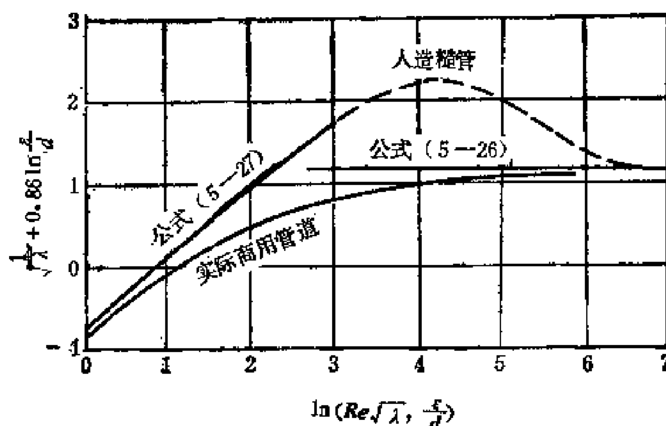


图5-11　实际管道与人造管道的比较

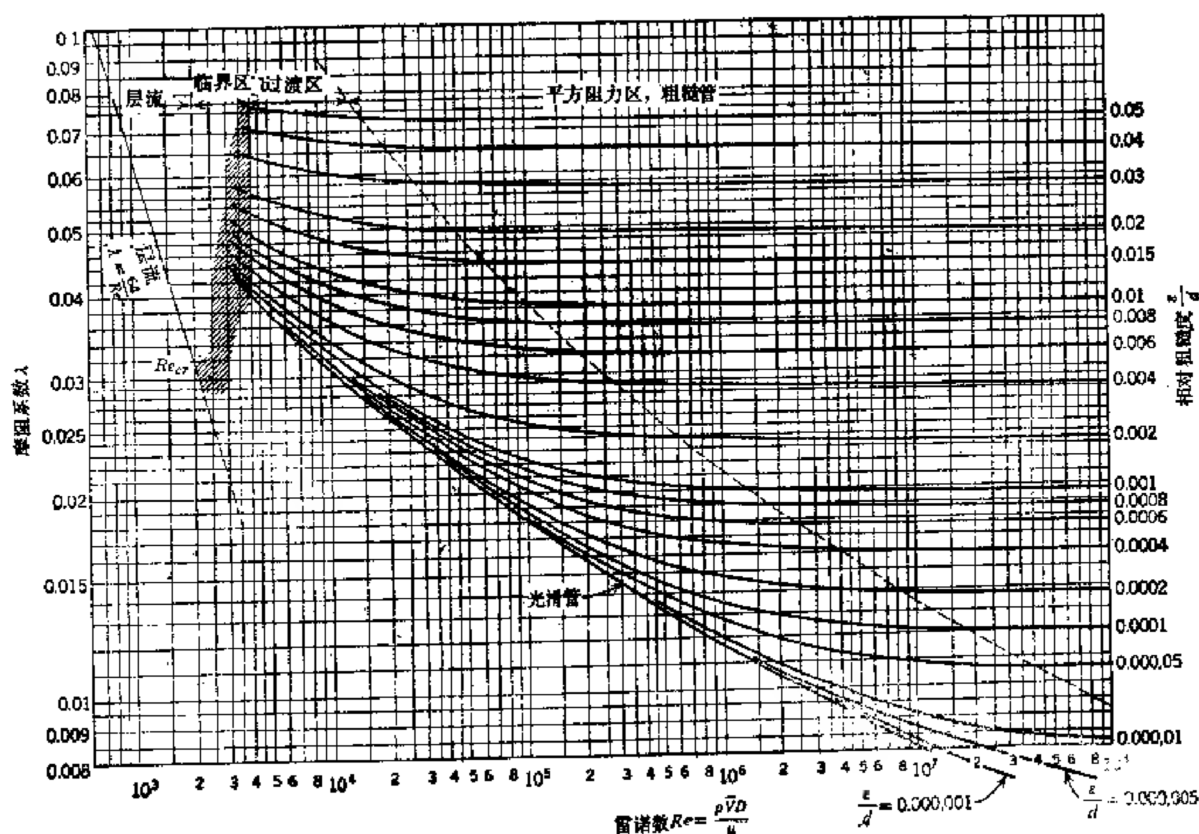


图5-12　摩阻系数λ

〔1〕 Colebrook C. F., Turbulent Flow in Pipes, with Particular Reference to the Transition Region between the smooth and Rough Pipe Laws, J. Inst. Civil Engrs. London vol. 11 pp. 133～156 1938～1939。

〔2〕 Moody L. F., Friction Factor for Pipe Flow, Trans. ASME V. 66 N. 8 1944 pp. 671～684。

（1）紊流时能量损失 $h_l = \lambda \frac{\rho}{d} \frac{v^2}{2g}$；

（2）紊流时阻力主要由质点混杂产生动量交换而引起；

（3）紊流时根据层流次层是否淹没壁面糙度而有光滑管与粗糙管之分；

（4）在光滑管时，当 $Re<10^5$ 则 $\lambda = \frac{0.3164}{Re^{1/4}}$，由此得 h_l 与速度 v 的1.75次方成正比；

（5）在光滑管与粗糙管之间的过渡区 h_l 与速度的1.75～2次方成正比；在粗糙管时 λ 与 Re 数无关，则 h_l 与速度平方成正比，我们也常把粗糙管领域称为平方阻力区。由此可见当雷诺数 Re 足够大时，流动进入平方阻力区，这时 λ 与 Re 数无关，也就是阻力与 Re 数无关，因此粘性力相似并不必须要求 Re 数相等，在相似理论中称为自模区。

*§5-5 异形管道中的流动

有时我们会遇到非圆形断面的管道，例如同心环形断面管，椭圆断面管，矩形断面管和等边三角形断面管等，紊流时根据席勒[1]和尼古拉兹[2]的试验，只要采用水力直径代替圆管的直径，在光滑管范围内阻力系数 $\lambda = \frac{0.3164}{Re^{1/4}}$，即异形管道在紊流光滑管时的压降 Δp，流量 Q 可按圆管规律计算，但层流时的情况却不同，阻力系数随断面形状而异[3]。

层流时，上述各种异形断面管中，除了同心环形断面管内的流动仍保持轴对称，(5-7)式仍能适用外，其他各种管道内的流动情况都比较复杂，我们只给出管内流速分布和流量计算公式。

对于半径为 r_1 及 r_2 的同心环形断面管，由（5-7）式可以求出速度分布，式中的积分常数由边界条件确定：当 $r=r_1$ 及 $r=r_2$ 时，$u=0$，由此可得

$$C_1 = \frac{\Delta p}{4\mu l} \frac{(r_1^2 - r_2^2)}{\ln\frac{r_1}{r_2}}$$

$$C_2 = -\frac{\Delta p}{4\mu l}\left[\frac{(r_1^2 - r_2^2)\ln r_1}{\ln\frac{r_1}{r_2}} - r_1^2\right]$$

由此可得

$$u = \frac{\Delta p}{4\mu l}\left[(r_1^2 - r) + \frac{(r_1^2 - r_2^2)}{\ln\frac{r_1}{r_2}}\ln\frac{r}{r_1}\right]$$

流量 Q 为

---

[1] Schiller L., Über den Strömungswiderstand von Rohren Verschiedenen Querschnitts-und Rauhigkeitsgrades, ZAMM v. 3, 1923 pp. 2～13.

[2] Nikuradse J., Turbulente Strömung in nicht Kreisförmigen Rohren, Ing-Arch. v. 1 1930 pp. 306～332.

[3] Schlichting H., Boundary-Layer Theory, 6th ed. McGraw-Hill Book co. 1968 p. 575.

$$Q=\int_{r_2}^{r_1}2\pi urdr=2\pi\int_{r_2}^{r_1}\frac{\Delta p}{4\mu l}\left[(r_1^2-r)+\frac{(r_1^2-r_2^2)}{\ln\frac{r_1}{r_2}}\ln\frac{r}{r_1}\right]rdr$$

$$=\frac{\pi\Delta p}{8\mu l}\left[(r_1^4-r_2^4)-\frac{(r_1^2-r_2^2)^2}{\ln\frac{r_1}{r_2}}\right]$$

对于长轴为 a，短轴为 b 的椭圆断面（图 5-13 a）管道内的流速分布和过流量[1]为

$$u=\frac{\Delta p a^2b^2}{2\mu l(a^2+b^2)}\left(1-\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}\right)$$

$$Q=\frac{\pi\Delta p}{4\mu l}\;\frac{a^3b^3}{a^2+b^2}$$

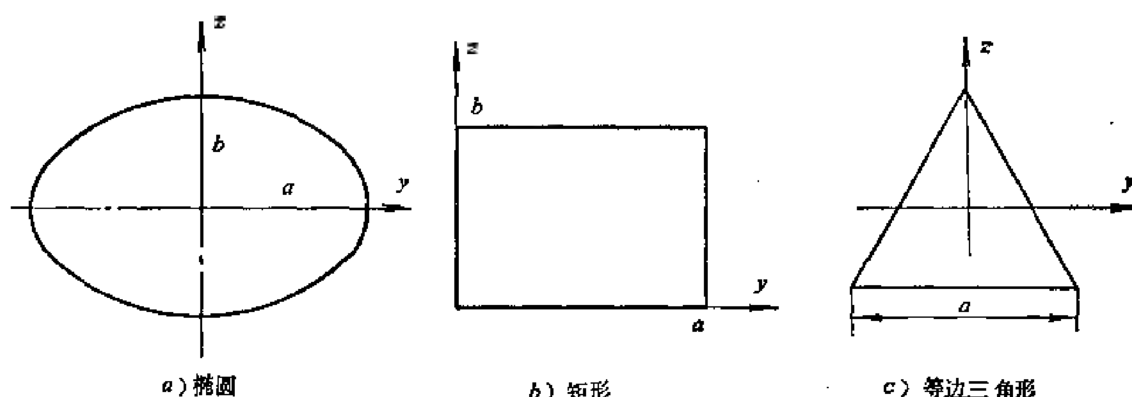


图5-13　异形断面管

对于边长为 a 及 b 的矩形断面管（图 5-13 b）内的流速分布和流量为

$$u=-\frac{\Delta p}{2\mu l}y(y-a)+\sum_{m=1}^{\infty}\sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right)\left(A_m\mathrm{ch}\frac{m\pi z}{a}+B_m\mathrm{sh}\frac{m\pi z}{a}\right)$$

式中

$$A_m=\frac{a^2\Delta p}{\mu m^3\pi^3 l}(\cos m\pi-1)$$

$$B_m=-\frac{A_m\left(\mathrm{ch}\frac{mb}{a}\pi-1\right)}{\mathrm{sh}\frac{mb}{a}\pi}$$

$$Q=\frac{\Delta p}{24\mu l}ab(a^2+b^2)-\frac{8\Delta p}{\pi^5\mu l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^5}\left[a^4\mathrm{th}\left(\frac{2n-1}{2a}\pi b\right)\right.$$

$$\left.+b^4\mathrm{th}\left(\frac{2n-1}{2b}\pi a\right)\right]$$

如果边长为 a 的正方形断面，即 $a=b$，则流量 Q 为

[1] Happel J. & Branner H., Low Reynolds number Hydrodynamics, prentice-Hall 1965.

$$Q=\frac{\Delta p a^4}{12\mu l}\left[1-\frac{192}{\pi^5}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)}\operatorname{th}\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)\right]$$

$$=\frac{0.035144}{\mu l}\Delta p a^4$$

当断面积相等时，正方形断面管的流量比圆管为小，两者之比为0.88327。因为正方形断面的水力直径$d_H=\frac{4a^2}{4a}=a$，平均流速$v=\frac{Q}{A}=\frac{Q}{a^2}$，所以压降$\Delta p=\frac{\mu l Q}{0.035144a^4}=\frac{\mu l v}{0.035144a^2}$，则

$$\frac{\Delta p}{\rho g}=\frac{57}{\frac{\rho v d_H}{\mu}}\frac{l}{d_H}\frac{v^2}{2g}=\frac{57}{Re}\frac{l}{d_H}\frac{v^2}{2g}$$

即层流时正方形断面管道的阻力系数$\lambda=\frac{57}{Re}$。

边长为a的等边三角形断面流道（图5-13c）内的流速分布和流量为

$$u=\frac{\sqrt{3}\Delta p}{6\mu a l}\left(z-\frac{a}{2\sqrt{3}}\right)\left(z+\sqrt{3}y-\frac{a}{\sqrt{3}}\right)\left(z-\sqrt{3}y-\frac{a}{\sqrt{3}}\right)$$

$$Q=\frac{\sqrt{3}\Delta p a^4}{320\mu l}=\frac{\Delta p a^4}{185\mu l}$$

对于等边三角形断面积$A=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$，水力直径$d_H=\frac{a}{\sqrt{3}}$则压降Δp为

$$\Delta p=\frac{320\mu l Q}{\sqrt{3}a^4}=\frac{320\mu l Q}{(\sqrt{3})\left(\frac{4A}{\sqrt{3}}\right)(3d_H^2)}=\frac{80}{3}\frac{\mu l v}{d_H^2}$$

所以

$$\frac{\Delta p}{\rho g}=\frac{160}{3\frac{\rho v d_H}{\mu}}\frac{l}{d_H}\frac{v^2}{2g}=\frac{53.3}{Re}\frac{l}{d_H}\frac{v^2}{2g}$$

即

$$\lambda=\frac{53.3}{Re}$$

§5-6　进口起始段

如果流体从一个大容器流入管道，设入口处呈圆角则在进口段面$a-a$处（图5-14）的流速分布将非常均匀，由于粘性的关系，近壁处产生附面层，附面层沿着流动方向逐渐向管轴扩展。在附面层内流速向管壁递减为零，根据连续性原理，附面层内流速的减小，必将使中部的流速增加，因此沿流动方向的各断面上速度分布不断改变，在离进口处距离为l_1的$c-c$断面上，附面层已基本上扩展至管轴，这个断面上中心处最大流速已等于完全扩展段断面上最大流速的98～99%，所以可以认为在该断面处流动基本上已完全扩展。从进口处至$c-c$断面的距离l_1称为起始段长度。由于起始段内断面上的流速分布与完全扩展段中不同，而

且流速分布又不断改变，因此，起始段中的能量损失与完全扩展段中有所不同。

紊流时由于流体质点的混杂，断面流速分布比较均匀，起始段长度 l_1 较小，约为 $l_1 \approx 30d$，实际上离进口约 12 d 时附面层已扩展至接近管轴，附面层的继续扩展就非常缓慢，在离进

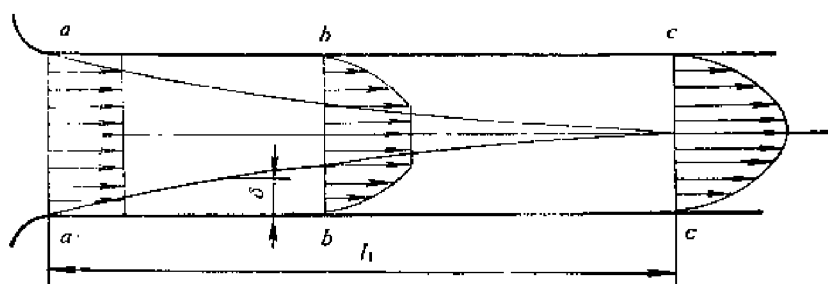


图5-14 起始段

口约 15 d 以后，摩阻系数 λ 已与完全扩展段相同[1]，这就是说紊流起始段很短，影响也小，一般情况下可以忽略不计。

层流时起始段长度 l_1 较大，约为 $l_1/d = 0.058Re$[2]，起始段内除了由粘性摩擦引起的损失外，还由于流体动能变化（从进口处的 $v^2/2g$ 逐渐增大至 $2v^2/2g$）而导致附加损失，设起始段内附加的压强损失为 $k\frac{\rho v^2}{2}$，则考虑起始段影响后的总损失为

$$\Delta p' = p_1 - p_2 = \frac{32\mu l v}{d^2} + k\frac{\rho v^2}{2}$$

由理论分析和实验结果 k 值约为 1.16～1.33[2][3]，我们取 $k = 1.28$。

在液压技术中，要考虑层流起始段影响的地方往往是一个细小孔道（例如阻尼孔）连通二个断面较大的容腔（图 4-15），进口容腔处取 $s-s$ 断面，下游出口容腔中取 $d-d$ 断面，它们的压强速度各为 p_s，v_s，p_d 及 v_d，孔道进口为 1-1 断面，出口为 2-2 断面，它们的压强各为 p_1 及 p_2，速度为 v，列出进口容腔 $s-s$ 断面与孔道进口处的柏努利方程得

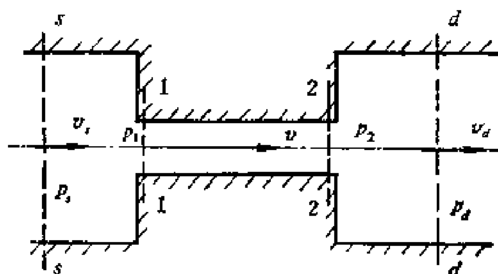


图5-15 起始段的例子

$$\frac{p_s}{\rho g} + \frac{\alpha_s v_s^2}{2g} = \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha v^2}{2g} + \zeta_1\frac{v^2}{2g}$$

式中 ζ_1 为进口局部阻力系数，因为进口处流速分布是均匀的，所以 $\alpha = 1$，则

$$p_s = p_1 + (1 + \zeta_1)\rho\frac{v^2}{2} - \rho\frac{\alpha_s v_s^2}{2}$$

流道出口断面 2-2 与下游出口容腔断面 $d-d$ 之间的流体运动是突然扩大的过程，由动量定理得

$$\rho Q(\beta_2 v - \beta_d v_d) = (p_d - p_2)A_d$$

式中 β 为动量修正系数，在完全扩展为层流时 $\beta = 4/3$，否则 β 就向 1 接近。A_d 为出口容

[1] Wang J. S. &Tullis J. P. ,Turbulent Flow in the Entry Region of a Rough Pipe, J. of Fluids Engng.v. 96 N. 1 1974.

[2] Langhaar H. L. , Steady Flow in the Transition length of Straight Tube, J. Appl. Mech. v. 9 N.22 1942.

[3] Lundgren T. S. , Sparrow E. M. & Starr J. B. , Pressure Drop due to the Entrance Region in Ducts of Arbitrary Cross Section, J. of Basic Engng. Trans. ASME series D v. 86 N. 3 1964.

腔断面积。由此得

$$p_d = p_2 + \frac{\rho Q}{A_d}(\beta_2 v - \beta_d v_d) = p_2 + \rho v_d(\beta_2 v - \beta_d v_d)$$

因此

$$\Delta p = p_s - p_d = p_1 + (1 + \zeta_1)\rho\frac{v^2}{2} - \rho\frac{\alpha_s v_s^2}{2} - p_2 - \rho v_d(\beta_2 v - \beta_d v_d)$$

由连续性方程

$$v_d = \left(\frac{d}{D_d}\right)^2 v = m_d^2 v; \qquad v_s = \left(\frac{d}{D_s}\right)^2 v = m_s^2 v$$

代入上式得

$$\Delta p = p_s - p_d = p_1 - p_2 + [1 + \zeta_1 - \alpha_s m_s^4 - 2m_d^2(\beta_2 - \beta_d m_d^2)]\rho\frac{v^2}{2}$$

$$= \Delta p' + [1 + \zeta_1 - \alpha_s m_s^4 - 2m_d^2(\beta_2 - \beta_d m_d^2)]\rho\frac{v^2}{2}$$

或

$$\Delta p = \left[\frac{64}{Re}\frac{l}{d} + (k + 1 + \zeta_1) - \alpha_s m_s^4 - 2m_d^2(\beta_2 - \beta_d m_d^2)\right]\rho\frac{v^2}{2} \qquad (5\text{-}29)$$

如果容腔直径 D_s 或 D_d 比孔道直径大得多，则（5-29）式中最后两项可以忽略不计，如果进口处有倒角，则进口阻力系数 ζ_1 也比（1 + k）小得多，可以不计则

$$\Delta p = \left[\frac{64}{Re}\frac{l}{d} + (1 + k)\right]\rho\frac{v^2}{2} = \left(\frac{64}{Re}\frac{l}{d} + \xi\right)\rho\frac{v^2}{2} \qquad (5\text{-}29a)$$

式中 $\xi = 1 + k$。因为 $\frac{64}{Re}\frac{l}{d}\frac{\rho v^2}{2} = \frac{32\mu l v}{d^2}$，并以 $v = Q/\frac{\pi}{4}d^2$ 代入得

$$\Delta p = \frac{128\mu l Q}{\pi d^4}\left[1 + \xi\frac{Re}{64}\left(\frac{d}{l}\right)\right] = c\frac{128\mu l Q}{\pi d^4} \qquad (5\text{-}30)$$

式中 $c = 1 + \xi\frac{Re}{64}\left(\frac{d}{l}\right)$，为层流起始段的修正系数。$\xi$ 的近似值为

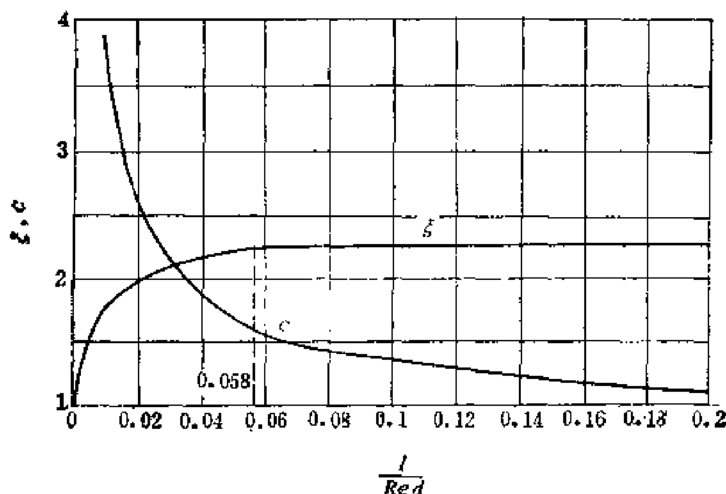


图5-16 层流起始段的 ξ 及 c 值

$$\left.\begin{aligned} \xi &= 1+2.62\left(\frac{l}{Red}\right)^{1/4} & \left(\frac{l}{Red}\leqslant 0.058\right) \\ \xi &= 2.28 & \left(\frac{l}{Red}>0.058\right) \end{aligned}\right\} \tag{5-31}$$

图 5-16 为系数 ξ、c 与 $\frac{l}{Red}$ 的关系。

考虑层流起始段影响后，通过圆管或阻尼孔道的流量 Q 为

$$Q=\frac{\pi d^4}{128\mu lc}\Delta p$$

§5-7 局部损失

我们已经讨论了等断面直管的阻力和能量损失，但输送流体的管道决不是只由等断面直管所组成，而且为了通向一定的地方和控制流量的大小和流动方向，管路上要装置很多弯头、三通、缩接、阀门等管道附件和控制件。流体在这些附件和控制件内，或者被迫改变流速大小，或者被迫改变流动方向，或者两者兼而有之，从而干扰了流体的正常运动，产生了撞击、分离脱流、旋涡等现象，带来了附加的阻力，增加了能量损失。由于这些零件中流体的运动比较复杂，影响因素较多，除少数几种能在理论上作一定的分析外，一般都依靠实验方法求得实用的系数。

流体在管道附件和控制件中受到的干扰基本上可分为二类，一类是由于断面积变化，包括断面收缩和扩大等，另一类是流动方向变化如弯头。下面我们将对几种典型的管道附件进行分析，凡是由实验方法求得的局部阻力系数可以查阅有关手册，这里不再一一罗列。

1. 断面收缩

流道断面收缩有两种，即断面突然收缩和断面逐渐收缩。流道断面逐渐收缩时，按连续性原理，流速增大，由柏努利方程可知，压强将沿流向降低，即压强梯度 $\frac{dp}{dx}$ 为负值，这样将使由于流体粘性的作用，被壁面阻滞的近壁流体质点获得了新的前进推动力，保证流体不产生与壁面分离（脱流）的倾向。但如果收缩的角度 θ 太大，而且断面有突变，则由于流线不能转折，将形成流股收缩，在突变断面后出现局部分离脱流（图 5-17），然后再附壁。

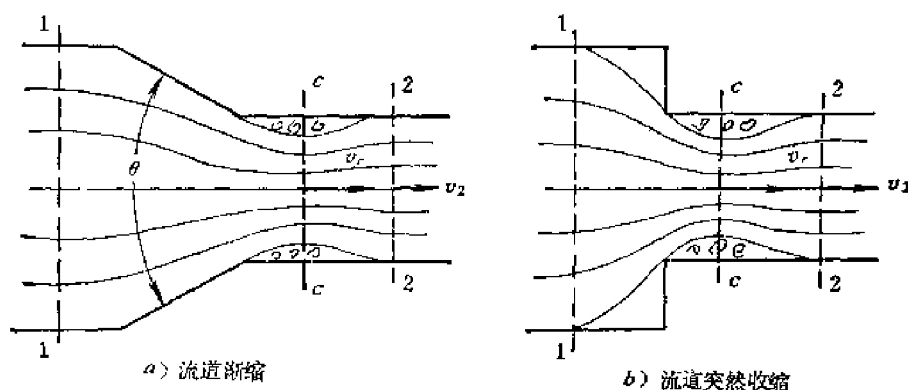


图5-17 流道收缩

极限情况是 $\theta = 180^\circ$，即为突然收缩。我们以突然收缩为例分析如下：

在突然收缩的情况下，流体经过锐缘的突变断面处，流股发生收缩，至 $c-c$ 断面（图 5-17 b）后逐渐扩散。由此可见，在收缩流道中，流体不仅有加速的收缩流而且也有减速的扩散流，两者都产生阻力，并且以后者为主。我们先讨论收缩流。设流体从 1-1 断面流至 $c-c$ 断面没有能量损失，这时 $c-c$ 断面处的理想平均流速为 v_0，则由柏努利方程

$$\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} = \frac{\alpha_0 v_0^2}{2g} + \frac{p_c}{\rho g}$$

实际上 1-1 断面至 $c-c$ 断面间虽然能量损失很小，但还是有一点影响，设实际的能量损失为 h_{m1}，由于存在 h_{m1}，$c-c$ 断面的平均流速 v_c 要比 v_0 稍小一些，它们的比值 $v_c/v_0 = C_v$，称为流速系数，一般约为 0.99～0.97。因此考虑有能量损失的柏努利方程为

$$\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} = \frac{\alpha_c v_c^2}{2g} + \frac{p_c}{\rho g} + h_{m1}$$

上述两个柏努利方程的比较，我们可得

$$h_{m1} = \frac{\alpha_0 v_0^2 - \alpha_c v_c^2}{2g} = \left(\frac{\alpha_0}{C_v^2} - \alpha_c\right)\frac{v_c^2}{2g}$$

在紊流时 $\alpha_0 = \alpha_c = 1$，则

$$h_{m1} = \left(\frac{1}{C_v^2} - 1\right)\frac{v_c^2}{2g}$$

设 $c-c$ 断面处流股断面积 A_c 与 2-2 断面处管道断面积 A_2 之比为收缩系数 C_c 即 $A_c/A_2 = C_c$，则

$$h_{m1} = \frac{1}{C_c^2}\left(\frac{1}{C_v^2} - 1\right)\frac{v_2^2}{2g}$$

现在我们来讨论 $c-c$ 断面至 2-2 断面间的能量损失。这一段是扩散流道，可用连续性方程，动量方程和能量方程进行分析。

由柏努利方程，设能量损失为 h_{m2} 则

$$h_{m2} = \frac{p_c}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_c v_c^2 - \alpha_2 v_2^2}{2g}$$

由动量方程

$$(p_c - p_2)A_2 = \rho Q(\beta_2 v_2 - \beta_c v_c)$$

因为 $Q = A_c v_c = A_2 v_2$，所以

$$p_c - p_2 = \rho\left(\beta_2 v_2^2 - \frac{A_c}{A_2}\beta_c v_c^2\right) = \rho v_2^2(\beta_2 - \beta_c/C_c)$$

代入上式得

$$h_{m2} = \frac{v_2^2}{g}(\beta_2 - \beta_c/C_c) + (\alpha_c/C_c^2 - \alpha_2)\frac{v_2^2}{2g}$$

在紊流情况下，$\alpha_c = \alpha_2 = \beta_c = \beta_2 = 1$，则

$$h_{m2} = \frac{v_2^2}{g}\left(1 - \frac{1}{C_c}\right) + \left(\frac{1}{C_c^2} - 1\right)\frac{v_2^2}{2g} = \left(\frac{1}{C_c} - 1\right)^2\frac{v_2^2}{2g}$$

总的能量损失为 h_{m1} 与 h_{m2} 之和，即

$$h_m = h_{m1} + h_{m2} = \left[\frac{1}{C_c^2}\left(\frac{1}{C_v^2} - 1\right) + \left(\frac{1}{C_c} - 1\right)^2\right]\frac{v_2^2}{2g}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{C_c^2 C_v^2} - \frac{2}{C_c}\right)\frac{v_2^2}{2g} = \zeta\frac{v_2^2}{2g}$$

由此得突然收缩时局部阻力系数 ζ 为

$$\zeta = 1 + \frac{1}{C_c^2 C_v^2} - \frac{2}{C_c} \tag{5-32}$$

J. Weisbach[1]由实验求得的收缩系数 C_c 如表 5-3 所示。M. Merriman[2]根据实验数据，提供下列经验公式

$$C_c = 0.582 + \frac{0.0418}{1.1 - d_2/d_1}$$

表5-3　断面突然收缩的 C_c 及 ζ

A_2/A_1	0.01	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.9	1.00
Weisbach C_c	0.618	0.624	0.632	0.643	0.659	0.681	0.712	0.755	0.813	0.892	1.00
Merriman C_c	0.623	0.635	0.646	0.660	0.671	0.688	0.710	0.741	0.785	0.858	1.00
C_v	0.98	0.982	0.984	0.986	0.988	0.990	0.992	0.994	0.996	0.998	1.00
ζ	0.49	0.458	0.396	0.364	0.317	0.264	0.197	0.126	0.078	0.02	0

表 5-3 也列出了 Merriman 的 C_c 数据，与 Weisbach 的数据有一定的偏差。表中 C_v 为估计值，局部阻力系数则根据 Weisbach 的数据按（5-32）式算得。由表中数值可见，当 $A_2/A_1 = 0.01$ 时 $\zeta = 0.49$，所以我们把流体从大容器流入锐缘进口的管道时的进口局部损失系数为 0.5。如果进口处呈光滑的圆角，则流体进入管道后流股不产生收缩，$C_c = 1$，因此 $\zeta = 1 + \frac{1}{C_v^2} - 2 = 0.04 \sim 0.06$，有时也可忽略不计。

2. 断面扩大

扩散管道中的流动情况是流速沿流向降低，压强增大，由于粘性的影响，靠近壁面处流速较小，如果动能不足以克服正的压强梯度，则流体将在近壁面处发生滞止、倒流而引起与壁面分离脱流，产生旋涡而增加能量损失。显然，θ 角的增加使压强梯度增大而增加了分离脱流损失。扩散长度和扩散率(与 θ 有关)对能量损失都有影响，如果 θ 角很小(扩散率很小)虽不会产生脱流，但要达到一定的扩散面积比，就要增大扩散长度而增大损失；反之，长度虽然减小，但分离脱流阻力增大也增大损失，所以扩散角 θ 有最佳值。一般能量损失最小的扩散角约 6°～16°，而扩散角在 60°左右损失最大，当 $\theta = 180°$ 时即为突然扩大。断面突然扩大的能量损失 h_m 已在第四章 11 节中叙述，（4-53）式为

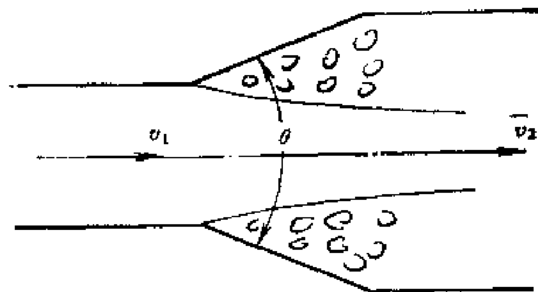


图5-18　扩散流道

[1] Weisbach J., Die Experimental-Hydraulik, Engelhardt, Freibury, 1855, p. 133.

[2] Merriman M., Treatise on Hydraulics 10th ed. John Wiley & Sons Inc., 1916, p. 183.

$$h_m = h_f = \frac{\alpha_1 v_1^2 - 2\beta_1 v_1 v_2 + (2\beta_2 - \alpha_2) v_2^2}{2g}$$

在紊流时 $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 1$ 则

$$h_m = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g} = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \frac{v_1^2}{2g} = \left(\frac{A_2}{A_1} - 1\right)^2 \frac{v_2^2}{2g}$$

或写成

$$\left.\begin{aligned} h_m &= \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \frac{v_1^2}{2g} = \zeta_1 \frac{v_1^2}{2g} \\ h_m &= \left(\frac{A_2}{A_1} - 1\right)^2 \frac{v_2^2}{2g} = \zeta_2 \frac{v_2^2}{2g} \end{aligned}\right\} \tag{5-33}$$

当管道与一大容器接通，管内流体向容器出流，这时 $A_2 \gg A_1$，我们可以近似地认为 $v_2 \approx 0$，$A_1/A_2 \approx 0$，则在层流时 $\zeta_1 = 2$，在紊流时 $\zeta_1 \approx 1$。

A. H. Gibson[1]在 $A_2/A_1 = 2 \sim 12$，d_1 和 d_2 在 12.5～150mm 的管道中用水进行试验，发现突然扩大的局部阻力系数 ζ_1 或 ζ_2 将随着 A_2/A_1 的增大和 A_1 的减小而有所增大，他建议用附加的系数 k 来修正，即

$$h_m = k \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g}$$

或写成

$$\zeta_1 = k(1 - A_1/A_2)^2$$

$$\zeta_2 = k\left(\frac{A_2}{A_1} - 1\right)^2$$

式中系数 $k = 1.025 + 0.0025\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 - 0.0008 d_1$，这里 d_1 以 mm 计。这是一个根据试验资料求得的经验公式，它只能适用于与试验条件近似的情况。例如 d_2/d_1 很大时将给出过大的 k 值，当 $d_2/d \to \infty$ 时，$k \to \infty$ 这显然是不合理的。

W. H. Archer[2] 在加州理工学院的水力实验室用直径为 25～76mm 的光滑铜管组成 A_2/A_1 为 1.451、2.077、2.995、6.46 及 9.32 的突然扩大方案进行试验，试验流速为 1.16～9.6m/s，根据试验数据求得突然扩大局部能量损失的经验公式：

$$h_m = 1.08 \frac{(v_1 - v_2)^{1.919}}{2g}$$

渐扩管的局部能量损失为

$$h_m = k \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g}$$

系数 k 与扩散角有关，A. H. Gibson[1]提供的试验数据如图 5-19 所示。由图可见，圆管的扩散角 $\theta \approx 5^\circ \sim 7^\circ$ 时阻力最小，k 值约为 0.135，当 $\theta \approx 55^\circ \sim 80^\circ$ 间阻力最大。长方形断面的管道最小阻力在 $\theta \approx 10^\circ$ 左右，k 值约为 0.17～0.18，正方形管道则 $\theta = 7^\circ \sim 8^\circ$ 时阻力

[1] Gibson A. H., The Conversion of Kinetic to pressure energy in the flow of water through passage having divergent boundaries, Engineering vol. 93, 1912, p. 205.

[2] Archer W. H., Experimental determination of loss of head due to sudden enlargement in circular pipes, Trans. ASCE. 1913, pp. 999～1026.

最小，k 值约为0.145。

3．弯管

在弯管中壁面强使流体的流速方向改变，使流体受到向心（向弯头中心线曲率半径的中心）加速度 a_r，这样，流体在曲率半径方向的单位质量力 $R = a_r$，半径方向的平衡方程为：$R - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = 0$，可得在曲率半径方向正的压强梯度，因此速度将随着曲率半径增大而减小。当流体进入弯管时在外缘 A 处开始为减速流，即 $\frac{dp}{dx} > 0$，易于产生脱流，而在内缘则 $\frac{dp}{dx} < 0$ 为加速流，到 B 点处压强为最小，以后压强又逐渐恢复，所以 B 点以后 $\frac{dp}{dx} > 0$，又将产生脱流现象，形成旋涡而造成能量损失。此外，由于弯管外缘与内缘的压差，使壁面附近主流方向速度较低的质点将沿壁面由高压处流向低压处，而在断面中央出现回流，这样就造成一个双旋涡形式的二次流动（图5-20），这个流动与主流叠加起来就使整个流动呈螺旋状，因此弯管中的流体运动非常复杂，只能用实验方法求得阻力系数。

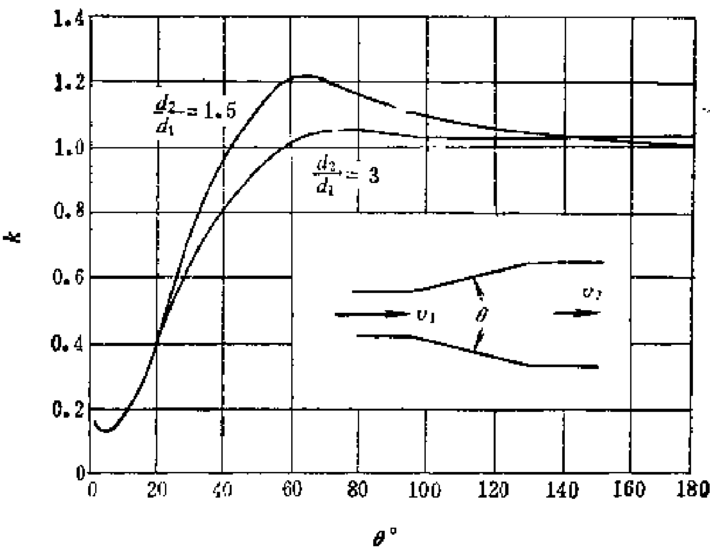


图5-19　系数 k

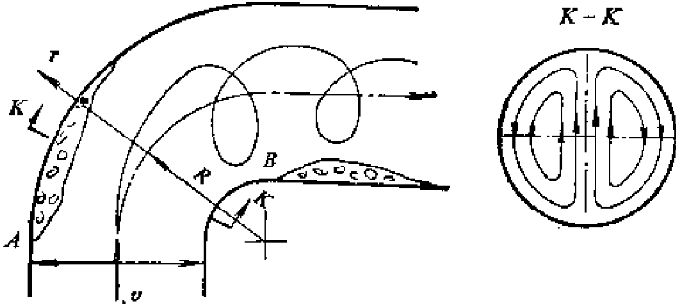


图5-20　弯管

弯管的能量损失应与流速方向改变的角度 θ 成比例，

$$h_m = \zeta \frac{v^2}{2g} = k \frac{\theta^\circ}{90} \frac{v^2}{2g} \tag{5-34}$$

系数 k 按 Weisbach 的试验数据可得如下的经验公式[1]

$$k = 0.131 + 0.159\left(\frac{d}{\rho}\right)^{3.5}$$

式中 ρ 为弯管中线的曲率半径，d 为管径，不同的 d/ρ 时的 k 值如表5-4所示。

表5-4　弯头的 k 值

d/ρ	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2
k	0.131	0.138	0.158	0.206	0.294	0.440	0.661	0.977	1.41	1.98

标准的肘管 $d/\rho \approx 1.5$，$\theta = 90^\circ$，所以局部阻力系数可取为 $\zeta = 0.9$。

〔1〕 Wechmann A., Hydraulik, Veb verlag Technik, Berlin, 1955, p. 102。

折管的局部阻力系数 ζ 如表 5-5 所示。

表5-5 折管局部阻力系数ζ[1]

θ	22.5°	30°	45°	60°	90°
光滑ζ	0.07	0.11	0.24	0.47	1.13
粗糙ζ	0.11	0.17	0.32	0.18	1.27

其他常见的局部阻力系数 ζ 如表 5-6 所示。

表5-6 局部阻力系数ζ[2, 3]

$\zeta=0.1$	$\zeta=8\sim16$
$\zeta=1.3$	$\zeta=2.5$
$\zeta=1.3$	$\zeta=1.5$
$\zeta=0.5$	$\zeta=1.8$
$\zeta=3.0$	$\zeta=2.3$
$\zeta=3\sim10$	

[1] Kirchbach & Schubart, Widerstand in Kniestücken und Krümmer, Mitt. des Hydraulischen Instituts der TH München.

[2] O+P, Jr. 19 Nr 4 1975.

[3] Ebertshäuser H., Grundlagen der Ölhydraulik, krausskopf verlag, 1973 p. 66.

§5-8 管路计算

管道与附件连接起来成一整体称为管路，管路内的能量损失由沿程损失和局部损失组成，如果管路中能量损失主要由沿程阻力产生，局部损失和速度头之和与沿程损失相较，可以略而不计的称为长管，否则称为短管。一般供水系统大都属于长管，而液压领域中则多数属短管范畴。

根据组成管路的结构，又可分为没有分支管的简单管路，和有分支管的复杂管路，复杂管路包括分而不合的分歧管路（图5-21 *b*）和闭合的环状管路（图5-21 *c*）。

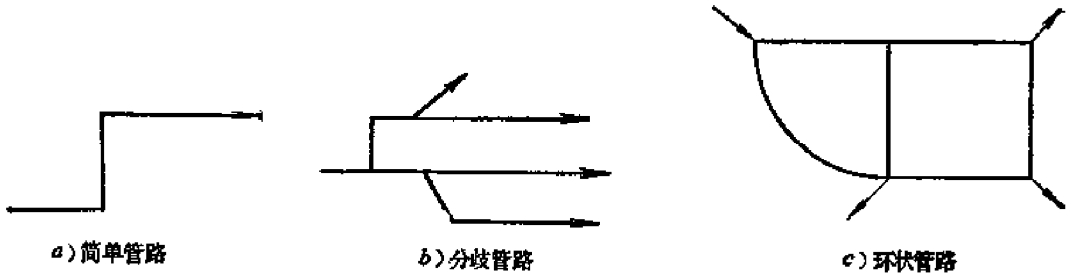


图5-21 管路分类

管路计算中有关的参数是输送管道长度 l，管道直径 d，所需水头 H 或压强损失 Δp 和输送流量 Q（包括复杂管路中流量分配）。根据实际情况，长度 l 往往是已知的，因此管路计算可归结为三种类型：

（1）已知 Q、l、d 求所需水头 H 或压差 Δp；

（2）已知 l、d、H 或 Δp 求 Q；

（3）已知 Q、l、H 或 Δp 求 d。

管道直径往往可以根据推荐的管内流速 v 来计算，即 $d=\sqrt{\frac{4Q}{\pi v}}$，如果流量 Q 以 l/min 计，v 以 m/s 计，d 以 mm 计，则

$$d=10^3\left(\frac{4Q}{60\times 10^3\pi v}\right)^{\frac{1}{2}}=4.63\sqrt{\frac{Q}{v}}$$

推荐流速 v 如表5-7。

表5-7 推荐流速

项　　目	平均流速 v，m/s
液压泵吸油管道	小于1～2，一般常取1m/s以下
液压系统压油管道	小于3～6，压强高，管道短粘度小取大值
液压系统回油管道	小于1.5～2.6
给水系统市内总管	1～1.5
给水系统室内管道	1～2

根据上述推荐流速，液压系统管道中的流动基本上属于紊流光滑管范畴，有时也可能出现层流。给水系统管道内流动则属紊流粗糙管范畴。下面我们对各种管路作简略的讨论。

1. 短管

我们先讨论没有分支的短管，并以传动管路为例（图 5-22），列出 $a-a$ 至 $b-b$ 的柏努利方程：

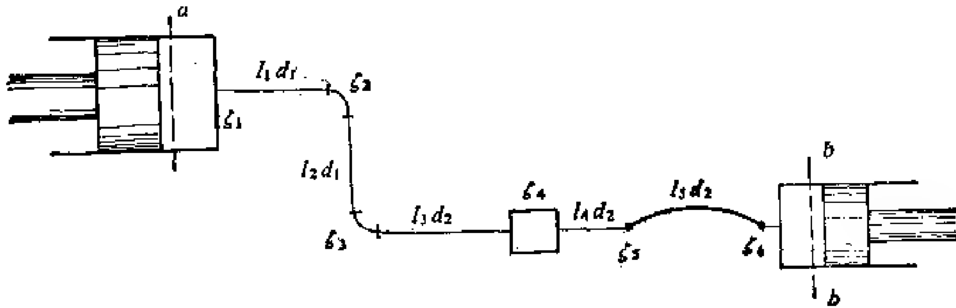


图5-22 短管的例子

$$\frac{p_a}{\rho g}+\frac{\alpha_a v_a^2}{2g}+z_a=\frac{p_b}{\rho g}+\frac{\alpha_b v_b^2}{2g}+z_b+h_f$$

或

$$\frac{\Delta p}{\rho g}=\frac{p_a-p_b}{\rho g}=\left(\frac{\alpha_b v_b^2}{2g}-\frac{\alpha_a v_a^2}{2g}\right)+(z_b-z_a)+h_f$$

式中等号右边二个括号内的数值均为小量，可以略而不计，则

$$\frac{\Delta p}{\rho g}=h_f=\Sigma\lambda\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}+\Sigma\zeta\frac{v^2}{2g} \tag{5-35}$$

先计算沿程损失，由图 5-22 所示，管路中有 d_1 及 d_2 两种直径的管道，所以

$$\Sigma\lambda\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}=\lambda_1\left(\frac{l_1+l_2}{d_1}\right)\frac{v_1^2}{2g}+\lambda_2\left(\frac{l_3+l_4+l_5}{d_2}\right)\frac{v_2^2}{2g}$$

由连续性方程 $v_1A_1=v_2A_2$， 所以 $v_1=v_2\left(\frac{A_2}{A_1}\right)=v_2\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2$ 代入上式得

$$\Sigma\lambda\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}=\lambda_1\left(\frac{l_1+l_2}{d_1}\right)\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4\frac{v_2^2}{2g}+\lambda_2\left(\frac{l_3+l_4+l_5}{d_2}\right)\frac{v_2^2}{2g}$$
$$=k_1\frac{v_2^2}{2g}$$

再计算局部损失

$$\Sigma\zeta\frac{v^2}{2g}=(\zeta_1+\zeta_2)\frac{v_1^2}{2g}+(\zeta_3+\zeta_4+\zeta_5+\zeta_6)\frac{v_2^2}{2g}$$
$$=\left[(\zeta_1+\zeta_2)\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4+(\zeta_3+\zeta_4+\zeta_5+\zeta_6)\right]\frac{v_2^2}{2g}$$
$$=k_2\frac{v_2^2}{2g}$$

代入（5-35）式得

$$\frac{\Delta p}{\rho g}=(k_1+k_2)\frac{v_2^2}{2g}=\xi\frac{v_2^2}{2g}$$

式中 $\xi=k_1+k_2$，称为管路阻力系数，以 $Q=A_2v_2$ 代入上式可得

$$\Delta p=\xi\rho\frac{v_2^2}{2}=\xi\frac{\rho}{2A_2^2}Q^2=KQ^2 \tag{5-36}$$

由于系数K中包含有沿程阻力系数λ，而在光滑管的条件下，λ与Re有关，所以K也随Re数而变，由于短管中沿程阻力占的比重不大，所以K值与Re数关系较小，可以近似地认为只与管路结构和流体密度有关的系数，这样，对于特定的管路K就近似地为一常数。必须注意，K是有量纲的系数，它的单位为 kg/cm^7 或 kg/m^7。

例5-1 用旧铸铁管组成虹吸管路翻越堤坝取水灌溉，已知$l_1=6\,m$，$l_2=3\,m$，$l_3=14\,m$，$l_4=3\,m$，管道粗糙度$\varepsilon=1.5mm$，管径$d=150mm$，管路中有三个弯管一个闸阀（闸阀全开时$\zeta=0.2$），求$H_1=2\,m$，$H_2=4.5\,m$时虹吸管的流量和虹吸管内的最低压强。

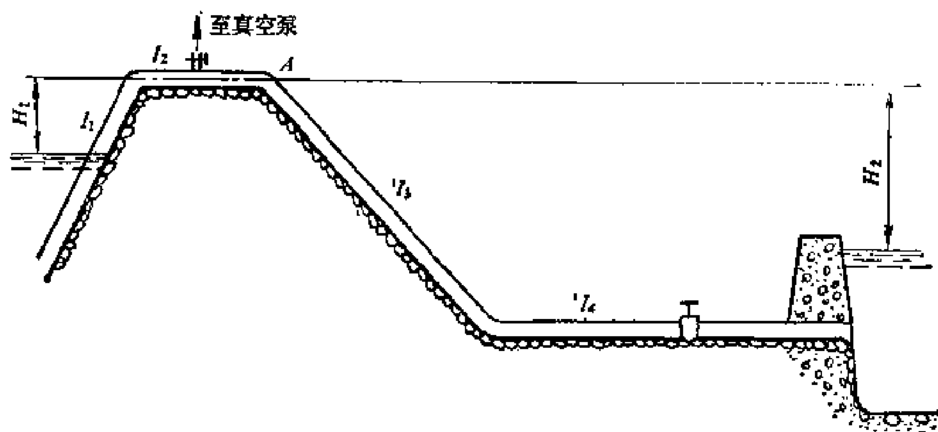


图5-23 虹吸管计算

解 虹吸管正常运行的条件是管内必需充满液体，所以虹吸管顶部应有抽气装置，这样，在起动时先抽气，使液体吸升，只要上游液体越过最高处，液体即能自流，抽气设备就可关闭。

列出上下游水面的柏努利方程

$$\frac{p_1}{\rho g}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}+z_1=\frac{p_2}{\rho g}+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}+z_2+h_f$$

因为 $p_1=p_2=0$，$v_1=v_2\approx 0$，所以

$$h_f=z_1-z_2=-H_1+H_2=H_2-H_1$$

或

$$H_2-H_1=h_f=\Sigma\lambda\frac{l}{d}\ \frac{v^2}{2g}+\Sigma\zeta\frac{v^2}{2g}$$

设管内流动为紊流，且为粗糙管范畴

$\varepsilon/d=\dfrac{1.5}{150}=\dfrac{1}{100}$，由图 5-12 得 $\lambda=0.038$

沿程损失为

$$\Sigma\lambda\frac{l}{d}\ \frac{v^2}{2g}=0.038\left(\frac{6+3+14+3}{0.15}\right)\frac{v^2}{2g}=6.58\frac{v^2}{2g}$$

管路中的配件和阻力系数为：

三个 45°，$d/\rho=1$ 的弯管： $\zeta=0.3\times\dfrac{1}{2}=0.15$

一个闸阀（全开）： $\zeta=0.2$

一个进口损失： $\zeta=1$

一个出口损失：　　　　　　$\zeta = 1$

所以局部损失为

$$\Sigma\zeta\frac{v^2}{2g} = (3\times0.15+0.2+1+1)\frac{v^2}{2g} = 2.65\frac{v^2}{2g}$$

因此

$$H_2 - H_1 = (6.58+2.65)\frac{v^2}{2g} = 9.23\frac{v^2}{2g}$$

由此得流速 v 为

$$v = \sqrt{\frac{2g(H_2-H_1)}{9.23}} = \sqrt{\frac{19.6\times2.5}{9.23}} = 2.304\,\mathrm{m/s}$$

雷诺数

$$Re = \frac{vd}{\nu} = \frac{230.4\times15}{0.010} = 3.456\times10^5$$

由图 5-12 可见，我们假设为粗糙管范畴是正确的，由此得所求流量 Q 为

$$Q = \frac{\pi}{4}d^2v = 0.785(0.15)^2\times2.304 = 0.04069\mathrm{m^3/s} = 146.5\mathrm{m^3/hr}$$

虹吸管通过的流量为每小时 146.5 立方米。

虹吸管内最低压强在 A 点，列出上游水面至 A 点的柏努利方程得

$$-H_1 = \frac{p_A}{\rho g} + \frac{\alpha_A v_A^2}{2g} + h_f$$

式中　$\alpha_A = 1$，$h_f = \Sigma\lambda\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g} + \Sigma\zeta\frac{v^2}{2g}$ 则

$$\frac{p_A}{\rho g} = -H_1 - \frac{v_A^2}{2g} - h_f = -2 - \left[1+\left(\Sigma\lambda\frac{l}{d}+\Sigma\zeta\right)\right]\frac{v^2}{2g}$$

而

$$\Sigma\lambda\frac{l}{d}+\Sigma\zeta = 0.038\left(\frac{6+3}{0.15}\right)+(1+2\times0.15) = 3.58$$

所以

$$\frac{p_A}{\rho g} = -2-(1+3.58)\frac{(2.304)^2}{19.4} = -3.24\mathrm{mH_2O}$$

或 A 点的真空度为 $\frac{3.24}{10.2} = 0.317\,\mathrm{bar}$

虹吸管内最低压强为 0.317bar 真空。

例5-2　挖掘机动臂提升油路如图 5-24 所示，管道尺寸和配件如下：

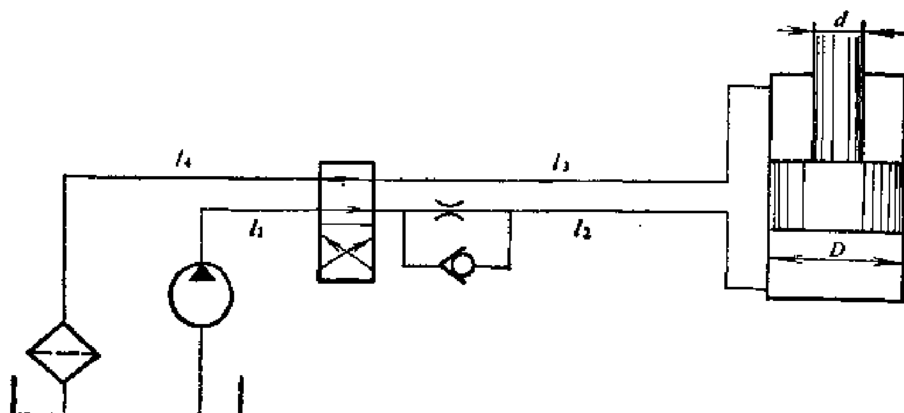


图　5-24

l_1：$l_1 = 2.4\,m$，90°折管1只；

l_2：$l_2 = 5.1\,m$，90°折管2只，45°弯管1只；

l_3：$l_3 = 5\,m$，90°折管2只，45°弯管1只；

l_4：$l_4 = 2.9\,m$，90°折管1只。

液压缸活塞直径$D = 200mm$，活塞杆直径$d = 80mm$，管道直径均为32mm，油液粘度为$\nu = 30c.St.$，密度$\rho = 0.88\times10^{-3}kg/cm^3$，求液压泵流量为200 l/min时管路上的功率损失。

解 液压泵流量为200 l/min时，管道l_1及l_2中流量为

$$Q = 200\,l/min = \frac{200\times1000}{60} = 3333\ cm^3/s$$

流速v为

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{3333}{0.785(3.2)^2} = \frac{3333}{8.04} = 414.7cm/s = 4.147\,m/s$$

$$Re = \frac{vd}{\nu} = \frac{414.7\times3.2}{0.30} = 4423$$

$$\lambda = \frac{0.316}{Re^{1/4}} = \frac{0.316}{(4423)^{0.25}} = \frac{0.316}{8.154} = 0.0388$$

局部阻力系数为：

90°折管$\zeta = 1.13$，45°弯管$\zeta = 0.15$

单向节流阀$\zeta = 8$，滑阀$\zeta = 12$

出口损失$\zeta = 1$

因此系数K为

$$K = \frac{\rho}{2A^2}\xi = \frac{0.88\times10^{-3}}{2\,(8.04)^2}\left[\lambda\left(\frac{l_1+l_2}{d}\right)+\Sigma\zeta\right]$$

$$= \frac{0.88\times10^{-3}}{2\times65}\left[0.0387\left(\frac{240+510}{3.2}\right)+3\times1.13+0.15+8+12+1\right]$$

$$= 2.275\times10^{-4}$$

$$\Delta p = KQ^2 = 2.275\times10^{-4}(3.333)^2\times10^6 = 2.527\times10^3\ \frac{kg\cdot cm/s^2}{cm^2}$$

$$= 25.27N/cm^2 = 2.527bar$$

在回油管l_3及l_4中流量为Q'

$$Q' = Q\left(\frac{D^2-d^2}{D^2}\right) = 200\left(\frac{20^2-8^2}{20^2}\right) = 200\left(\frac{336}{400}\right) = 168\ l/min = 2800\,cm^3/s$$

$$v' = \frac{Q'}{A} = \frac{2800}{8.04} = 348.2cm/s = 3.482\,m/s$$

$$Re' = \frac{v'd}{\nu} = \frac{348.2\times3.2}{0.30} = 3714$$

$$\lambda = \frac{0.3164}{Re^{1/4}} = \frac{0.3164}{(3714)^{0.25}} = \frac{0.3164}{7.806} = 0.0405$$

局部阻力系数为：

90°折管$\zeta = 1.13$，45°弯管$\zeta = 0.15$；

滑阀$\zeta = 12$，滤油器$\zeta = 6$。

系数 K' 为

$$K' = \frac{0.88\times10^{-8}}{2\,(8.04)^2}\left[0.0405\left(\frac{500+290}{3.2}\right)+3\times1.13+0.15+12+6\right]$$

$$=2.146\times10^{-4}$$

$$\Delta p' = K'Q'^2 = 2.146\times10^{-4}(2.8)^2\times10^6 = 16.8\times10^2\,\frac{\text{kg}\cdot\text{cm/s}^2}{\text{cm}^2}$$

$$=16.8\text{N/cm}^2 = 1.68\text{bar}$$

由此可得管道中的功率损失为

$$N = \frac{\Delta pQ+\Delta p'Q'}{600} = \frac{2.527\times200+1.68\times168}{600} = 1.312\text{kW}$$

管道中功率损失为 1.312 千瓦

2. 长管

图（5-25）为水塔供水系统，如果管道很长，能量损失主要为沿程损失，局部损失等可以略而不计，则由柏努利方程可得

$$H = \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_f = \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + \Sigma h_f + \Sigma\zeta \approx \Sigma h_f$$

因为 $$h_f = \lambda\frac{l}{d}\,\frac{v^2}{2g} = \lambda\frac{l}{d}\,\frac{1}{2g}\left(\frac{4Q}{\pi d^2}\right)^2 = \frac{16\lambda}{2g\pi^2 d^5}lQ^2$$

或 $$h_f = BlQ^2$$

由此得 $$H = \Sigma BlQ^2 \tag{5-37}$$

式中系数 $B = \frac{16\lambda}{2g\pi^2 d^5}$，它是有量纲的，如果$H$，$l$ 以 m 计，Q 以 m^3/s 计，则B的单位为s^2/m^6。在输水管道中，由于水的粘度很小，雷诺数 Re 较大，管内流动基本上处于平方阻力区域（粗糙管），摩阻系数 λ 与雷诺数 Re 无关只决定于管径 d 与粗糙度 ε 的比，因此系数B也只与管径和粗糙度有关。输水管道一般为铸铁管，根据三种不同情况的壁面粗糙度的B值如表 5-8 所示。

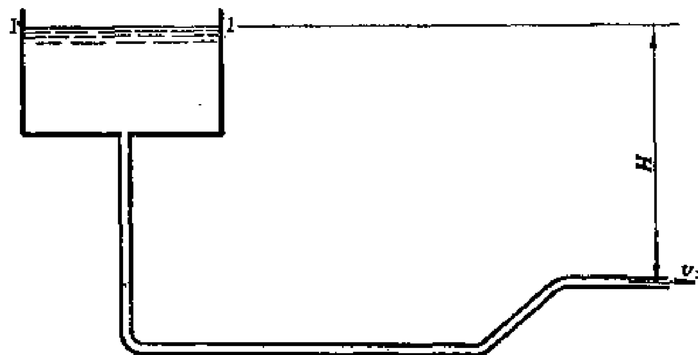


图5-25 长管

对于液压技术中的油管来说，由于油液粘度较大，一般处于紊流光滑管范畴，以 $\lambda = \frac{0.3164}{Re^{1/4}}$代入（5-35）式，略去局部损失得

$$\frac{\Delta p}{\rho g} = h_f = \Sigma\lambda\,\frac{l}{d}\,\frac{v^2}{2g} = \Sigma\,\frac{0.3164\nu^{0.25}}{2gd^{1.25}}v^{1.75}$$

$$=\Sigma\,\frac{(0.3164)}{2gd^{4.75}}\,\frac{(4)^{1.75}\nu^{0.25}}{\pi^{1.75}}lQ^{1.75}$$

或 $$\Delta p = \Sigma\rho\nu^{0.25}blQ^{1.75} \tag{5-38}$$

表5-8 铸铁管B值

d, mm	洁净管 B	正常管 B	污垢管 B	d, mm	洁净管 B	正常管 B	污垢管 B
40	20830	32260	50920	350	0.21	0.33	0.453
50	6390	9709	15190	400	0.12	0.16	0.223
75	751.9	1124	1709	450	0.064	0.088	0.119
100	166.1	244.4	365.0	500	0.037	0.051	0.0684
125	51.6	75.0	110.8	600	0.014	0.02	0.0260
150	19.8	28.6	41.85	700	0.0064	0.0087	0.0115
200	4.4	6.2	9.029	800	0.0032	0.0043	0.00567
250	1.4	1.9	2.752	900	0.0017	0.0023	0.00303
300	0.53	0.74	1.025	1000	0.0010	0.0014	0.00173

系数 $b=\dfrac{0.3164\times 1^{1.75}}{2\pi^{1.75}d^{4.75}}=\dfrac{0.24143}{d^{4.75}}$。$b$值如表5-9所示。

表5-9 光滑管b值

d, mm	b, $1/cm^{4.75}$	d, mm	b, $1/cm^{4.75}$	d, mm	b, $1/cm^{4.75}$
4	18.7502	13	0.06943	25	0.003108
6	2.7326	16	0.02590	32	0.0009623
8	0.69682	19	0.011447	38	0.0004254
10	0.24143	22	0.005705	45	0.0001905

必须注意，(5-37)式中有关长度的单位均为m，例如Q以m^3/s计，l以m计，而(5-38)式中有关长度单位均为cm，例如Q以cm^3/s计，l以cm计，ν以cm^2/s计，b以$1/cm^{4.75}$计等。

（1）串联管路

不同直径的管道无分支地依次连接而成的管路称为串联管路，串联管路的特点是

$$Q_1=Q_2=Q_3=\cdots=Q$$

$$H=h_{l1}+h_{l2}+\cdots=(B_1l_1+B_2l_2+\cdots)Q^2$$

或

$$\Delta p=(b_1l_1+b_2l_2+\cdots)\rho\nu^{0.25}Q^{1.75}$$

例5-3 某简单管路长$l=3000$m，要求能在水头$H=15$m下输送$Q=200$ l/s，求组成该管路的管道直径和长度。

解 对于简单长管

$$H=BlQ^2$$

或

$$B=\frac{H}{lQ^2}=\frac{15}{3000\,(0.2)^2}=0.125$$

查表5-8得正常管时

$$d_1=400\text{mm}\qquad B_1=0.16$$

$$d_2=450\text{mm}\qquad B_2=0.088$$

由此可知管路应由l_1长的400mm管子和$l_2=3000-l_1$长的450mm管子组成，即

$$H=Q^2(B_1l_1+B_2l_2)=Q^2[B_1l_1+B_2(3000-l_1)]$$

即

$$15=(0.2)^2[0.16l_1+0.088(3000-l_1)]$$

解之得

$$l_1=1550\text{m}$$

因此所求管路由下列管道组成：

$d_1 = 400\text{mm}$ $l_1 = 1550\text{ m}$

$d_2 = 450\text{mm}$ $l_2 = 1450\text{ m}$

（2）分歧管路

分歧管路如图 5-26 所示，分歧点为 a，该点的位置标高为 z，压强能头为 h，三分支管的终点的位置标高各为 z_1、z_2、及 z_3，压强能头各为 h_1、h_2 及 h_3，流量为 Q_1、Q_2 及 Q_3，则

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

$$H - (z + h) = BlQ^2$$

$$(z + h) - (z_1 + h_1) = B_1 l_1 Q_1^2$$

$$(z + h) - (z_2 + h_2) = B_2 l_2 Q_2^2$$

$$(z + h) - (z_3 + h_3) = B_3 l_3 Q_3^2$$

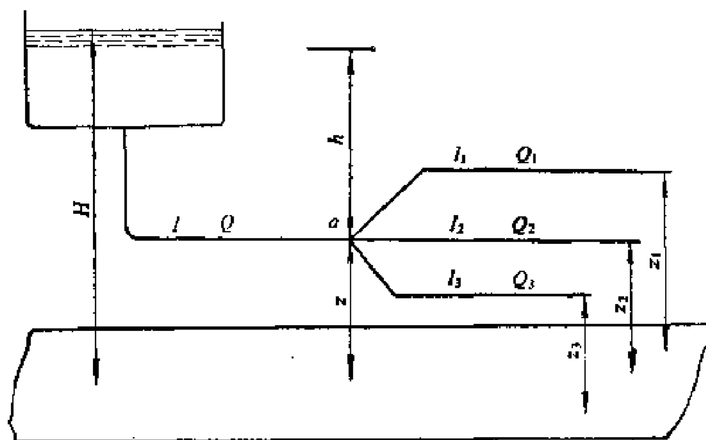


图5-26 分歧管路的计算

根据上述方程组可以解决分歧管路的各类问题。

（3）并联管路

二条或二条以上管路从一点分支，然后又汇合至一点成为封闭的环路，称为并联管路，如图 5-27。并联管路各分管中的流量可以不等，它们的总和等于总流量，但分管中的能量损失则相等，即

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

$$h_f = B_1 l_1 Q_1^2 = B_2 l_2 Q_2^2 = B_3 l_3 Q_3^2$$

根据上列方程组可以求解并联管路的各类问题。

例5-4 三条铸铁管互相并联而组成的环形复杂管路如图 5-27 所示。管道尺寸为：$d_1 = 150\text{mm}$，$l_1 = 500\text{ m}$，$d_2 = 150\text{mm}$，$l_2 = 350\text{ m}$，$d_3 = 200\text{mm}$，$l_3 = 1000\text{m}$，如果总流量为 80 l/s，求各分管中的流量 Q_1，Q_2，Q_3 及 ab 点间的水头损失。

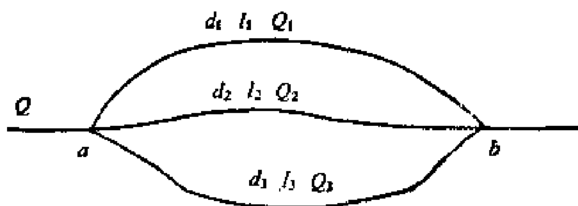


图5-27 并联管路的计算

解 因为 a 及 b 点是三条管道所共有的，所以三分管的水头损失是相等的

$$H = B_1 l_1 Q_1^2 = B_2 l_2 Q_2^2 = B_3 l_3 Q_3^2$$

或
$$Q_2 = Q_1\sqrt{\frac{B_1 l_1}{B_2 l_2}}, \quad Q_3 = Q_1\sqrt{\frac{B_1 l_1}{B_3 l_3}}$$

查表 5-8 得(设管道较旧，作污垢管计算)

$d_1 = 150\text{mm}$ $B_1 = 41.85$

$d_2 = 150\text{mm}$ $B_2 = 41.85$

$d_3 = 200\text{mm}$ $B_3 = 9.029$

所以
$$Q_2 = Q_1\sqrt{\frac{41.85 \times 500}{41.85 \times 350}} = 1.195Q_1$$

$$Q_3 = Q_1\sqrt{\frac{41.85 \times 500}{9.029 \times 1000}} = 1.52Q_1$$

因为 $80 = Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = (1 + 1.195 + 1.52)Q_1 = 3.715Q_1$

所以
$$Q_1 = \frac{80}{3.715} = 21.53\ \mathrm{l/s}$$
$$Q_2 = 1.195Q_1 = 25.7\ \mathrm{l/s}$$
$$Q_3 = 1.52Q_1 = 32.72\ \mathrm{l/s}$$

*§5-9 压缩性流体在管道中的等温流动

上面我们讨论了不可压缩性流体在管中流动的规律，对于压缩性流体，如果管道较短，流速较低，则压降很小，密度变化很小，这时，压缩性流体很接近于不可压缩性流体，那末以上对不可压缩性流体所导得的公式也适用于压缩性流体，否则必须另作处理。由于压缩性流体在管中流动的情况比较复杂，我们只讨论二种比较实用的情况：等温流动与绝热流动，本节先讨论等温流动。

压缩性流体在较长的管道中流动，由于摩擦阻力的存在，压强逐渐降低，比容增大，但温度保持不变，这就是等温流动，对于这种流动我们将分二种情况来分析：即水平管道中的流动与水平线成 α 仰角的管道中的流动。

1. 水平管道中的流动

设一管径为 D 的水平管道，取微小管段 dl，该段内压强为 p，流速为 v，则柏努利方程为

$$\frac{dp}{\rho} + d\left(\frac{v^2}{2}\right) + d(gh_f) = 0$$

式中 $d(gh_f)$ 为微小管段中的能量损失

$$d(gh_f) = \lambda \frac{v^2}{2D} dl$$

所以
$$\frac{dp}{\rho} + vdv + \frac{\lambda v^2}{2D} dl = 0$$

或
$$\frac{2}{\rho v^2} dp + 2\frac{dv}{v} + \lambda \frac{dl}{D} = 0 \tag{5-39}$$

在进行积分之前，我们先讨论一下 (5-39)式中各项的情况。首先管道直径 D 是一常数，而阻力系数 λ 与 $Re = \frac{\rho v D}{\mu}$ 及粗糙度 ε/D 有关，在压差不是很大的情况下，我们认为粘度 μ 只是温度的函数，因此在等温流动中 μ 是不变的，由连续性方程 $\rho v A =$ 常数，管道断面 A 是一常量，因此 $\rho v =$ 常数，这样，雷诺数 $Re = \frac{\rho v D}{\mu}$ = 常数。这就是说沿管道的摩阻系数 λ 恒定不变。

根据连续性方程，质量流量 $\dot{m}$ 为

$$\dot{m} = \rho_1 v_1 A = \rho_2 v_2 A = \rho v A$$

气体在等温条件下

$$\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{p_2}{\rho_2} = \frac{p}{\rho} = RT = C$$

因此可得$\frac{v}{v_1}=\frac{\rho_1}{\rho}=\frac{p_1}{p}$，则

$$\frac{1}{\rho v^2}=\frac{p}{\rho_1 v_1^2 p_1}$$

代入（5-39）式并积分之得

$$\frac{2}{\rho_1 v_1^2 p_1}\int_2^1 p\,dp+2\int_2^1\frac{dv}{v}+\frac{\lambda}{D}\int_l^0 dl=0$$

即
$$p_1^2-p_2^2=\rho_1 v_1^2 p_1\left(2\ln\frac{v_2}{v_1}+\frac{\lambda l}{D}\right) \tag{5-40}$$

（5-40）式中的$2\ln\frac{v_2}{v_1}$与$\frac{\lambda l}{D}$比较起来是很小的，可以略而不计，则（5-40）式可写成

$$\frac{p_1^2-p_2^2}{p_1^2}=\frac{\lambda l v_1^2\rho_1}{Dp_1}$$

或
$$p_2=p_1\sqrt{1-\frac{\lambda l\rho_1 v_1^2}{Dp_1}}$$

压降 Δp 为

$$\Delta p=p_1-p_2=p_1\left(1-\sqrt{1-\frac{\lambda l\rho_1 v_1^2}{Dp_1}}\right) \tag{5-41}$$

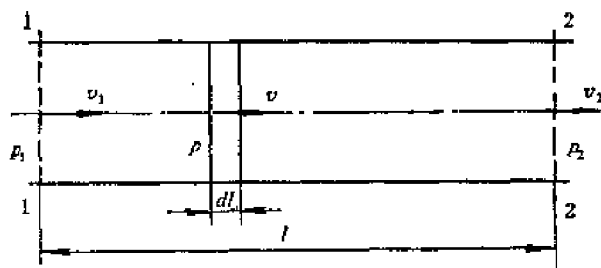


图5-28　气体在水平管内流动

如果$\frac{\lambda l\rho_1 v_1^2}{Dp_1}\ll 1$时，将（5-41）式展成级数并略去$\lambda l\rho_1 v_1^2/Dp_1$的高次方，我们得

$$\Delta p=p_1-p_2=\lambda\rho_1\frac{l}{D}\;\frac{v_1^2}{2}$$

这与不可压缩性流体的公式完全相同。

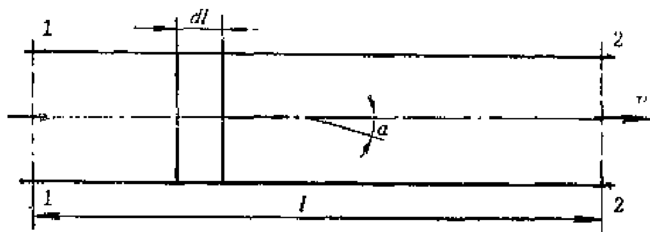


图5-29　气体在仰角为α的管内流动

2. 流经与水平线成α仰角的长管

如图（5-29）为一与水平线成α仰角的管道，气体流经该管道时，除了摩阻损失产生压降外，还有由于高度不同而引起的压强降落，即

$$dp=\frac{\lambda v^2\rho dl}{2D}+\rho g\sin\alpha dl \tag{5-42}$$

因为流动时温度不变，所以$\rho=\frac{p\rho_1}{p_1}$，而流速$v=\frac{\dot m}{A\rho}=\frac{\dot m p_1}{A\rho_1 p}$，代入(5-42)式得

$$dp=\left(\frac{\lambda p_1^2\dot m^2}{2DA^2\rho_1^2p^2}+g\sin\alpha\right)\frac{p\rho_1}{p_1}dl$$

或
$$dl=\frac{\frac{p_1}{\rho_1}dp}{\left(\frac{\lambda p_1^2\dot m^2}{2DA^2\rho_1^2p^2}+g\sin\alpha\right)p}=\frac{\frac{p_1}{\rho_1}p\,dp}{\left(\frac{\lambda p_1^2\dot m^2}{2DA^2\rho_1^2}+p^2g\sin\alpha\right)}$$

积分之，dl 由 0 积至 l，dp 由 2 积至 1（因为 $p_1>p_2$），我们得

$$l=\frac{p_1}{2\rho_1 g\sin\alpha}\ln\left(\frac{p_1^2 g\sin\alpha+\dfrac{\lambda\dot{m}^2p_1^2}{2DA^2\rho_1}}{p_2^2 g\sin\alpha+\dfrac{\lambda\dot{m}^2p_1^2}{2DA^2\rho_1}}\right)$$

以 $\dfrac{\dot{m}^2}{A^2\rho_1^2}=v_1^2$ 代入上式得

$$l=\frac{p_1}{2\rho_1 g\sin\alpha}\ln\left(\frac{p_1^2 g\sin\alpha+\dfrac{\lambda v_1^2p_1^2}{2D}}{p_2^2 g\sin\alpha+\dfrac{\lambda v_1^2p_1^2}{2D}}\right)\tag{5-43}$$

当 $\alpha=90^\circ$ 时，即流体在垂直管中向上流动，则（5-43）式可写成

$$l=\frac{p_1}{2\rho_1 g}\ln\left(\frac{p_1^2 g+\dfrac{\lambda v_1^2p_1^2}{2D}}{p_2^2 g+\dfrac{\lambda v_1^2p_1^2}{2D}}\right)$$

当 $\alpha=270^\circ$ 时，即气体在垂直管道中向下流，则（5-43）式为

$$l=\frac{p_1}{2\rho_1 g}\ln\left(\frac{p_2^2 g-\dfrac{\lambda v_1^2p_1^2}{2D}}{p_1^2 g-\dfrac{\lambda v_1^2p_1^2}{2D}}\right)$$

3. 不可压缩性流体流动与气体在等温流动时的比较

压缩性流体（气体）在管道中的流动显然较不可压缩性流体大为复杂，有时为了简便起见，对于压缩性流体也引用不可压缩性流体的公式来计算，问题是这样处理的正确性是否符合要求？要回答这个问题，我们可以把不可压缩性流体的公式与压缩性流体在水平管道中等温流动公式进行比较：

压缩性流体：

$$\frac{p_1-p_2}{p_1}=1-\sqrt{1-\frac{\lambda l v_1^2\rho_1}{Dp_1}}$$

不可压缩性流体：

$$\frac{p_1-p_2}{p_1}=\frac{\lambda l v_1^2\rho_1}{2Dp_1}$$

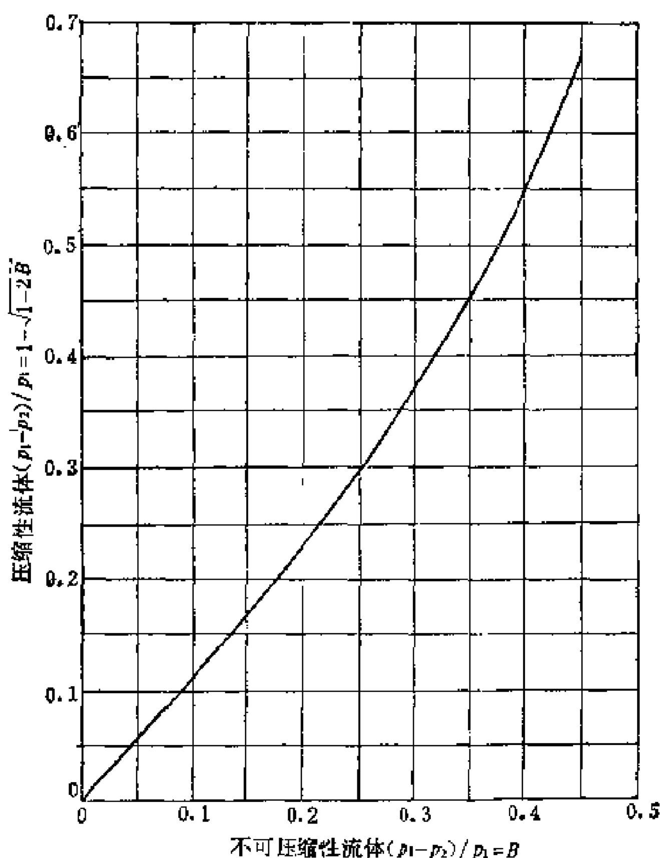


图5-30 压缩性流体与不可压缩性流体的比较

如果以符号 $B=\dfrac{\lambda l v_1^2\rho_1}{2Dp_1}$，它的数值可以由管道尺寸和流体初态来确定，代入上式得

压缩性流体：

$$\frac{p_1-p_2}{p_1}=1-\sqrt{1-2B}$$

不可压缩性流体： $$\frac{p_1 - p_2}{p_1} = B$$

将上两式画成曲线如图 5-30 所示，由图可见，当 $B < 0.1$ 时两者差别很小，但当 $B > 0.1$ 后，它们之间的差别逐渐显示出来，例如 $B = 0.3$ 时，压缩性流体的 $(p_1 - p_2)/p_1 = 0.37$，这个差别就不能忽视了。

*§5-10　气体在绝热管道中的流动

很多输送气体的管道，往往用绝热材料包裹，这样，气体流动时对外界可认为不发生热量交换，也就是绝热流动。绝热流动时，如果没有摩擦阻力，那末气体的熵不变，气体的变化过程服从 $pv^k = C$ 的规律，实际上流动时一定有摩阻，气体虽与外界无热量交换，但吸收了摩擦而产生的热量，因此它的熵有所增加，它的变化过程便不再满足 $pv^k = C$ 了，如果以符号 dh_f 表示单位质量的气体流动时摩擦而产生的热量，那末，按照热力学第一定律我们得：

$$dh_f = di + p\,dv$$

式中　i ——内能；

　　　v ——比容。

因为 $pv = RT$，所以 $d\,pv = R\,dT$

而
$$di = c_v dT = c_v \frac{d\,pv}{R}$$

又
$$c_p = c_v + R, \quad \frac{c_p}{c_v} = k$$

所以
$$c_v = \frac{R}{k-1}$$

由此，我们得

$$di = \frac{d\,(pv)}{k-1} = \frac{p\,dv + v\,dp}{k-1}$$

则
$$dh_f = \frac{p\,dv + v\,dp}{k-1} + p\,dv = \frac{kp\,dv + v\,dp}{k-1}$$

由柏努利方程

$$\frac{dp}{\rho} + d\left(\frac{v^2}{2}\right) + dh_f = 0$$

由此我们得

$$\frac{kd(pv)}{k-1} + d\left(\frac{v^2}{2}\right) = 0$$

或
$$d\,(pv) = \frac{(k-1)v\,dv}{k}$$

积分之

$$pv + \left(\frac{k-1}{k}\right)\frac{v^2}{2} = C \tag{5-44}$$

式中　v——比容；

　　　v——流速；

　　　C——积分常数。

(5-44)式为气体在绝热水平管中绝热恒定流动时的过程方程式。当在断面1时 $p = p_1$，$\mathrm{v} = \mathrm{v}_1$，$v = v_1$ 则积分常数 C 为

$$C = p_1\mathrm{v}_1 + \left(\frac{k-1}{k}\right)\frac{v_1^2}{2}$$

由此（5-44）式可写成

$$p\mathrm{v} = p_1\mathrm{v}_1 - \left(\frac{k-1}{2k}\right)(v^2 - v_1^2)$$

质量流量 $\dot{m} = \frac{v}{\mathrm{v}}A$，当 A 为常数时 $\frac{v}{\mathrm{v}} = C$，微分之得：　　$d\mathrm{v} = \frac{\mathrm{v}dv}{v}$

所以

$$p d\mathrm{v} = p\mathrm{v}\frac{dv}{v} = \left[p_1\mathrm{v}_1 - \left(\frac{k-1}{2k}\right)(v^2 - v_1^2)\right]\frac{dv}{v} \tag{5-45}$$

由柏努利方程

$$\frac{dp}{\rho} + vdv + \frac{\lambda v^2}{2D}dl = 0$$

因为　$\rho = \frac{1}{\mathrm{v}}$，所以

$$vdv + d(p\mathrm{v}) - pd\mathrm{v} + \frac{\lambda v^2}{2D}dl = 0$$

将（5-44）及（5-45）式代入上式得

$$vdv - \frac{(k-1)}{k}vdv - \left[\frac{2kp_1\mathrm{v}_1 - (k-1)(v^2 - v_1^2)}{2k}\right]\frac{dv}{v} + \frac{\lambda v^2}{2D}dl = 0$$

上式除以 v^2 后加以整理得

$$\frac{\lambda dl}{2D} = \frac{1}{k}\left[kp_1\mathrm{v}_1 + \frac{(k-1)}{2}v_1^2\right]\frac{dv}{v^3} - \frac{(k+1)}{2k}\frac{dv}{v} \tag{5-46}$$

当雷诺数较高时，λ 与 Re 数无关而只决定于管道的粗糙度，因此，对某一具体的管道的 λ 是一常数。当 Re 数较低时，λ 与 Re 有关，而 Re 又决定于 μ，在压强变化不是很大时，通常认为 μ 只是温度的函数，因此 λ 也与温度有关，但温度对 λ 的影响并不很大，为了简便起见，我们把 λ 作为常数来处理，则（5-46）式积分后得

$$\frac{\lambda l}{D} = \frac{1}{k}\left[kp_1\mathrm{v}_1 + \frac{(k-1)}{2}v_1^2\right]\left(\frac{1}{v_1^2} - \frac{1}{v^2}\right) - \frac{(k+1)}{k}\ln\frac{v}{v_1}$$

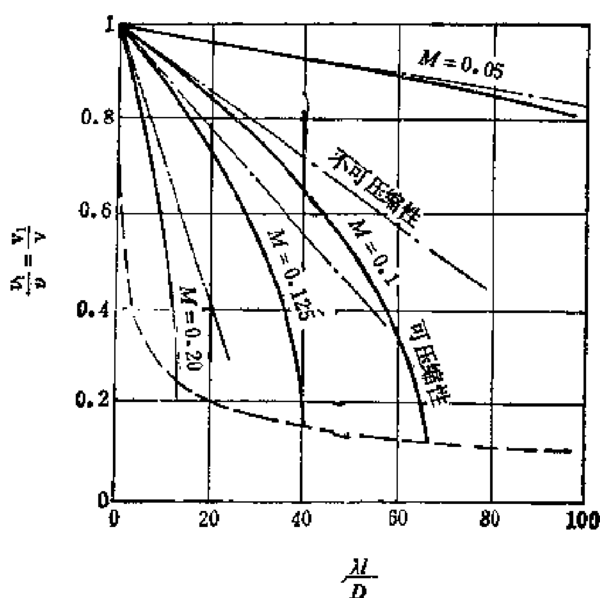


图5-31　v_1/v 与 $\lambda l/D$ 的关系

因为声速 $c=\sqrt{kp\text{v}}$，而马赫数$M=\frac{v}{c}$则上式为

$$\frac{\lambda l}{D}=\frac{1}{k}\left(\frac{1}{M_1^2}+\frac{k-1}{2}\right)\left(1-\frac{v_1^2}{v^2}\right)-\left(\frac{k+1}{k}\right)\ln\frac{v}{v_1} \tag{5-47}$$

为了计算方便起见，我们把（5-47）式画成曲线如图 5-31 所示，作此图时 $k=1.4$，所以它只适用于空气，氮、氧、一氧化碳等二原子气体。

由（5-44）式，我们得

$$p\text{v}+\left(\frac{k-1}{k}\right)\frac{v^2}{2}=C=p_1\text{v}_1+\left(\frac{k-1}{k}\right)\frac{v_1^2}{2}$$

或

$$p\text{v}=p_1\text{v}_1+\left(\frac{k-1}{2k}\right)(v_1^2-v^2)$$

等号两边除以 $p_1\text{v}$ 则

$$\frac{p}{p_1}=\frac{\text{v}_1}{\text{v}}+\left(\frac{k-1}{2kp_1\text{v}}\right)(v_1^2-v^2)=\frac{\text{v}_1}{\text{v}}\left[1+\left(\frac{k-1}{2}\right)\left(\frac{v_1^2}{kp_1\text{v}_1}\right)\left(1-\frac{v^2}{v_1^2}\right)\right]$$

由连续性方程得

$$\frac{Av_1}{\text{v}_1}=\frac{Av_2}{\text{v}_2}=\frac{Av}{\text{v}}$$

所以 $\frac{v_1}{v}=\frac{\text{v}_1}{\text{v}}$

代入上式压强比率公式为

$$\frac{p}{p_1}=\frac{v_1}{v}\left[1+\frac{(k-1)M_1^2}{2}\left(1-\frac{v^2}{v_1^2}\right)\right] \tag{5-48}$$

将（5-47）联合（5-48）式作成曲线（$k=1.4$）如图 5-32。

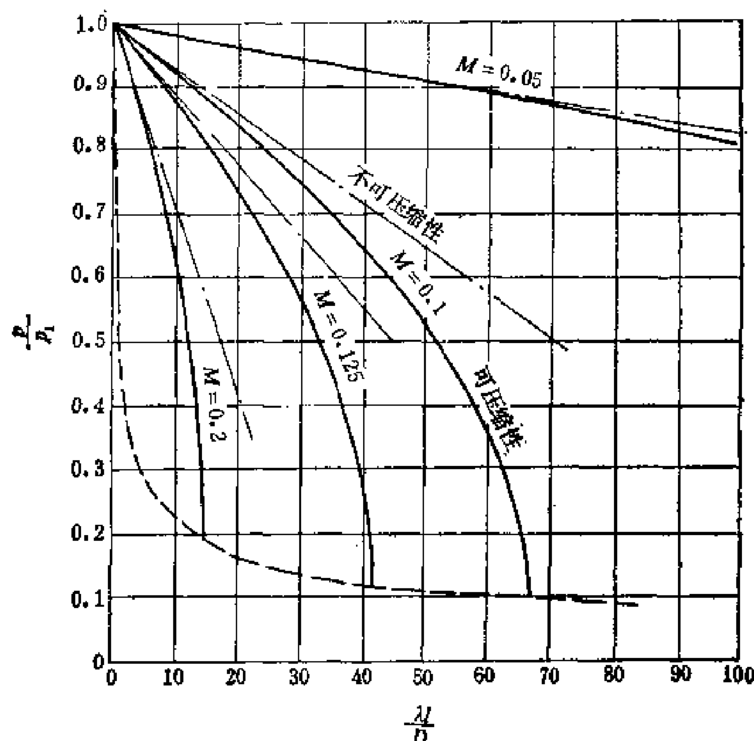


图5-32　p/p_1与$\lambda l/D$的关系

如把气体作为不可压缩性流体则

$$p_1-p=\lambda\frac{l}{D}\frac{v_1^2}{2\text{v}_1}$$

或

$$\frac{p}{p_1}=1-\frac{\lambda l v_1^2}{2Dp_1\text{v}_1}=1-\frac{k}{2}\left(\frac{v_1^2}{kp_1\text{v}_1}\right)\frac{\lambda l}{D}$$

即

$$\frac{p}{p_1}=1-\frac{k}{2}M_1^2\frac{\lambda l}{D} \tag{5-49}$$

由（5-49）式可见，不可压缩性流体的压强比率 p/p_1 与$\frac{\lambda l}{D}$呈线性关系，图5-32中的点划线即为 $k=1.4$ 时根据（5-49）式画成。

*§5-11 绝热流动时的临界压强和临界速度

由（5-48）式可见，气体在绝热管道中流动时，压强和流速之间有一定的规律，压强 p 越低，流速 v 越大，但是气体流动时存在摩擦阻力，流速 v 与 p 的关系将受到一定的制约，下面我们来讨论这个问题。

微分（5-44）式得

$$p d\mathrm{v} + \mathrm{v} d p + \left(\frac{k-1}{k}\right) v d v = 0$$

因为 $d\mathrm{v} = \mathrm{v}\dfrac{dv}{v}$，所以

$$p\mathrm{v}\frac{dv}{v} + \mathrm{v} d p + \left(\frac{k-1}{k}\right) v d v = 0$$

因为马赫数 $M = \dfrac{v}{\sqrt{k p \mathrm{v}}}$ 或 $p\mathrm{v} = \dfrac{v^2}{kM^2}$

代入上式得

$$\frac{1}{kM^2} v d v + \mathrm{v} d p + \left(\frac{k-1}{k}\right) v d v = 0$$

或
$$v d v = -\frac{kM^2}{1-(k-1)M^2}\mathrm{v} d p$$

代入柏努利方程得

$$\frac{dp}{\rho} - \frac{kM^2}{1+(k-1)M^2}\mathrm{v} d p + \frac{\lambda v^2}{2D} d l = 0$$

或
$$\left(1 - \frac{kM^2}{1+(k-1)M^2}\right)\mathrm{v} d p = -\frac{\lambda v^2}{2D} d l$$

由此得沿长度 l 的压降 dp/dl 为

$$\frac{dp}{dl} = -\rho\frac{\lambda v^2}{2D}\left[\frac{1+(k-1)M^2}{1-M^2}\right] \tag{5-50}$$

(5-50)式表示当 M 极小时，$\dfrac{dp}{dl} \approx -\rho\dfrac{\lambda v^2}{2D}$，气体近似于液体的规律。当 $M<1$ 时 $\dfrac{dp}{dl}$ 为负值，即压强沿 l 降落；流速沿 l 增大，或者说 $M_1<M$。当 $M>1$ 时，$\dfrac{dp}{dl}$ 为正值，压强沿 l 升高，也就是说流速沿 l 降低，即 $M_1>M$。当 $M=1$ 时，$\dfrac{dp}{dl}$ 为无穷大，因此 M 值不可能从 $M_1<1$ 增加至 $M>1$，或从 $M_1>1$ 降低至 $M<1$，也就是说，当 $M_1<1$ 时，M 不可能大于1，而当 $M_1>1$ 时，M 不可能小于1，即 $M=1$ 是一个临界值，这时的压强、流速等称为临界压强、临界流速等，临界点的参数用下标 k 表示。因此临界点的马赫数 $M_k = v_k/c_k = 1$，根据（5-44）式

$$p_1\mathrm{v}_1 + \frac{(k-1)}{k}\frac{v_1^2}{2} = p_k\mathrm{v}_k + \frac{(k-1)}{k}\frac{v_k^2}{2}$$

或
$$p_1 v_1\left[1+\left(\frac{k-1}{2}\right)M_1^2\right]=p_k v_k\left[1+\left(\frac{k-1}{2}\right)M_k^2\right]$$
$$=p_k v_k\left[1+\frac{k-1}{2}\right]$$

所以
$$\frac{p_k v_k}{p_1 v_1}=M_1^2\left(\frac{k-1}{k+1}\right)\left[\frac{2}{(k-1)M_1^2}+1\right] \tag{5-51}$$

因为在初始状态时 $c_1=\sqrt{kp_1v_1}$，而临界点时的声速 $c_k=\sqrt{kp_kv_k}$，所以
$$\frac{c_k^2}{c_1^2}=\frac{p_k v_k}{p_1 v_1}=M_1^2\left(\frac{k-1}{k+1}\right)\left[\frac{2}{(k-1)M_1^2}+1\right]$$
$$=\frac{v_1^2}{c_1^2}\left(\frac{k-1}{k+1}\right)\left[\frac{2}{(k-1)M^2}+1\right]$$

或
$$\frac{c_k}{v_1}=\left\{\left(\frac{k-1}{k+1}\right)\left[1+\frac{2}{M^2(k-1)}\right]\right\}^{1/2}$$

因为
$$\frac{\mathrm{v}_k}{\mathrm{v}_1}=\frac{v_k}{v_1}=\frac{c_k}{v_1}$$

由此得
$$\frac{\mathrm{v}_k}{\mathrm{v}_1}=\left\{\left(\frac{k-1}{k+1}\right)\left[1+\frac{2}{M_1^2(k-1)}\right]\right\}^{1/2} \tag{5-52}$$

代入（5-51）式得
$$\frac{p_k}{p_1}=M_1^2\left\{\left(\frac{k-1}{k+1}\right)\left[1+\frac{2}{M_1^2(k-1)}\right]\right\}^{1/2} \tag{5-53}$$

图（5-31）上的虚线即按照（5-52）式画出，图（5-32）上的虚线则按（5-53）画成，它们都表示临界的情况，所以称为临界曲线。

*§5-12 附面层理论

粘性流体流经物体，流体与物体相互作用的问题，照例可以用N-S方程求解，但由于数学上的困难，迄今不能求得严格解答。G. G. Stokes，C. W. Oseen 等作了忽略惯性力的简化，只解决了小雷诺数的圆球问题，直到1904年普朗特尔的附面层理论问世，对解决粘性流体的物体绕流问题提供了一条新的途径。关于附面层的概念，在第四章中已有阐述，现在，让我们根据附面层的特点来简化N-S方程

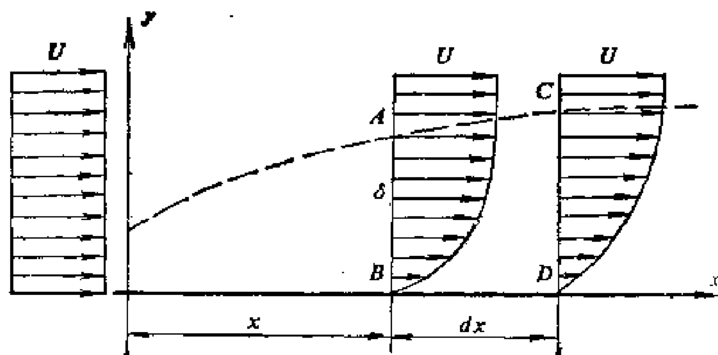


图5-33 附面层

为简单起见，我们将物体壁面认作是沿 x 座标的平面，且 x 轴与分速度 u_x 相一致，y 座标轴与物体壁面垂直，这样，流动为二元的，$u_z=0$。沿固物壁面形成附面层，它的上边界为 AC，厚度为 $\delta(x)$。在附面层外，速度梯度为零，粘性不起作用，剪切应力为零，属于势流范畴，

在附面层内有很大的速度梯度，粘性有很大作用，流体的运动规律遵循N-S方程和连续性方程

$$X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial u_x}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}$$

$$Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial u_y}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_y}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}=0$$

设物体的特征长度为L，远前方流速为U，并将运动参数的无量纲值定义为：

$\bar{x}=x/L$，$\bar{y}=y/L$，$\bar{u}_x=u_x/U$，$\bar{u}_y=u_y/U$，

$\bar{t}=t/(L/U)$，$\bar{p}=p/(\rho U^2)$，$Re=UL/\nu$。

因为附面层是紧邻壁面的薄层，它的厚度$\left(\bar{\delta}=\frac{\delta}{L}\right)$是个很小的量级。在附面层内，由于$0\leqslant\bar{y}\leqslant\bar{\delta}$，由此得$\bar{y}$的量级为$\bar{\delta}$（$\bar{\delta}\ll 1$），而$u_x$与$U$，$x$与$L$则为同样的量级，这样$\bar{x}$、$\bar{t}$、$\bar{u}_x$、$\bar{p}$、$\frac{\partial\bar{u}_x}{\partial\bar{x}}$及$\frac{\partial^2\bar{u}_x}{\partial\bar{x}^2}$的量级均为1。由连续性方程$\frac{\partial\bar{u}_x}{\partial\bar{x}}+\frac{\partial\bar{u}_y}{\partial\bar{y}}=0$可知$\frac{\partial\bar{u}_y}{\partial\bar{y}}$的量级应与$\frac{\partial\bar{u}_x}{\partial\bar{x}}$相同，即$\frac{\partial\bar{u}_y}{\partial\bar{y}}$的量级也为1，而$\bar{u}_y=\int_0^{\bar{y}}\frac{\partial\bar{u}_y}{\partial\bar{y}}d\bar{y}$，即$\bar{u}_y$的量级为$\bar{\delta}$，于是得

$$\frac{\partial\bar{u}_y}{\partial\bar{x}}\sim\bar{\delta},\quad\frac{\partial^2\bar{u}_y}{\partial\bar{x}^2}\sim\bar{\delta},\quad\frac{\partial^2\bar{u}_y}{\partial\bar{y}^2}\sim\frac{1}{\bar{\delta}}。$$

在附面层内粘性力$\left(例如\nu\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}=\frac{U^2}{L}\frac{1}{Re}\frac{\partial^2\bar{u}_x}{\partial\bar{y}^2}\right)$和惯性力$\left(例如u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}=\frac{U^2}{L}\bar{u}_y\frac{\partial\bar{u}_x}{\partial\bar{y}}\right)$有相同的数量级，因为$\bar{u}_y\frac{\partial\bar{u}_x}{\partial\bar{y}}\sim\bar{\delta}/\bar{\delta}\sim 1$，而$\frac{1}{Re}\frac{\partial^2\bar{u}_x}{\partial\bar{y}^2}\sim\frac{1}{\bar{\delta}^2 Re}$，两者相比较可得$Re$数的数量级必须为$\frac{1}{\bar{\delta}^2}$。

将无量纲参数代入上列方程组，略去质量力X、Y，同时标注出各项的数量级，则

$$-\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{x}}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2\bar{u}_x}{\partial\bar{x}^2}+\frac{\partial^2\bar{u}_x}{\partial\bar{y}^2}\right)=\frac{\partial\bar{u}_x}{\partial\bar{t}}+\bar{u}_x\frac{\partial\bar{u}_x}{\partial\bar{x}}+\bar{u}_y\frac{\partial\bar{u}_x}{\partial\bar{y}}$$

$$(1)\quad(\bar{\delta}^2)\quad 1\quad 1/\bar{\delta}^2\quad(1)\quad(1)(1)\quad(\bar{\delta})\left(\frac{1}{\bar{\delta}}\right)$$

$$-\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{y}}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2\bar{u}_y}{\partial\bar{x}^2}+\frac{\partial^2\bar{u}_y}{\partial\bar{y}^2}\right)=\frac{\partial\bar{u}_y}{\partial\bar{t}}+\bar{u}_x\frac{\partial\bar{u}_y}{\partial\bar{x}}+u_y\frac{\partial\bar{u}_y}{\partial\bar{y}}$$

$$\left(\frac{1}{\bar{\delta}}\right)\quad(\bar{\delta}^2)\quad\bar{\delta}\quad 1/\bar{\delta}\quad(\bar{\delta})\quad(1)(\bar{\delta})\quad(\bar{\delta})(1)$$

$$\frac{\partial\bar{u}_x}{\partial\bar{x}}+\frac{\partial\bar{u}_y}{\partial\bar{y}}=0$$

$$(1)\quad(1)$$

略去小量级项，并还原为有量纲形式，则上述方程组简化为

$$\left.\begin{aligned}&-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}=u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}\\&\frac{\partial p}{\partial y}=0\\&\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}=0\end{aligned}\right\}\tag{5-54}$$

这就是普朗特尔附面层方程，它的边界条件是：$y=0$，$u_x=u_y=0$；$y=\delta$，$u_x=U(x)$。方程组中第二个方程说明附面层内压强梯度为零，即物体壁面外法线方向上的压强不变，等于附面层外边界上的压强，这个结论有极重要的实际意义。因为附面层外的运动是有势的，所以附面层外边界上的压强可以由拉格朗日-柏努利方程求得。事实证明，用势流理论求得附面层外边界上压强分布与实测物体表面压强分布十分符合。

在附面层外边界上，即$y=\delta$时，$u_x=U(x)$并满足势流规律，按拉格朗日-柏努利方程：

$$p+\rho\frac{[U(x)]^2}{2}=常数$$

对x求导得

$$\frac{dp}{dx}+\rho U(x)\frac{dU(x)}{dx}=0$$

由此得

$$\frac{dp}{dx}=-\rho U(x)\frac{dU(x)}{dx}$$

因为我们讨论的是恒定流动，而且$\frac{\partial p}{\partial y}=0$，所以$\frac{dp}{dx}=\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial p}{\partial t}\frac{dt}{dx}=\frac{\partial p}{\partial x}$，由此得附面层微分方程组为：$u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}-U(x)\frac{dU(x)}{dx}=\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}=0$$

上列第一式对y积分，从0积至δ则

$$\int_0^\delta\left[u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}-U(x)\frac{dU(x)}{dx}\right]dy=\int_0^\delta\left(\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}\right)dy$$

因为$\tau=\mu\frac{du_x}{dy}$，所以$\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\tau}{\rho}\right)$。当$y=0$时$\tau=\tau_0$；当$y=\delta$时刚进入势流区$\tau=0$，则

$$\int_0^\delta\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}dy=\int_0^\delta\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\tau}{\rho}\right)dy=\frac{\tau}{\rho}\bigg|_0^\delta=0-\tau_0/\rho=-\frac{\tau_0}{\rho}$$

又因为$u_y=\int_0^y\frac{\partial u_y}{\partial y}dy$，以连续性方程代入则

$$u_y=-\int_0^y\frac{\partial u_x}{\partial x}dy$$

由此我们得

$$\int_0^\delta\left[u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}\int_0^y\frac{\partial u_x}{\partial x}dy-U(x)\frac{dU(x)}{dx}\right]dy=-\frac{\tau_0}{\rho}$$

上式方括号内第二项可用分部积分法

$$\int_0^\delta\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\int_0^y\frac{\partial u_x}{\partial x}dy\right)dy=\left[\int_0^y\frac{\partial u_x}{\partial y}dy\right]\left[\int_0^y\frac{\partial u_x}{\partial x}dy\right]\Bigg|_0^\delta-\int_0^\delta\left[\int_0^y\frac{\partial u_x}{\partial y}dy\right]\left[\frac{\partial u_x}{\partial x}dy\right]$$

$$=U(x)\int_0^\delta\frac{\partial u_x}{\partial x}dy-\int_0^\delta u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}dy$$

所以
$$\int_0^\delta\left[2u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}-U(x)\frac{\partial u_x}{\partial x}-U(x)\frac{\partial U(x)}{\partial x}\right]dy=-\frac{\tau_0}{\rho}$$

或
$$\int_0^\delta\frac{\partial}{\partial x}\{\rho u_x[U(x)-u_x]\}dy+\frac{dU(x)}{dx}\int_0^\delta\rho[U(x)-u_x]dy=\tau_0\qquad(5-55)$$

(5-55)式中等号左边的二个积分式均为动量对 x 的改变率，所以称为附面层的动量积分方程，与冯·卡门[1]用动量定理求得的积分方程完全一致。

*§5-13　平板上附面层的计算

当雷诺数较小时，附面层内的流动状态是层流，随着雷诺数的增大，物体前缘部分的附面层（δ较小）仍保持为层流，而后面部分则转变为紊流，形成混合型附面层（图5-36），雷诺数继续增大，层流转变为紊流的点逐渐向前推移，紊流附面层逐渐扩大而最后全部转变为紊流，当然，与管道的情况相似，在紊流附面层中贴近壁面处也存在层流次层。

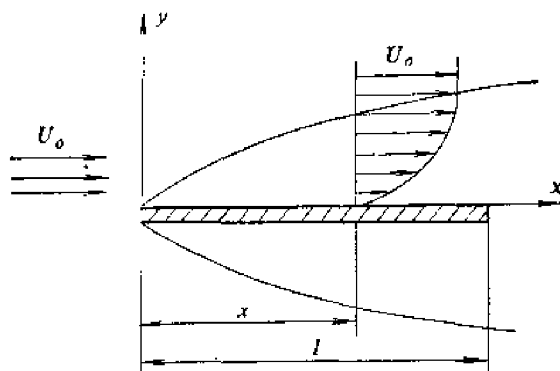


图5-34　平板上的附面层

现在我们研究不可压缩性流体的二元恒定流流经平板的问题，目的是求出平板上的阻力。设速度为 U_0 的二元流，流经长为 l 的平板，平板与来流速度 U_0 之间没有冲角，即平板平行于 U_0，平板上下将形成附面层，平板对来流的干扰也只限于附面层内，即附面层外势流区的流速为常数，等于来流速度 U_0。这就是说积分方程（5-55）式中 $U(x)=U_0=$ 常数，因此(5-55)式就可简化为

$$\tau_0=\rho\frac{d}{dx}\int_0^\delta u_x(U_0-u_x)dy=\rho U_0^2\frac{d}{dx}\int_0^\delta\frac{u_x}{U_0}\left(1-\frac{u_x}{U_0}\right)dy\qquad(5-56)$$

上式说明只要我们知道附面层内沿 y 的 u_x 分布，我们就能计算平板上的切应力 τ_0 而求得阻力。与管道内流动相类似，附面层内 u_x 的分布规律将随流态不同而异。我们分别加以讨论。

1. 层流附面层

设附面层内流速分布用一三次方多项式表示：

$$u_x=a+by+cy^2+dy^3$$

这里 a、b、c、d 为待定系数。

[1] Von Kármán Th., Über Laminare und Turbullente Reibung, ZAMM 1, 1921 pp. 233～253.

我们根据附面层的边界条件来求待定系数：

（1）壁面上流速为零，即$(u_x)_{y=0}=0$，$(u_y)_{y=0}=0$；

（2）附面层外边界上的速度为势流区内的速度，即$(u_x)_{y=\delta}=U_0$；

（3）附面层外边界上的速度梯度趋近于零，即$\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial y}\right)_{y=\delta}\approx 0$或$\tau=\left(\mu\dfrac{\partial u_x}{\partial y}\right)_{y=\delta}=0$；

（4）由于附面层外边界上速度为常数，由 拉格朗日-柏努利方程 可得附面层外边界上压强为常数，因此附面层内压强也为常数，即$\dfrac{dp}{dx}=0$，由（5-54）式得在平板上

$$\left(\nu\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}\right)_{y=0}=\left(u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)_{y=0}+\left(u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)_{y=0}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0$$

所以

$$\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}\right)_{y=0}=0$$

由上述四个边界条件，可以求得：

$$a=0;\quad b=\frac{3}{2}\frac{U_0}{\delta};\quad c=0;\quad d=-\frac{U_0}{2\delta^3}$$

由此，我们得

$$u_x=\frac{3}{2}U_0\frac{y}{\delta}-\frac{U_0}{2}\frac{y^3}{\delta^3}$$

或

$$\frac{u_x}{U_0}=\frac{3}{2}\frac{y}{\delta}-\frac{1}{2}\frac{y^3}{\delta^3}$$

代入（5-56）式得

$$\begin{aligned}\tau_0&=\rho U_0^2\frac{d}{dx}\int_0^\delta\frac{u_x}{U_0}\left(1-\frac{u_x}{U_0}\right)dy\\&=\rho U_0^2\frac{d}{dx}\int_0^\delta\left(1-\frac{3}{2}\frac{y}{\delta}+\frac{1}{2}\frac{y^3}{\delta^3}\right)\left(\frac{3}{2}\frac{y}{\delta}-\frac{1}{2}\frac{y^3}{\delta^3}\right)dy\\&=\frac{39}{280}\rho U_0^2\frac{d\delta}{dx}\end{aligned}$$

我们知道τ_0是平板上的剪切应力，即

$$\tau_0=\mu\frac{\partial u_x}{\partial y}\bigg|_{y=0}=\mu\left(\frac{3}{2}\frac{U_0}{\delta}-\frac{3}{2}\frac{U_0}{\delta^3}y^2\right)\bigg|_{y=0}=\frac{3}{2}\mu\frac{U_0}{\delta}\tag{5-57}$$

由此得

$$\frac{3}{2}\mu\frac{U_0}{\delta}=\frac{39}{280}\rho U_0^2\frac{d\delta}{dx}$$

或

$$\delta d\delta=\frac{140}{13}\frac{\mu}{\rho}\frac{dx}{U_0}=\frac{140}{13}\frac{\nu}{U_0}dx$$

积分之得

$$\frac{\delta^2}{2}=\frac{140}{13}\frac{\nu}{U_0}x+C$$

积分常数由边界条件确定：当$x=0$时$\delta=0$，则$C=0$，所以

$$\delta=\sqrt{\frac{280}{13}}\sqrt{\frac{\nu}{U_0}x}\tag{5-58}$$

上式说明在层流附面层中，厚度 δ 是与 $x^{\frac{1}{2}}$ 成正比，以（5-58）式代入（5-57）式得

$$\tau_0 = \frac{3}{2}\left(\frac{13\mu\rho U_0^3}{280\,x}\right)^{\frac{1}{2}} = 0.322\left(\frac{\mu\rho U_0^3}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

由此可见，平板上层流附面层时剪应力 τ_0 与 $U_0^{3/2}$ 成正比，与 $x^{\frac{1}{2}}$ 成反比。根据更精确的计算[1]和实测[2,3]，式中系数 0.322 应稍增大而为 0.332，这说明我们假设层流附面层内速度分布为三次方多项式基本上符合实际。由此得

$$\tau_0 = 0.332\sqrt{\frac{\mu\rho U_0^3}{x}}$$

单宽平板平上一边的摩擦阻力 R_f 为

$$R_f = \int_0^l \tau_0 dx = 0.664(\mu\rho U_0^3 l)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 1.328\ \frac{\rho U_0^2}{2\sqrt{\dfrac{\rho U_0 l}{\mu}}}\ l = \frac{1.328}{\sqrt{Re}}\ \frac{\rho U_0^2}{2}\ l = C_f\frac{\rho U_0^2}{2}\ l \tag{5-59}$$

式中 C_f 为摩阻系数，由此得平板上层流附面层的摩阻系数 C_f 为

$$C_f = \frac{1.328}{\sqrt{Re}} \tag{5-60}$$

当雷诺数 $Re = \frac{U_0 l}{\nu}$ 小于 5×10^5 时，平板上附面层基本上呈层流[4]，在 5×10^5 到 10^6 之间，附面层可能为层流也可能为紊流，主要决定于来流的状态和平板前缘形状和表面粗糙度。

2. 紊流附面层

在紊流情况下，普朗特尔认为附面层内的流速分布与管流相似，可以采用 1/7 方定律，即

管道中：
$$\frac{u}{v_{max}} = \left(\frac{y}{r}\right)^{1/7}$$

平板：
$$\frac{u}{U_0} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}$$

管道中心的流速 v_{max} 与平板势流区（包括附面层外边界）流速 U_0 相当，而管径 r 与 δ 相当，或者说附面层厚度 δ 相当于 $d/2$。

根据管流公式，壁面上剪切应力由（5-4）式

$$\tau_0 = \frac{\rho v^2}{8}\lambda$$

而

$$\lambda = \frac{0.3164}{Re^{1/4}} = \frac{0.3164}{\left(\dfrac{vd}{\nu}\right)^{1/4}}$$

〔1〕 Blasius H., Grenzschichten in Flüssigkeiten mit Kleiner Reiburg, Z. Math. u Phys. 56, 1908 pp. 1~37。

〔2〕 Dhawan S., Direct measurements of skin friction NACA Rep. 1120, 1953。

〔3〕 Liepmann H. W. & Dhawan S., Direct measurements of local skin friction in low-speed and high-speed flow, Proc. First US Nat. Congr. Appl. Mech. 1951 p. 869。

〔4〕 Schlichting H., Boundary-Layer Theory, Mc Graw-Hill 1968, p599。

则
$$\tau_0=\left(\frac{\rho v^2}{8}\right)\left[\frac{0.3164}{\left(\frac{vd}{\nu}\right)^{1/4}}\right]=0.079\ \frac{\rho v^2}{2}\left(\frac{\nu}{vd}\right)^{1/4}$$

式中平均流速 $v=\frac{1}{A}\int_A u dA$，这里 $u=v_{max}\left(\frac{y}{r}\right)^{1/7}$，$A=\pi r^2$，$dA=2\pi(r-y)dy$，由此得 $v=0.817v_{max}$，即 $\tau_0=0.079(0.817)^{7/4}\frac{\rho v^2_{max}}{2}\left(\frac{\nu}{v_{max}d}\right)^{1/4}$

以 U_0 替换 v_{max}，2δ 替换 d，则平板上的剪切应力 τ_0 为
$$\tau_0=\frac{0.079(0.817)^{7/4}}{(2)^{1/4}}\ \frac{\rho U_0^2}{2}\left(\frac{\nu}{U_0\delta}\right)^{1/4}=0.0233\rho U_0^2\left(\frac{\nu}{U_0\delta}\right)^{1/4}$$

由平板的附面层积分方程得
$$\tau_0=\rho\frac{d}{dx}\int_0^\delta u_x(U_0-u_x)dy=\rho\frac{d}{dx}\int_0^\delta U_0\left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}\left[U_0-U_0\left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}\right]dy$$
$$=\frac{7}{72}\rho U_0^2\ \frac{d\delta}{dx}$$

由此得
$$0.0233\rho U_0^2\left(\frac{\nu}{U_0\delta}\right)^{1/4}=\frac{7}{72}\rho U_0^2\frac{d\delta}{dx}$$

或
$$\delta^{1/4}d\delta=0.24\left(\frac{\nu}{U_0}\right)^{1/4}dx$$

积分之得
$$\frac{4}{5}\ \delta^{5/4}=0.24\left(\frac{\nu}{U_0}\right)^{1/4}x+C$$

积分常数由边界条件求得：在前缘处，$x=0$，$\delta=0$，则 $C=0$，由此得
$$\delta=0.381\left(\frac{\nu}{U_0}\right)^{1/5}x^{4/5}=0.381\left(\frac{\nu}{U_0x}\right)^{1/5}x$$

代入上述 τ_0 公式得
$$\tau_0=0.0233\rho U_0^2\left[\frac{\nu}{0.381U_0x}\left(\frac{U_0x}{\nu}\right)^{1/5}\right]^{1/4}=0.0296\rho U_0^2\left(\frac{\nu}{U_0x}\right)^{1/5}$$

单宽平板一边的摩擦阻力 R_f 为
$$R_f=\int_0^l\tau_0dx=0.0296\rho U_0^2\int_0^l\left(\frac{\nu}{U_0x}\right)^{1/5}dx=0.037\rho U_0^2l\left(\frac{\nu}{U_0l}\right)^{1/5}$$
$$=\frac{0.037}{Re^{1/5}}\rho U_0^2l=\frac{0.074}{R^{1/5}}\ \frac{\rho U_0^2}{2}\ l \tag{5-61}$$

由此得摩阻系数 C_f 为
$$C_f=0.074/Re^{1/5} \tag{5-62}$$

因为速度分布规律的指数 n 将随着雷诺数的增大而减小，用 $n=1/7$ 所求得的阻力系数有一定的适用范围，试验证明，在 $5\times10^5<Re<10^7$ 范围内（5-62)式与实验数据十分符合，在更大的雷诺数时，可采用对数速度分布规律
$$\frac{\bar{u}}{u_y}=5.85\lg\frac{yu_*}{\nu}+5.56$$

计算结果可归纳成一个适用范围为 $10^6<Re<10^9$ 的经验公式[1]：

$$C_f=\frac{0.455}{(\lg Re)^{2.58}} \tag{5-63}$$

我们将摩阻系数 C_f 与 Re 的关系画在对数座标图上，如图（5-35）所示，图中 1 为(5-60）式，2 为（5-62）式，3 为（5-63）式。由图可见，层流与紊流时摩阻系数 C_f 均随 Re

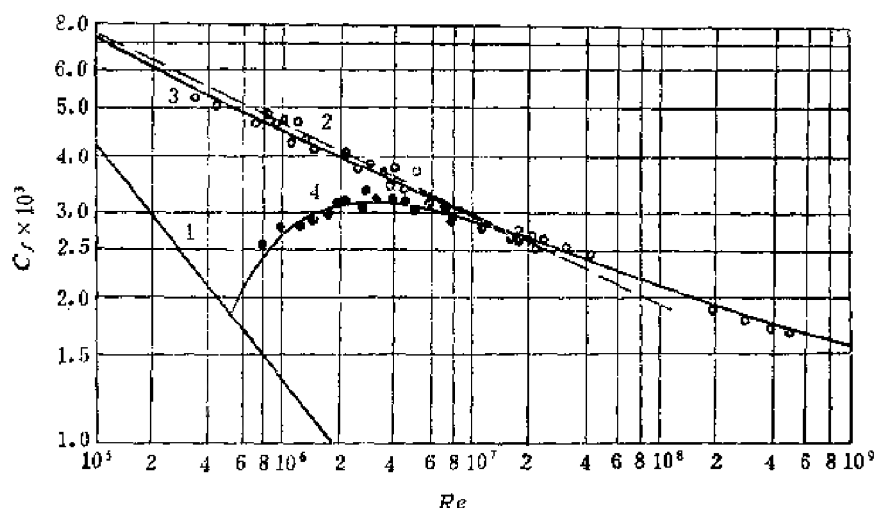


图5-35 平板上的摩阻系数

增大而减小，但紊流摩阻系数总是大于层流的摩阻系数，而且 Re 数越大，差距也越大。为了减小物体在流体中运动的摩擦阻力，应该力求使附面层保持为层流，也就是说应设法改善物体的形状，增加物体表面光洁度，避免一切干扰因素。

3. 混合流附面层

前面已经指出，附面层的流动状态并不是突然由层流完全变成紊流的，也不会突然从紊流完全变为层流。如果物体上原来是层流附面层，随着雷诺数的增大，物体上后面部分首先出现紊流，然后逐渐向前扩展，至一定 Re 数时才全部转变为紊流，因此从层流至紊流有一个过渡的混合流，混合流中层

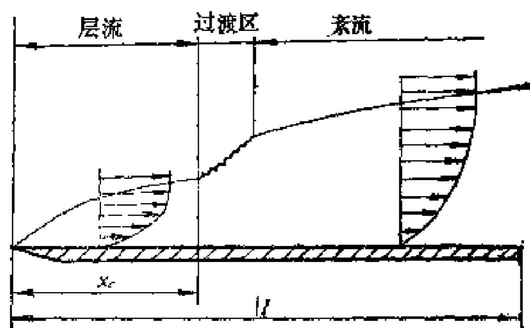


图5-36 混合流附面层

流段的长度为 x_c，如图（5-36）。混合流的摩阻系数 C_f 介于紊流与层流之间，x_c 越大 C_f 越小，可以采用在紊流摩阻系数上减去层流部分的差值的办法[2]，混合流的摩阻系数为

$$C_f=\frac{0.455}{(\lg Re)^{2.58}}-\frac{A}{Re} \tag{5-64}$$

式中 A 值如表 5-10。

[1] Schlichting H., Boundary-Layer Theory 6th ed. Mc Graw-Hill, 1968 pp. 601～603。

[2] Prandtl L., Über den Reibungswiderstand Strömender Luft, Ergebnisse AVA Göttingen, Ⅲ Lieferung, 1927。

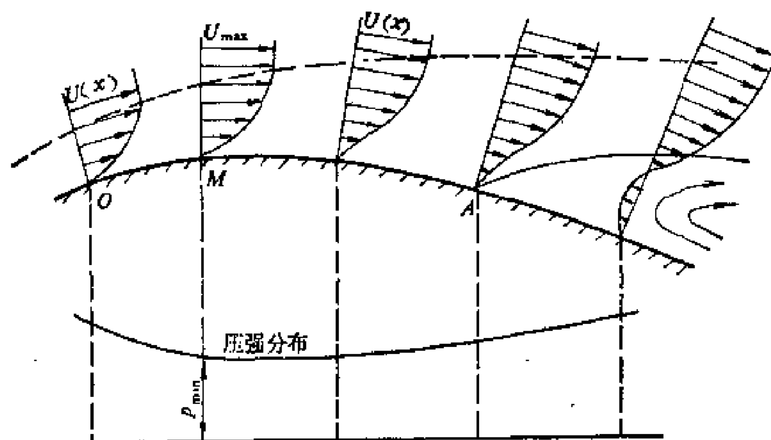
表5-10　混合流附面层A值

$\frac{U_0 x_c}{\nu}$	3×10^5	5×10^5	10^6	3×10^6
A	1050	1700	3300	8700

*§5-14　曲面上的附面层

在实际工程中，物体边界往往是曲面，但只要附面层厚度比壁面的曲率半径小得多，并应用曲线座标系（以壁面的弧长作x轴，y轴垂直于壁面），就可以将前述附面层微分方程与动量积分方程近似地应用于曲面。

我们知道，流体绕经无冲角的平板时，势流区速度不受任何干扰，速度与压强保持不变，因此附面层内压强为常数。但是，在绕经如图5-37所示的曲面物体时，自O至M点，物体壁



$\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)_{y=0}>0$　$\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)_{y=0}>0$　$\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)_{y=0}>0$　$\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)_{y=0}=0$　$\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)_{y=0}<0$

$\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}\right)_{y=0}<0$　$\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}\right)_{y=0}=0$　$\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}\right)>0$　$\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}\right)_{y=0}>0$　$\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}\right)_{y=0}>0$

图5-37　曲面上的附面层

面逼使势流速度增加$\left(即\frac{\partial U(x)}{\partial x}>0\right)$压强下降$\left(\frac{\partial p}{\partial x}<0\right)$，至$M$点，流速达到最大而压强最低，自$M$点以后，物体的壁面曲线下降，流速减小，压强增加。因为附面层中的压强是决定于附面层外边界的势流压强，所以附面层内压强随x而有升降。现在我们来讨论弯曲壁面上的情况，在壁面上$y=0$，$u_x=u_y=0$，由附面层微分方程（5-54）第一式得

$$\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}\right)_{y=0}=\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}$$

按曲面的形状可区分为三种情况：

（1）M点以前，不包括M点。在这个区域内附面层外边界上势流速度逐渐增加，压强降低，所以附面层内的流动$\frac{\partial u_x}{\partial x}>0$，$\frac{\partial p}{\partial x}<0$，由此得

$$\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}\right)_{y=0}<0$$

这说明在此区域内附面层的速度分布曲线在 x 轴方向呈凸形，且流动具有加速度，流体质点沿曲面前进不会产生分离现象。

（2）在 M 点，该处的附面层外边界上速度最大，压强最低，即 $\frac{\partial p}{\partial x}=0$，所以附面层内的 $\frac{\partial p}{\partial x}$ 也等于零，则 $\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}\right)_{y=0}=0$。

（3）M 点以后，不包括 M 点。在这个区域内附面层外边界上势流速度渐减，压强渐增，所以附面层内沿曲面流速渐减，压强渐增，$\frac{\partial p}{\partial x}$ 为正值，$\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}\right)_{y=0}>0$，于是附面层内速度分布曲线呈凹形，但在开始阶段 $\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)_{y=0}$ 仍大于零，沿着 x 向 $\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)_{y=0}$ 逐渐减小，至 A 点达到零值，A 点以后则出现 $\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)_{y=0}<0$，这表示沿壁面产生回流现象，上游来的流体将被回流挤开而使附面层与壁面分离。

在理想流体的绕流中，由于没有内摩擦，所以不但在降压区域，从压强较高的上游可以保证流体沿壁面流向低压的下游，就是在升压区域中，由于总的机械能不会损耗，也有足够的动能转变为压强势能，使压强升高。在粘性流体的绕流中，沿壁面的流速等于零，在降压区及升压区的前部，虽然因摩阻而损失部分能量，壁面附近的流体质点仍有足够的动能，可以向前运动，所以 $\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)_{y=0}>0$，但是到了 A 点处，壁面附近的流体质点的动能消耗殆尽，使流体不能沿壁面流至压强较高的区域。但是，离物体表面较远处的流体质点，由于摩阻损失较小，仍有较大的流速继续向下游运动。A 点以后，下游压强继续升高，壁面附近就产生逆向运动的回流，于是排挤上游的来流使它与壁面分离。由此可见，分离点在 $\frac{\partial p}{\partial x}>0$ 的区域内，当 $\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)_{y=0}=0$ 处，在这一点上的剪切应力 τ_0 为

$$\tau_0=\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)_{y=0}=0$$

回流使附面层分离而形成旋涡，使物体后面压强不能恢复，物体前后有显著压差而增加物体的阻力，这种阻力称为压差阻力。压差阻力是潜体上阻力的一个主要组成部分，它随着物体的形状和流体运动的条件而异，目前还不能从理论上进行计算，只能通过实验方法来求得。

* § 5-15 潜体的阻力

作用在被流体包围的物体表面上的法向力与切向力，在物体运动相反方向的分力和，称为潜体的阻力（Drag）。

在较高雷诺数下流体绕经某一物体时，如果基本上不发生附面层分离现象，则该物体可称为流线型物体，流线型物体上的压强分布与势流理论求得的压强分布十分符合，往往只在物体的后缘有些差别，因此流线型物体的阻力主要是摩擦阻力。另外一个极端情况是垂直于流动方向的平板。在理想流体的势流场中，流体绕过平板，前后流线是对称的（图 5-38 a），平板前后两对称点上的速度相等，压强也相等，所以平板前后的力是平衡的，阻力为零。这个结论与实际完全不符，称为达朗贝尔矛盾（D'Alembert Paradox）。实际上当流体绕经平

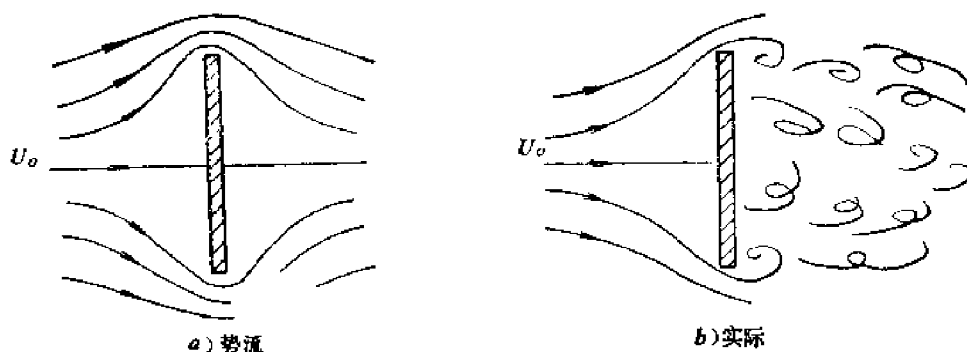


图5-38　流体绕经垂直平板

板边缘时，流线的曲率半径趋近于零，流速趋近为无穷大，则压强趋于负无穷大，这是不可能的，所以就在该处发生分离现象，根据海姆霍尔兹（Helmholtz）的断裂势流（Discontinuous Potential）理论，平板后面有一伸展至无穷远的死水区，区内压强为常数，等于无穷远处的压强。这样，平板上受到的力可以认作完全由于平板使来流偏转90°而产生的，设来流速度为U_0，根据动量定理，阻力$D=\dot{m}U_0=\rho AU_0^2$，由此得阻力系数$C_D=R\Big/\left(\rho A\dfrac{U_0^2}{2}\right)=2$。实验证明，当平板的宽度$b$与高度$h$的比为无穷大时$C_D=1.95$，当$b/h$为有限值时$C_D$还要小些，这说明平板后面并不是一个压强等于无穷远处压强的死水区，而是压强稍有恢复。与流动方向垂直的平板上的阻力，主要是由于物体形状造成物体前后压强差别而产生的，即为压差阻力。对于一般物体，既有摩擦阻力，也有压差阻力，它们的总和简称阻力D，通常用下式表示：

$$D=\frac{1}{2}C_DA\rho U_0^2 \tag{5-65}$$

式中C_D为阻力系数，它是随着物体的形状和雷诺数而异的，我们以圆柱体的绕流予以说明。

在势流场中，流体绕过圆柱时流线是对称的，圆柱上压强分布也是对称的，圆柱上既没有摩擦阻力，也没有压差阻力，这当然与事实不符，原因是略去了流体的粘性。在实际流体中，如果雷诺数很小，惯性力微不足道，这种流动称为海尔-肖流动（Hele-Shaw flow），流体绕过圆柱后能沿着圆柱面运动而不产生分离现象（图5-39 a），因此没有压差阻力而只有粘性所产生的层流附面层的摩擦阻力，层流摩擦阻力与速度成正比，所以阻力系数将随着雷诺数的增大而降低。随着雷诺数的增大，惯性力不能忽略，在$Re\approx20$时，圆柱上层流附面层在S处（图5-39 b）将发生分离，在分离点S以后的柱体附近生成一对驻涡，当雷诺数继续增大，涡对变得不稳定起来，开始作不规则的颤动，在雷诺数$Re=40$左右时，涡对中的涡依次交替离开圆柱体，离开后涡又不断产生，产生后又交替离开，使圆柱体后尾流中生成交叉排列的二行涡列，称为卡门涡列（Kármán vortex trail）或卡门涡街（Kármán vortex street）。涡的交替脱离频率n与圆柱直径d和流速U_0组成斯脱鲁哈数$Sh=\dfrac{nd}{U_0}$，这个数约为：$Sh=0.21/C_D^{3/4}$[1]，它随着雷诺数的增大而从0.12增大至0.21。由于涡的交替离开柱体，对圆柱体产生了垂直于主流的周期性的作用力，如果这个频率与柱体的自然频率接近时，就要发生谐振，这就是输电线，电话线产生所谓"风神竖琴"（Aeolian harp）的嗡鸣

〔1〕 Hoerner S. F., Fluid-Dynamic Drag 1965p. 3-6。

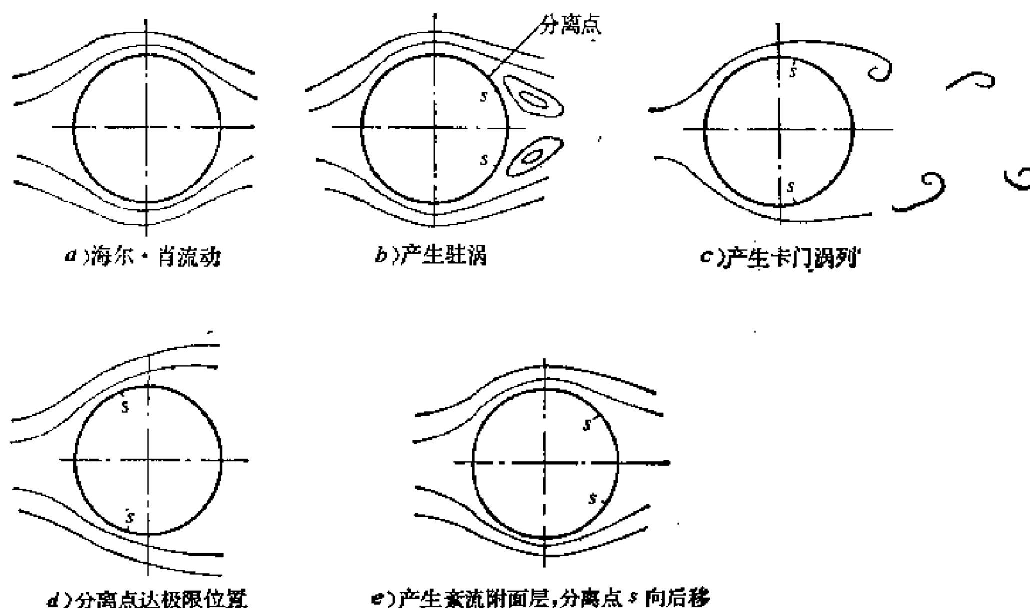


图5-39 绕圆柱体的流动

的原因。1940 年华盛顿州的塔可马（Tacoma）吊桥被风吹毁也是这个原因。在雷诺数较大时，例如 $Re>5000$，由于尾流中紊动利害而不再能清楚地看到卡门涡列。

由于分离的原因，产生了压差阻力，因此，圆柱上阻力为摩擦阻力与压差阻力的和，前者随 Re 的增大而降低，后者却随分离点的推前而稍有增大，所以 C_D 随 Re 的增大而下降要比小雷诺数时缓慢些（图 5-40），当 $Re>10^4$ 方时摩擦阻力已微不足道，分离点也不再推前，

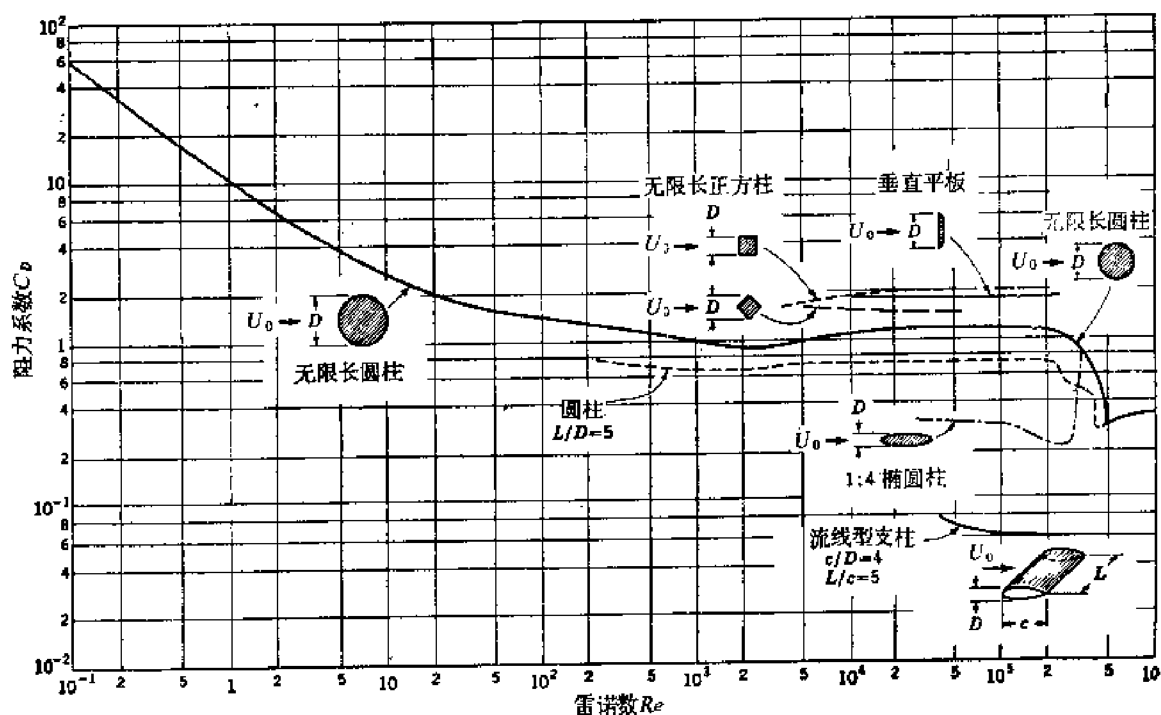


图5-40 二元物体的阻力系数

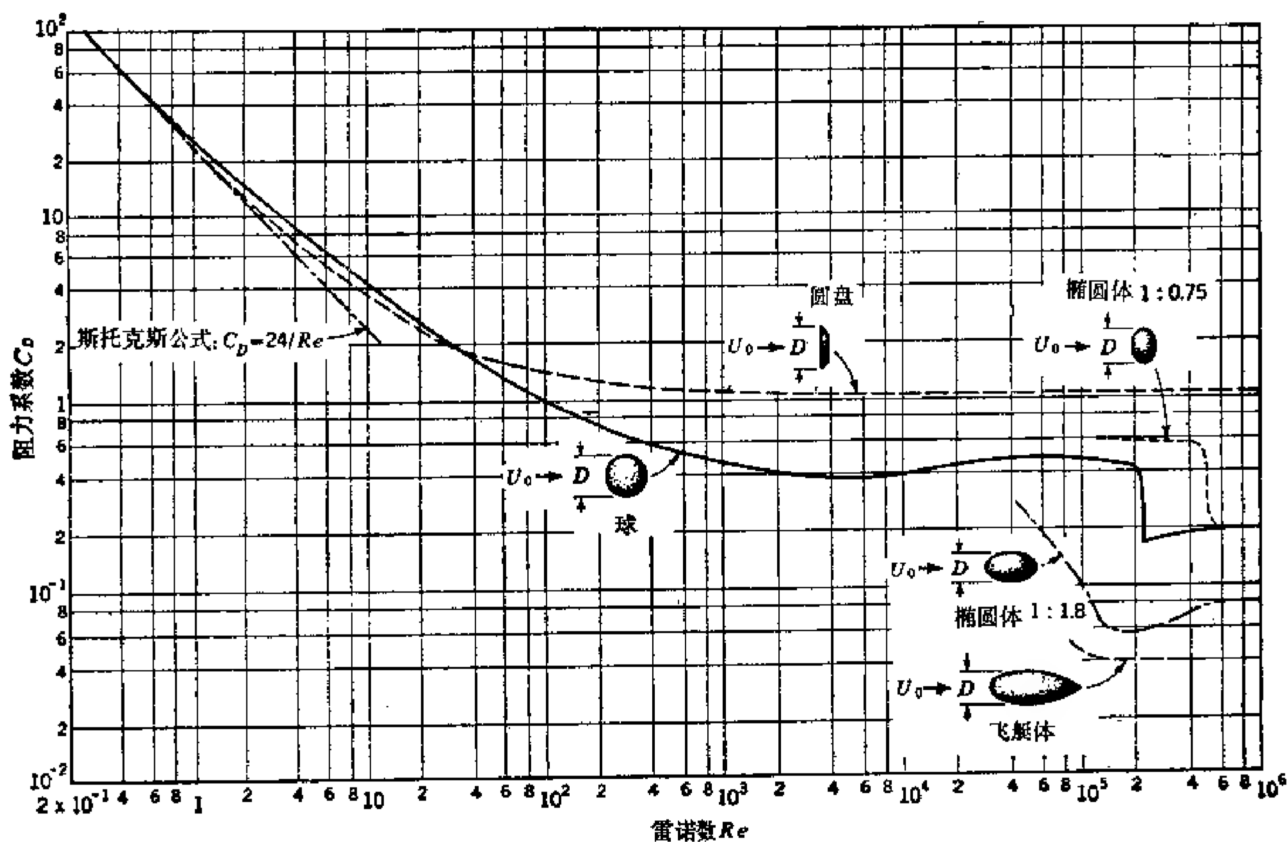
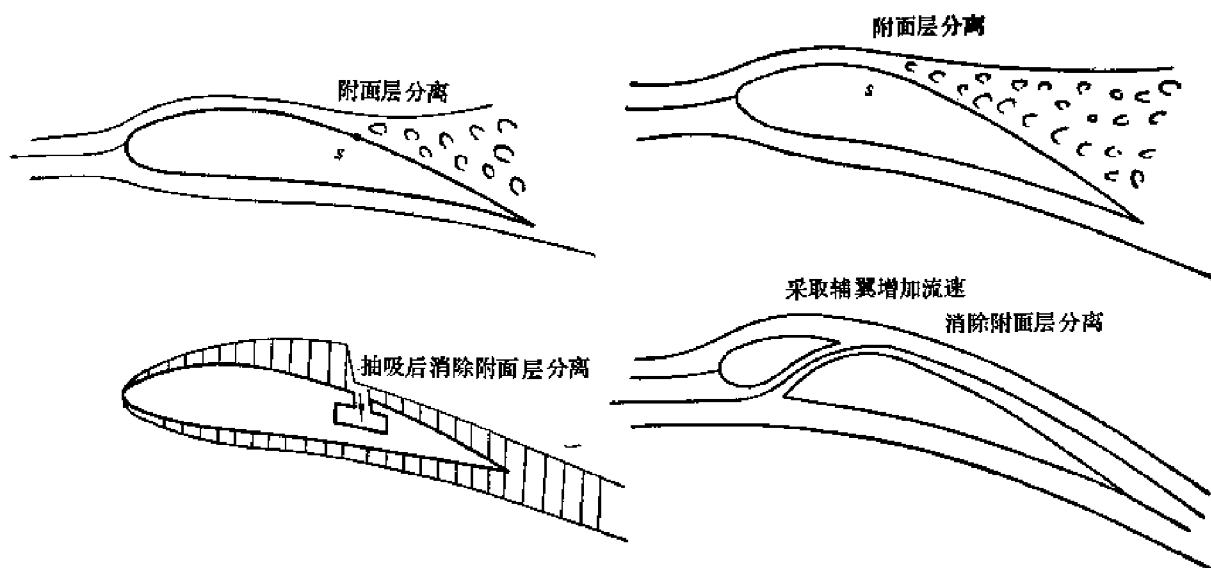


图5-41 回转体的阻力系数



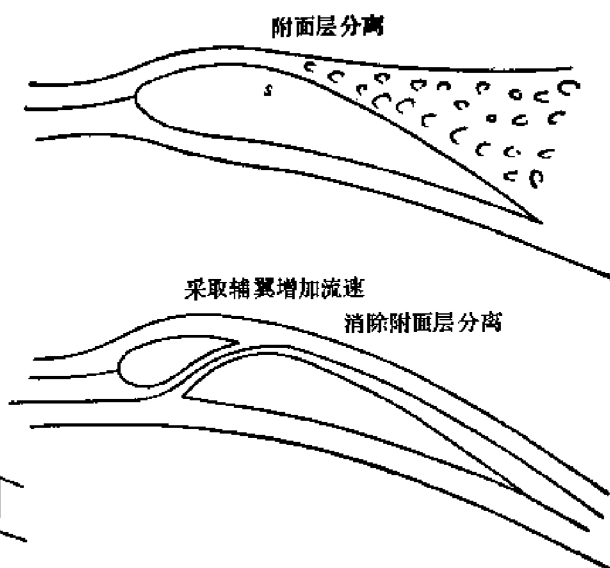


图5-42 附面层控制（一）

图5-43 附面层控制（二）

所以阻力系数成为一个定值，当雷诺数在2×10^5左右，光滑的圆柱上附面层将开始转变为紊流，粗糙圆柱则转变得更早些。由于紊流附面层中靠近壁面流体质点的流速较层流为高，动能较大，不容易被阻滞为零，因而在其它条件相同的情况下，紊流附面层可以延迟产生分离现象，所以当附面层由层流变为紊流时，虽然摩擦阻力有所增加，但分离点S推后（图5-39e），压差阻力显著降低，因此总阻力系数突降（图5-40）。

图5-41为回转体，例如圆球，椭圆体等的阻力系数C_D与Re数的关系

通过上述的讨论，我们可以归纳如下：

为了减小阻力，应设法避免附面层分离，在不发生附面层分离的情况下，附面层应尽可能保持为层流，如果要发生分离，则应在将要发生分离处设法使附面层转变为紊流以延缓分离。因为产生附面层分离的原因是沿流向压强增大和流体动能不足，因此如果在压强增大处采取减压措施，或使流体增加流速，均能消除附面层的分离而降低阻力。这种措施称为附面层控制。最常用的附面层控制为在物体表面开孔或槽，并施以吸力使附面层紧贴在物体表面上（图5-42），另一种办法是在物体上开槽形成喷管，使一部分流体经此槽缝中喷出，增加物体表面附近流体的动能。图（5-43）所示为飞机上采用辅翼消除附面层分离的一种措施。

第六章　流体的出流

以上各章我们讨论了流体运动的基本规律，应用这些基本规律可以解决很多实际问题。流体的出流是工程技术中常遇到的实际问题，例如油液流经滑阀、锥阀、阻尼孔等，都可归结为流体出流问题，可以用前述流体运动的基本定律来解决。本章的目的：一方面研究流体出流的特征，确定出流速度、流量和影响它们的因素；另一方面，通过这些问题的研究，使我们进一步掌握基本规律的应用。

§6-1　孔口出流的分类和基本特征

流体从孔口出流的情况是多种多样的，根据孔口的结构和出流的条件，有不同的分类：

一、从出流的下游条件来看，可以分为自由出流孔口，和淹没出流孔口。如果流体通过孔口后流入大气中称为自由出流孔口，如果是流入充满液体的空间，则称为淹没出流孔口；

二、从射流速度均匀性来看，可以分为小孔口与大孔口。根据柏努利方程，液体出流的速度与该点的总势头$\left(\frac{p}{\rho g}+H\right)$有关，如果孔口上各点的总势头差别可以忽略不计，即孔口上各点的流速可以认为是常数时称为小孔口，否则就称为大孔口；

三、从孔口边缘形状和出流情况可将孔口分为薄壁孔口和厚壁孔口。有下列几种情况：

（1）出流液体具有一定的流速，能形成射流且孔口具有尖锐的边缘，壁厚不影响射流的形状，这种孔口称为薄壁孔口。由于孔口边缘尖锐，而流线又不能突然转折，经过孔口后射流继续发生收缩，在离孔口很近的 $c-c$ 处射流断面积达到最小，称为收缩断面，它的面积以 A_c 表示，则 A_c 与孔口的几何断面积 A_0 之比称为收缩系数 $C_c=A_c/A_0$。在收缩断面 $c-c$ 上，流线近似于平行，可以认为是缓变流动。液体从薄壁孔口出流时没有沿程损失，只有因收缩而引起的局部阻力所产生的损失。薄壁孔口见图 6-1，a）；

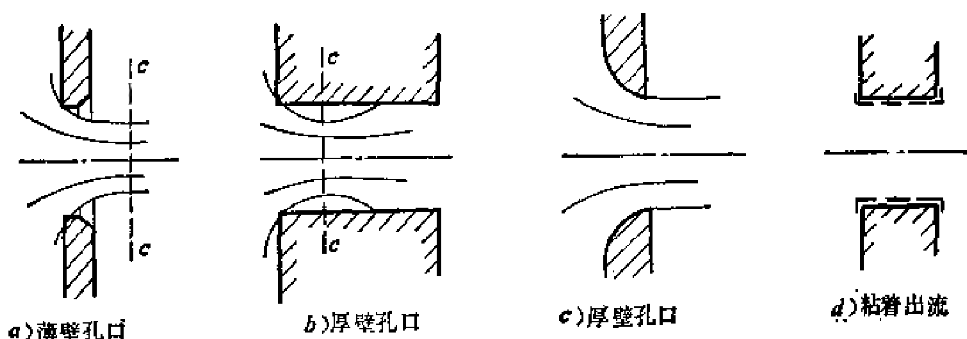


图6-1　孔　　口

（2）出流液体具有一定的速度，能形成射流，虽然孔口也有尖锐边缘，射流形成收缩断面，但由于孔壁较厚，射流收缩后又扩散而附壁图 6-1，b），称为厚壁孔口或长孔口，有时也称为管嘴。出流时不仅有收缩的局部损失，而且还有扩散损失和沿程损失；

（3）出流液体具有一定的流速，能形成射流，但孔口边缘具有一定的圆角，射流不能形成收缩断面，出流时主要产生沿程损失，即使实际边壁不厚，仍属于厚壁孔范畴（图 6-1 c）；

（4）出流速度很小，不能形成射流，液体粘着孔壁流出（图 6-1 d）。

第三种比较简单，第四种在工程上似乎没有实用价值。前二种有一定的特点，应用也较广，所以分别加以讨论。

具有尖锐边缘孔口的特点是射流的收缩，这对孔口的出流能力有显著的影响。因为射流的收缩是由于流线的连续性，而容器的侧壁和底部对出流时流线形状有一定影响。如果孔口的一边与侧壁或底部相切（图6-2，Ⅰ及Ⅱ），则相切处的射流就不会产生收缩，如果孔口离侧壁或底部太近，则收缩受到一定的影响，称为不完全收缩，只要离壁面的距离大于孔径或孔口边长的三倍，侧壁等就不影响射流的收缩，这时射流的收缩称为完全收缩。

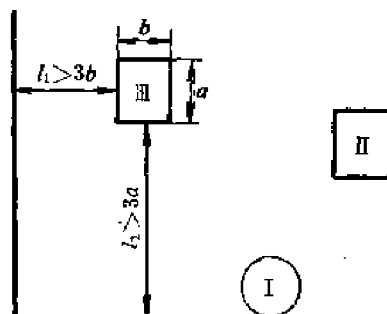


图6-2　孔口位置对射流收缩的影响

§6-2　薄壁孔口的恒定自由出流

液体从容器内经薄壁小孔流入大气，这个出流问题可用柏努利方程来解决，如图 6-3 所示，1-1 断面上的情况比较明确，压强为 p_1，流速为 v_1。射流的收缩断面 $c-c$ 上流速 v_c 基本上为常数，射流表面与大气接触，所以受到大气压强的作用，但射流断面上的压强规律需要讨论，我们在射流中任取一微小平行六面体，它的中心点压强为 p，忽略空气的阻力，则 x 方向射流速度为常数，即加速度为零。微小六面体在 x 方向的力平衡方程为

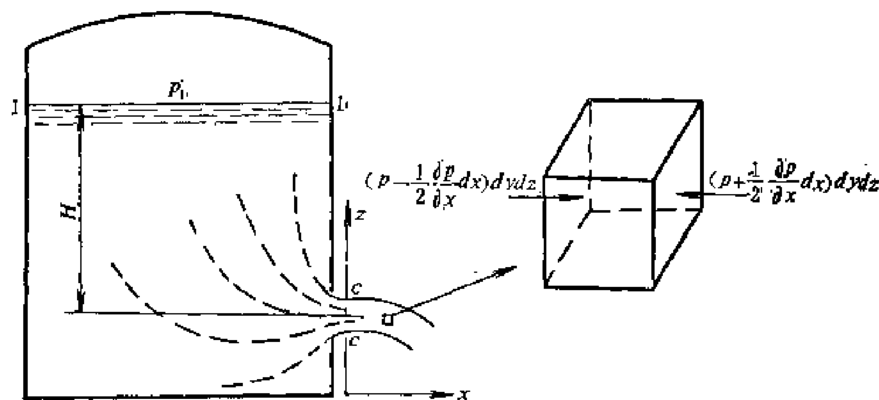


图6-3　薄壁孔口自由出流

$$\left(p-\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}dx\right)dydz-\left(p+\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}dx\right)dydz=0$$

所以 $\dfrac{\partial p}{\partial x}=0$

在 z 方向的力平衡方程为

$$\left(p-\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial z}dz\right)dxdy-\left(p+\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial z}dz\right)dxdy-\rho gdxdydz=-(\rho dxdydz)g$$

所以 $\quad \dfrac{\partial p}{\partial z}=0$

由此可见 $p=C$，即射流断面上压强为常数，应等于表面上的压强，即为大气压强 p_a。

列出液面 1-1 和收缩断面 $c-c$ 的柏努利方程：

$$\frac{p_1}{\rho g}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}+H=\frac{p_a}{\rho g}+\frac{\alpha_c v_c^2}{2g}+\Sigma\zeta\frac{v_c^2}{2g}$$

式中 $\Sigma\zeta$ 为孔口出流的阻力系数，由连续性方程 $v_1=\dfrac{A_c}{A_1}v_c$ 代入上式得

$$gH+\frac{p_1-p_a}{\rho}=\left[\alpha_c-\alpha_1\left(\frac{A_c}{A_1}\right)^2+\Sigma\zeta\right]\frac{v_c^2}{2}$$

或

$$v_c=\frac{1}{\sqrt{\alpha_c-\alpha_1\left(\dfrac{A_c}{A_1}\right)^2+\Sigma\zeta}}\sqrt{2\left(gH+\frac{p_1-p_a}{\rho}\right)}$$

如果容器断面 A_1 较大，即 $A_c\ll A_1$，对于小孔口来说 $\alpha_c=1$，并设 $\Delta p_c=p_1-p_c=p_1-p_a$

则

$$v_c=\frac{1}{\sqrt{1+\Sigma\zeta}}\sqrt{2\left(gH+\frac{\Delta p_c}{\rho}\right)} \tag{6-1}$$

如果容器敞开，$p_1=p_c=p_a$ 则

$$v_c=\frac{1}{\sqrt{1+\Sigma\zeta}}\sqrt{2gH}=C_v\sqrt{2gH} \tag{6-1 a}$$

如果 $\Delta p_c/\rho\gg gH$ 时，则

$$v_c=\frac{1}{\sqrt{1+\Sigma\zeta}}\sqrt{\frac{2\Delta p_c}{\rho}}=C_v\sqrt{\frac{2\Delta p_c}{\rho}} \tag{6-1 b}$$

式中 $\quad C_v=\dfrac{1}{\sqrt{1+\Sigma\zeta}}$ 称为流速系数。

通过孔口的流量为

$$Q=v_cA_c=C_cA_ov_c=C_cC_vA_o\sqrt{2\left(gH+\frac{\Delta p_c}{\rho}\right)}$$

$$=C_d\sqrt{2\left(gH+\frac{\Delta p_c}{\rho}\right)} \tag{6-2}$$

式中 $\quad C_d=C_cC_v$ 称为出流系数。

必须指出，出流系数 $C_d=C_cC_v=Q\Big/\sqrt{2\left(gH+\dfrac{\Delta p_c}{\rho}\right)}$，即出流系数 C_d 是由 Δp_c 所定义的而 $\Delta p_c=p_1-p_c$，所以出流系数 C_d 必须用收缩断面上的压强 p_c 来确定。因为 C_v 与流体粘性有关，而 C_c 与孔口边缘尖锐程度有关，所以出流系数一方面与孔口的结构有关，另一方面也与 Re 数有关。当 Re 数很大时，薄壁小孔口的出流系数 C_d 约为 0.60～0.61。

§6-3 流速系数、出流阻力系数和收缩系数

流速系数 $C_v=\dfrac{1}{\sqrt{1+\Sigma\zeta}}$，即考虑液体从孔口出流时的能量损失的系数，但出流的能量损失很难由理论计算，只能通过实验方法来求得，下面我们介绍二种实验方法。

1. 射流轨迹法

在射流收缩断面的中心作为座标轴的原点，测量射流上任一点M_o的座标x_o和y_o，如果忽略空气阻力则

$$x_o = v_c t$$

$$y_o = \frac{1}{2} g t^2$$

消去时间参数t得

$$v_c = x_o \sqrt{\frac{g}{2y_o}} = C_v \sqrt{2gH}$$

因此流速系数C_v为

$$C_v = \frac{x_o}{2\sqrt{Hy_o}}$$

2. 动量法

将试验容器悬挂在刀口上，如图6-5所示，目的是尽可能地减小摩擦阻力以免影响精度。在孔口未开放前，调整容器使在水平位置，打开孔口后，根据动量定理，容器上将受到一个F力，使容器偏离水平位置，然后增加配重mg，使容器重新处于水平位置，即$F = \frac{mgx_o}{y_o}$，由动量定理

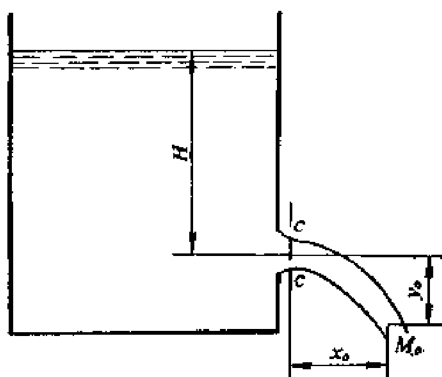


图6-4 射流轨迹法测C_v

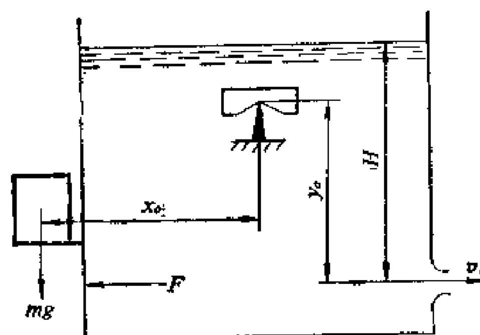


图6-5 动量法测C_v

$$F = \Sigma F_x = \rho Q(v_{xout} - v_{xin}) = \rho Q v_c$$

则

$$\frac{mgx_o}{y_o} = \rho Q v_c$$

或

$$v_c = \frac{mg}{\rho Q} \frac{x_o}{y_o} = C_v \sqrt{2gH}$$

由此得

$$C_v = \frac{mgx_o}{\rho Q y_o \sqrt{2gH}} = \frac{mx_o}{\rho Q y_o} \sqrt{\frac{g}{2H}}$$

根据不同方案的实测数据C_v约为0.97～0.99，如果平均以0.98计算则$0.98 = \frac{1}{\sqrt{1+\Sigma\zeta}}$，可求得孔口阻力系数$\Sigma\zeta \approx 0.042$。

用实验方法求得C_v和C_d后由$C_d = C_v C_c$，即可求出收缩系数C_c的实验值。

关于孔口收缩系数的理论解 H.Helmholtz[1]，G.Kirchhoff[2] 都作过研究，对于相当大的平板上具有狭长槽孔，收缩系数 C_c 为

$$C_c=\frac{\pi}{\pi+2}=0.611 \tag{6-3}$$

因为求解 C_c 时应用的是断裂势流理论，只适用于理想流体，所以 $C_c=0.611$ 相当于 $Re\to\infty$ 的情况。试验证明，当 Re 很大时理论计算和实测相当符合。

由于断裂势流理论比较复杂，我们应用动量定理来求收缩系数 C_c 的近似解。

我们以二元孔口（槽孔）为例，在孔的中心处 o 点设为座标轴原点，液体从四周汇向孔口，以 o 为中心 r 为半径，作一半圆，在该圆周上的流速为 u，单位宽度（垂直纸面方向）内流量为 Q，则

$$u=\frac{Q}{\pi r}$$

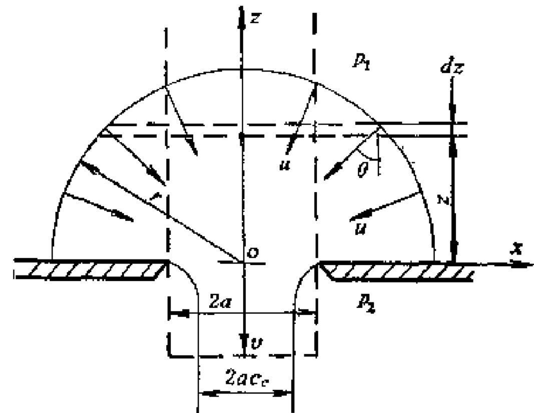


图6-6 二元孔口C_c的计算

取控制体积如虚线所示，则流入微小控制体积 dz 的液体质量为 $2\rho u\sin\theta dz$，z 轴向的动量为 $(2u\rho\sin\theta dz)(u\cos\theta)=2\rho u^2\sin\theta\cos\theta dz$，由此可得流入整个控制体积的动量 M_{in} 为

$$M_{in}=2\int_0^\infty \rho u^2\sin\theta\cos\theta dz=2\rho\int_0^\infty\frac{Q^2}{\pi^2r^2}\sin\theta\cos\theta dz$$

$$=\frac{2\rho Q^2}{\pi^2}\int_0^\infty\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}dz$$

因为 $r^2=z^2+a^2$，$\sin\theta=\frac{a}{r}$，$\cos\theta=\frac{z}{r}$，代入上式积分之得动量为

$$M_{in}=\frac{2\rho Q^2}{\pi^2}\int_0^\infty\frac{az}{(z^2+a^2)}\ dz=\frac{a\rho Q}{\pi^2}\left[-\frac{1}{z^2+a^2}\right]_0^\infty=\frac{\rho Q^2}{\pi^2a}$$

而流出控制体积的动量 M_{out} 为

$$M_{out}=\rho v(2aC_c)v=2\rho v^2aC_c$$

而

$$Q=2C_cav$$

代入上式得 M_{out} 为

$$M_{out}=\rho Q^2/2C_ca$$

由动量定理得

$$\frac{\rho Q^2}{2C_ca}-\frac{\rho Q^2}{\pi^2a}=(p_1-p_2)2a$$

---

[1] Helmholtz H., Über discontinuirlich Flüssigkeitsbewegung, Monatsberichte KAW, 1868 pp. 215～228。

[2] Kirchhoff G., Zur Theorie freier Flüssigkeitsstrahlen, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 70, 1869, pp. 289～298。

由柏努利方程

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2}\left(\frac{v}{C_v}\right)^2 = \frac{\rho Q^2}{8\,C_v^2 C_c^2 a^2}$$

流速系数 C_v 以 0.975 计，则

$$\frac{\rho Q^2}{a}\left(\frac{1}{2\,C_c} - \frac{1}{\pi^2}\right) = \frac{\rho Q^2}{3.8 C_c^2 a}$$

或

$$3.8\,C_c^2 - 1.9\,\pi^2 C_c + \pi^2 = 0$$

解方程得 C_c 为

$$C_c = \frac{1.9\,\pi^2 \pm \pi\sqrt{(1.9)^2\pi^2 - 4\times3.8}}{2\times3.8}$$

上式中根号前的正号是不合理的，故采用负号，由此可得 $C_c = 0.6007$，这个数值比 0.611 略小，但非常接近。

§ 6-4　厚壁孔的自由出流

图 6-7 为带有外伸圆柱形管嘴的容器，外伸管嘴 $l > (2\sim4)\,d$ 时就属厚壁孔范畴。列出液面 1-1 至出口断面 2-2 的柏努利方程

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2\,g} + H = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2\,g} + \Sigma\zeta\,\frac{v_2^2}{2\,g}$$

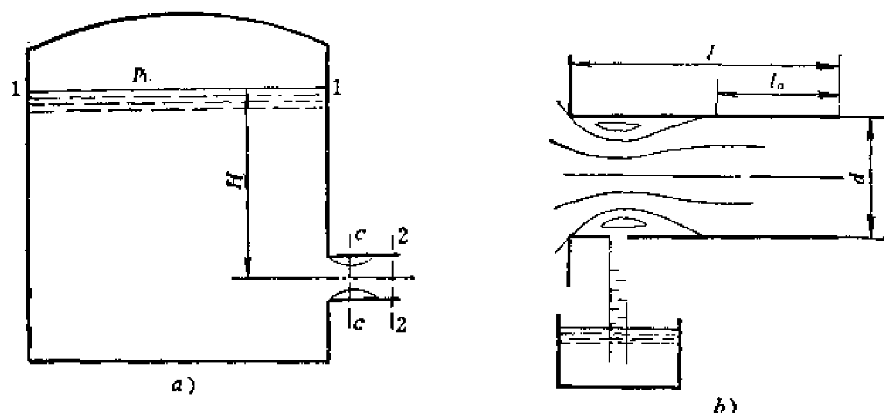


图6-7　管　　嘴

在小孔口的情况下 $v_1 \approx 0$，$\alpha_2 \approx 1$。其次，厚壁孔口自由出流时，如果进口处孔口边界是尖锐的，由于流线不能转折，射流也发生收缩，但射流受到流体的阻力，要发生扩散，如果壁厚 $l > (2\sim4)\,d$ 时，扩散的射流就发生附壁，在离开厚壁孔时，液体已充满整个断面，但孔口的内部仍存在一收缩断面（图6-7，b）。这样，厚壁孔口的出流能量损失 $\Sigma\zeta\frac{v_2^2}{2\,g}$ 由下列三部分组成：

（1）断面 1-1 至 c-c 之间的能量损失，属进口损失；

（2）断面 c-c 以后的扩散损失；

（3）射流附壁后的沿程摩阻损失。

前二项为突然收缩损失，对于小孔来说，由表（5-3）可得阻力系数 $\zeta_c \approx 0.49$，第三项沿

程损失为 $\lambda \frac{l_0}{d}\frac{v_2^2}{2g}$，需视附壁长度 l_0 而定，即

$$\Sigma\zeta = \zeta_c + \lambda\frac{l_0}{d}$$

由此得

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta_c+\lambda\frac{l_0}{d}}}\sqrt{2\left(gH+\frac{\Delta p}{\rho}\right)}$$

式中 $\Delta p = p_1 - p_2$，如果 $l=(2\sim4)d$ 时，则 l_0 很小，与 $1+\zeta_c$ 比较起来 $\lambda\frac{l_0}{d}$ 可以忽略，则

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{1+0.49}}\sqrt{2\left(gH+\frac{\Delta p}{\rho}\right)} = 0.82\sqrt{2\left(gH+\frac{\Delta p}{\rho}\right)}$$

即当 $l=(2\sim4)d$ 时，流速系数 $C_v \approx 0.82$

流量 Q 为

$$Q = v_2A_2 = 0.82\,A_2\sqrt{2\left(gH+\frac{\Delta p}{\rho}\right)} \tag{6-4}$$

与薄壁孔口比较一下，$l=(2\sim4)d$ 的厚壁孔口阻力增加了，C_v 由薄壁孔口的0.98降为0.82，但流量 Q 却反而有所增大，这是由于射流扩散附壁，出流断面充满液体，使收缩断面 c–c 处产生真空的缘故。列出 c–c 断面至2–2断面的柏努利方程

$$\frac{p_c}{\rho g}+\frac{\alpha_c v_c^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g}+\frac{\alpha_2^2 v_2^2}{2g}+\Sigma\zeta\frac{v_2^2}{2g}$$

式中能量损失 $\Sigma\zeta\frac{v_2^2}{2g}$ 项中沿程损失是可以忽略的，主要是扩散损失，所以 $\Sigma\zeta\frac{v_2^2}{2g} \approx \left(\frac{1}{C_c}-1\right)^2\frac{v_2^2}{2g}$。由连续性方程 $v_c = \frac{A_2}{A_c}v_2 = \frac{1}{C_c}v_2$，因此

$$\frac{p_2-p_c}{\rho g} = \left(\frac{1}{C_c^2}-1\right)\frac{v_2^2}{2g} - \left(\frac{1}{C_c}-1\right)^2\frac{v_2^2}{2g} = \left[\left(\frac{1}{C_c^2}-1\right)-\left(\frac{1-C_c}{C_c}\right)^2\right]\frac{v^2}{2g}$$

$$= 2\left(\frac{1-C_c}{C_c}\right)\frac{v_2^2}{2g}$$

以 $v_2 = C_v\sqrt{2\left(gH+\frac{\Delta p}{\rho}\right)}$ 及 $p_2 = p_a$ 代入得

$$\frac{p_a-p_c}{\rho g} = 2\left(\frac{1-C_c}{C_c}\right)\left(H+\frac{\Delta p}{\rho g}\right)C_v^2$$

我们知道 $\frac{p_a-p_c}{\rho g}$ 是 c–c 断面处的真空度，而 $C_c<1$，所以真空度是正的，即 $p_c<p_a$。设 $C_c=0.62$，$C_v=0.82$，则 c–c 断面的真空度 h_{vac} 为

$$h_{vac} = \frac{p_a-p_c}{\rho g} = 2\left(\frac{1-C_c}{C_c}\right)\left(H+\frac{\Delta p}{\rho g}\right)C_v^2 = 0.82\left(H+\frac{\Delta p}{\rho g}\right)$$

由此可见 $l=(2\sim4)d$ 的厚壁孔口的出流，不仅由于能头 $H+\frac{\Delta p}{\rho g}$ 的作用，而且还有真空的抽吸作用，并且真空的抽吸作用可以抵偿厚壁附加阻力而有余，因此反而使流量有较大

的增加。

我们知道，液体在低压下要发生汽化，所以最大真空在 $p_c=p_v$ 时，这就是说 $\left(H+\frac{\Delta p}{\rho g}\right)$ 应有一定的限制，否则就要发生汽穴，不产生汽穴的能头 $H+\frac{\Delta p}{\rho g}$ 为

$$\left(H+\frac{\Delta p}{\rho g}\right)\leqslant\left(\frac{h_{vac\ max}}{0.82}\right)$$

或

$$\left(H+\frac{\Delta p}{\rho g}\right)\leqslant 1.22\left(\frac{p_a-p_v}{\rho g}\right) \tag{6-5}$$

§6-5　薄壁阻尼孔的出流

液压技术中常用节流器或阻尼器来控制流量或压强，这些器件的下游大都并不与大气接触，而是充满液体，所以属淹没孔口范畴，淹没孔口也有薄壁与厚壁之分，本节讨论薄壁的情况。液流通过进口边为锐缘的孔口时，如果雷诺数 Re 并不很小，与自由出流相同，由于流线必需连续，自孔口流出的液体必然形成射流而产生断面收缩，如果孔口的断面为 $A_0=\frac{\pi d_0^2}{4}$，这里 d_0 为孔口直径，则射流收缩断面 A_c 比 A_0 小，$A_c=C_cA_0$。与前述自由射流不同，孔口下游并不与大气接触，而且液体出流后有扩散过程，在收缩断面 c-c 处速度最大，压强最低，随着射流的扩散，流速降低而压强升高，当然由于阻力而产生损失，压强不能完全恢复，如图 6-8 所示。

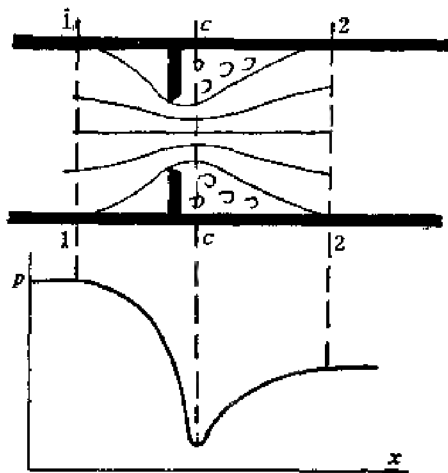


图6-8　薄壁孔口

由断面 1-1 至 c-c 的柏努利方程为

$$\frac{p_1}{\rho g}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=\frac{p_c}{\rho g}+\frac{\alpha_c v_c^2}{2g}+\Sigma\zeta\frac{v_c^2}{2g}$$

由连续性方程 $v_1A_1=v_cA_c=v_cC_cA_0$ 代入上式得

$$v_c=\frac{1}{\sqrt{\alpha_c-\alpha_1\left(\frac{C_cA_0}{A_1}\right)^2+\Sigma\zeta}}\sqrt{\frac{2\Delta p_c}{\rho}}$$

在液压技术中 A_0 一般要比 A_1 小得多 $\alpha_1\left(\frac{C_cA_0}{A_1}\right)^2$ 与 $\alpha_c+\Sigma\zeta$ 比较起来可以忽略，对于小孔来说，收缩断面处流速是均匀的 $\alpha_c=1$，则

$$v_c=\frac{1}{\sqrt{1+\Sigma\zeta}}\sqrt{\frac{2\Delta p_c}{\rho}}=C_v\sqrt{\frac{2\Delta p_c}{\rho}}$$

流量 Q 为

$$Q=v_cA_c=C_vC_cA_0\sqrt{\frac{2\Delta p_c}{\rho}}=C_dA_0\sqrt{\frac{2\Delta p_c}{\rho}} \tag{6-6}$$

Von Mises[1]对各种孔口出流问题作了系统研究，他用势流理论保角变换法求解，对不同 b/B 值时图 6-9，收缩系数 C_c 如表 6-1 所示。

H.Rouse 和 A.Abul-Fetouh[2]用松弛法求得平板上槽孔和圆孔出流，当 $(b/B)^2=(d/D)^2$ 时（D 为管径，d 为孔径）收缩系数基本上是一致的，如表 6-2 所示。

在液压技术中 $(d/D)^2$ 一般总在 0.1 以下，所以在 Re 数较大的情况下薄壁锐缘孔口收缩系数 C_c 取 0.61～0.63，流速系数 C_v 取 0.97～0.98，则出流系数约为 0.60～0.61。

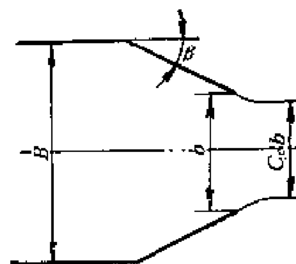


图6-9 槽 孔

表6-1 收 缩 系 数

b/B		0.00	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
C_c	β = 45°	0.746	0.747	0.747	0.749	0.758	0.789	1.00
	β = 90°	0.611	0.612	0.616	0.631	0.662	0.722	1.00

表6-2 用松弛法计算的 C_c

$(b/B)^2=(d/D)^2$	0.0	0.25	0.50	0.75	1
槽孔 C_c	0.611	0.644	0.689	0.757	1.00
圆孔 C_c	0.612	0.644	0.691	0.757	1.00

由于 von Mises 等的理论分析是略去液体的粘性（理想流体），因此只适合于 Re 数很大时，实验证明薄壁孔口的出流系数 C_d 与 $Re=\frac{vd_H}{\nu}$ 有关，式中 d_H 为水力直径，在圆管中 $d_H=d$，在槽孔中 $d_H=\frac{4Wb}{2(W+b)}$，当槽孔的长 W 较槽缝宽 b 大得多时 $d_H\approx 2b$。F.C.Johansen[3]在圆管中用 $d/D=0.209$，0.401，0.595，0.794 等的孔板求得出流系数 C_d 与雷诺数 Re 的关系如图 6-10 所示。Johansen 的实验指出，在 $Re<10$ 时，液流趋近孔口和离开孔口时基本上近于粘着状态。当 Re 增大时，在孔口下游开始产生脱流，至 $Re=150$ 时液体开始形成射流，射流周围为缓慢回流，Re 增大至约 250 时射流外缘稍现不稳定，Re 数继续增大则射流就逐渐达到完全收缩，这时射流外围虽包围

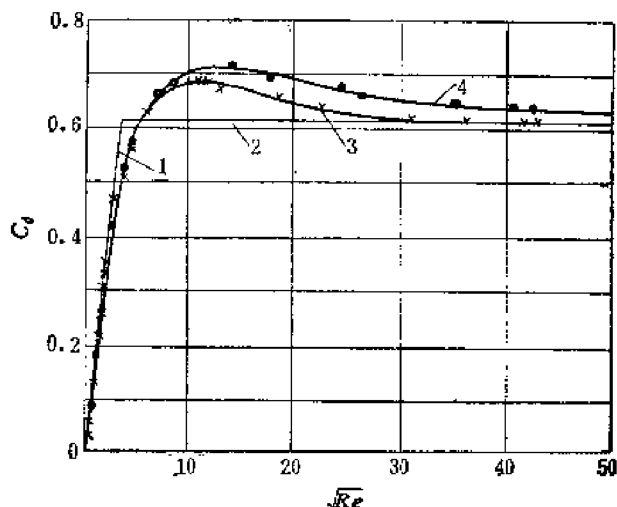


图6-10 薄壁孔口出流系数
1—Wuest近似值 2—Von Mises计算值 3—Johansen实验曲线 $d/D=0.209$ 4—Johansen 实验曲线 $d/D=0.401$

[1] Von Mises R., Berechung von Ausfluβ und Überfallzahlen, Z. V. D. I, 1917.
[2] Rouse H. & Abul-Fetouh A., Characteristics of Irrotational Flow through Axially Symmetric Orifice, J. Appl. Mech. V17 N 4, 1950 pp. 421～426.
[3] Johansen F. C., Flow Through Pipe Orifice at Low Reynolds Number, Proc. Roy. Soc. V126 N801,

着旋涡，但射流本身是稳定的。当$Re>1000$以后，出流系数C_d就基本上接近于Von Mises和Rouse等的理论解，当d/D较小（例如$d/D=0.209$）时，C_d稳定在0.611附近，这时它对温度变化不敏感（因C_d与Re数无关），当Re数在200左右时，$d/D=0.209$及0.401的孔板的C_d达到最大值，而$d/D=0.595$的孔板C_d最大值在$R=400$左右，$d/D=0.794$则在$Re=900$左右，它们的值各为0.68，0.71，0.77及0.93左右。Re数小于200时，出流系数C_d随着Re数的减小迅速下降，并对温度非常敏感。

W.Wuest[1]对低Re数时液流流经薄壁锐缘孔口的分析，得出当$d\ll D$时，圆孔口流量为

$$Q=\frac{\pi d^3}{50.4\mu}\Delta p_c \tag{6-7 a}$$

当$b\ll B$和$b\ll W$时，槽孔的流量为

$$Q=\frac{\pi b^2 W}{32\mu}\Delta p_c \tag{6-7 b}$$

因为$Q=C_d A_0\sqrt{\frac{2\Delta p_c}{\rho}}$，就圆孔口来说$\Delta p_c=\frac{50.4\mu Q}{\pi d^3}$，代入之得

$$\frac{Q}{A_0}=C_d\sqrt{\frac{2\Delta p_c}{\rho}}=C_d\sqrt{\frac{2}{\rho}\frac{50.4\mu Q}{\pi d^3}}=C_d\sqrt{\frac{50.4\mu}{2\rho d}\left(\frac{Q}{A_0}\right)}$$

所以

$$C_d=\sqrt{\frac{2}{50.4}}\sqrt{\frac{\rho\left(\frac{Q}{A_0}\right)d}{\mu}}=0.2\sqrt{Re} \tag{6-8 a}$$

同样方法可以求得低Re数时锐缘槽孔的出流系数C_d为

$$C_d=\sqrt{\frac{\pi}{128}}\sqrt{Re}=0.157\sqrt{Re} \tag{6-8 b}$$

上述淹没孔口的讨论，对液压技术中阻尼器、阀口出流是具有普遍意义的。必须指出，在液压技术领域内，阻尼器和阀口等出流问题中，要确定收缩断面的位置而测定收缩断面上的压强p_c是十分困难的，我们只能在出流口下游适当的地方测得压强p_d。一般来说，p_d总是大于p_c，则实测的Δp总是小于Δp_c，我们把$Q\Big/A_0\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}$定义为流量系数，以符号$C_q$表示，即

$$C_q=\frac{Q}{A_0\sqrt{\frac{\Delta p}{\rho}}} \tag{6-9}$$

由此可得

$$\frac{C_q}{C_d}=\sqrt{\frac{\Delta p_c}{\Delta p}}$$

由于$\Delta p<\Delta p_c$，所以流量系数C_q总是大于C_d，只有在自由出流的情况下$\Delta p_c=\Delta p$，C_q与C_d是相同的。

---

〔1〕 Wuest W., Stromung durch Schlitz-und Lochblenden bei Kleinen Reynolds-Zahlen, Ingenieur Archiv. Nr. 22, 1954 pp. 357～367。

§6-6 阻尼长孔的出流

阻尼长孔在液压技术中应用很广，因为多数阻尼器件，例如控制元件（阀等）中的阻尼器本身尺寸较小，阻尼孔直径只有几个毫米也可能在1毫米以下，要做成薄壁锐缘孔口，加工是很难达到要求，虽然可以做成如图6-11的形式，但长度 仍难控制，所以往往做成长孔。由于油液的粘度较大，而孔径很小，阻尼孔中的流动可能呈现紊流也可能呈层流。图6-12为管道中的长阻尼孔，列出 s-s 和阻尼器出口2-2断面的柏努利方程

$$\frac{p_s}{\rho g}+\frac{\alpha_s v_s^2}{2g}=\frac{p_2}{\rho g}+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}+\Sigma\zeta\frac{v_2^2}{2g}$$

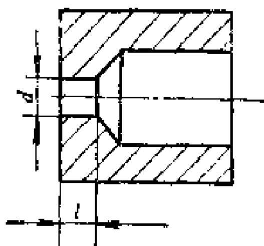


图6-11 阻尼孔

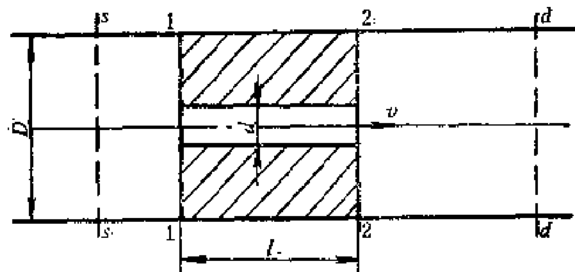


图6-12 阻尼长孔

由此得

$$p_s=p_2+(\alpha_2+\Sigma\zeta)\rho\frac{v_2^2}{2}-\rho\frac{\alpha_s v_s^2}{2}$$

因为 $v_2=v_1=v$，$v_s=v_d$，由连续性方程

$$v_s=v_d=\left(\frac{d}{D}\right)^2 v=m^2 v$$

代入上式得

$$p_s=p_2+(\alpha_2-\alpha_s m^4+\Sigma\zeta)\rho\frac{v^2}{2} \tag{6-10}$$

在紊流时，$\alpha_2=1$，而阻力系数 $\Sigma\zeta$ 包括突然收缩损失 $\zeta=0.49$ 和沿程摩阻 $\zeta=\lambda\frac{l_o}{d}\approx\lambda\frac{l}{d}$，因为 $m<1$ 所以 $\alpha_s m^4$ 可以忽略不计，则

$$p_s=p_2+\left(1+0.49+\lambda\frac{l_0}{d}\right)\rho\frac{v^2}{2} \tag{6-10 a}$$

油液出流后从2-2断面至 d-d 断面为一扩散过程，由动量定理

$$\rho A v_d(\beta_2 v-\beta_d v_d)=(p_d-p_2)A$$

式中 A 为管道断面积，由此得

$$p_d=p_2+\rho v_d(\beta_2 v-\beta_d v_d)=p_2+2m^2(\beta_2-\beta_d m^2)\rho\frac{v^2}{2} \tag{6-11}$$

在紊流时 $\beta_2\approx1$，而 $m<1$，所以 β_2 与 $\beta_d m^2$ 相比较，后者可以略去，即

$$p_d=p_2+2m^2\rho\frac{v^2}{2} \tag{6-11 a}$$

(6-10 a)式减去(6-11 a)式得

$$\Delta p = p_s - p_d = \left(1 + 0.49 + \lambda \frac{l_0}{d} - 2m^2\right)\rho \frac{v^2}{2}$$

即

$$v = \frac{1}{\sqrt{1.49 + \lambda \frac{l_0}{d} - 2m^2}}\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} = C_v\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}$$

流量Q为

$$Q = vA_0 = C_v A_0\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} = C_q A_0\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}$$

即流量系数C_q为

$$C_q = C_v = \frac{1}{\sqrt{1.49 + \lambda \frac{l_0}{d} - 2m^2}} \tag{6-12}$$

当m较小时，$2m^2$与$1.49 + \lambda \frac{l}{d}$相比较可以略而不计，则

$$C_q = \frac{1}{\sqrt{1.49 + \lambda \frac{l_0}{d}}} \tag{6-12 a}$$

当$l/d = 2 \sim 3$时$\lambda \frac{l_0}{d}$很小，可以略去不计，则$C_q \approx 0.82$。

在层流时，必须考虑起始段影响，如果阻尼器进口边呈圆角，则由（5-29）式略去m的高次方项

$$\Delta p = p_s - p_d = \left(\frac{64}{Re}\frac{l}{d} + \xi + \zeta_1 - 2m^2\beta_2\right)\rho \frac{v^2}{2}$$

如果进口边为锐缘，当雷诺数很低时，也就是$Re\frac{d}{l}$很低时，由于粘性力很大，惯性力很小，油液进入孔口不一定形成射流，油液粘附壁面而不产生收缩现象，这时$\zeta_1 \approx 0.042$，当雷诺数增大时，由于射流收缩，必然引起附加损失ζ_2，但断面收缩并不是突然由附壁变成完全收缩，而是有一个渐变过程，即由粘附壁面而成为不完全收缩，当Re数继续加大则达到完全收缩，完全收缩时阻力系数$\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 = 0.49$，即

$$\Delta p = p_s - p_d = \left(\frac{64}{Re}\frac{l}{d} + \xi + \zeta_1 + \zeta_2 - 2m^2\beta_2\right)\rho \frac{v^2}{2}$$

由此得层流时流量系数C_q为

$$C_q = \frac{1}{\sqrt{\frac{64}{Re}\frac{l}{d} + \xi + \zeta_1 + \zeta_2 - 2m^2\beta_2}} \tag{6-13}$$

式中ξ及β_2均随$Re\frac{d}{l}$而异，ζ_2则与Re有关，所以流量系数C_q可以认为是$Re\frac{d}{l}$的函数。

根据 Langhaar 的数据：

当$\frac{l}{Red} \leqslant 0.058$时$\xi = 1 + 2.62\left(\frac{l}{Red}\right)^{1/4}$；

当 $\frac{l}{Red}>0.058$ 时 $\xi=2.28$;

略去 $2m^2\beta_2$，并认为 $Re\leqslant30$ 时，油液粘附壁面，则 $\zeta=\zeta_1+\zeta_2=0.042$，而 $Re>2000$ 时 $\zeta=0.49$，并设 Re 数在 30 至 2000 之间 ζ 呈线性变化，则按（6-13）式计算结果如表 6-3 所示。

表6-3 层流时 C_q 与 $Re\frac{d}{l}$ 的关系

$Re\frac{d}{l}$		1	2	3	5	10	20	50	100	200
ξ		2.28	2.28	2.28	2.28	2.28	2.24	1.98	1.81	1.69
ζ	$\frac{l}{d}=2$	0.042	0.042	0.042	0.042	0.042	0.044	0.062	0.0807	0.126
	$\frac{l}{d}=10$	0.042	0.042	0.042	0.046	0.062	0.0807	0.149	0.272	紊流
C_q	$\frac{l}{d}=2$	0.122	0.169	0.204	0.257	0.336	0.426	0.548	0.627	0.685
	$\frac{l}{d}=10$	0.122	0.169	0.204	0.257	0.336	0.426	0.542	0.607	紊流

紊流粗糙管时，因为 λ 与 Re 数无关，由（6-12）式可知流量系数 C_q 只决定于 l/d，在紊流光滑管时，因为 λ 是 Re 数的函数，所以 C_q 将与 Re 数和 l/d 有关，层流时则 C_q 为 $Re\frac{d}{l}$ 的函数。根据作者[1]的试验和统计现有试验数据[2]，证明上述理论是符合实际的，在 $Re\frac{d}{l}\leqslant200$ 时，（6-13）式与试验数据相当一致（图 6-13）。

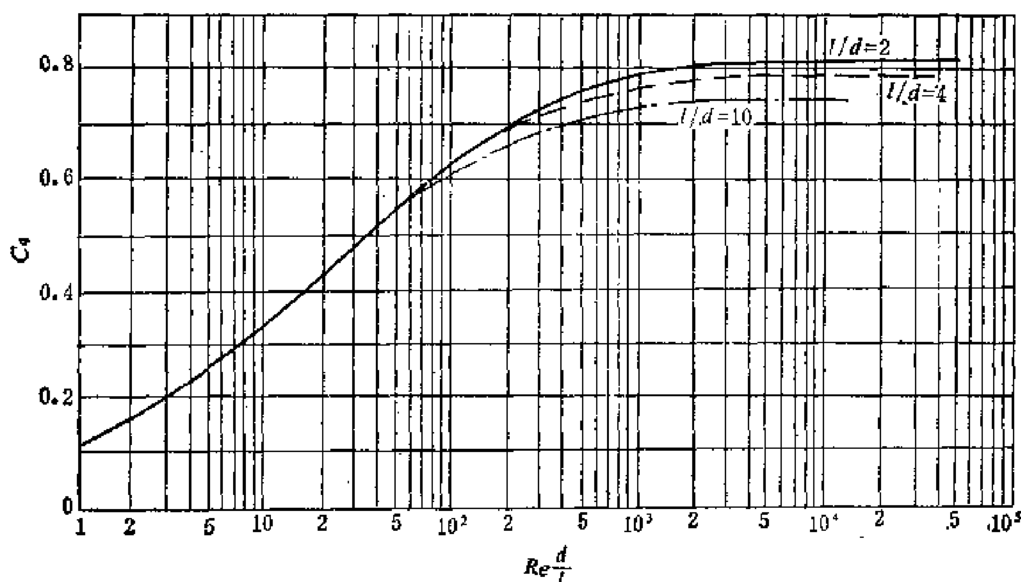


图6-13 阻尼长孔的流量系数

Lichtarowicz 等分析了 A.J.James，M.J.Zucrow 及 E.W.Sanderson 等的试验数据，发现当 $l/d=0.5$ 时，流量系数 C_q 随 Re 数的增大过程中，达到某一峰值后迅速下降，在 $Re\approx2000$ 时基本上为一恒定值，当 $l/d=1$ 时，虽然 C_q 不再有明显的峰值，但仍有 C_q 突变的

〔1〕 盛敬超、刘其元、梁钧陶，长孔口的出流特性，浙江大学液压教研室，1979年5月。

〔2〕 Lichtarowicz A., Duggins R. K. & Markland E., Discharge Coefficients for Incompressible Non-cavitating Flow through Long Orifices, J. of Mech. Engng. Sci. V7 N2, 1965 pp. 210~218。

痕迹（图 6-14），甚至在 $l/d \approx 2$ 的时候，这个痕迹还能发现。这是因为在雷诺数较低时，油液粘附壁面或不完全收缩后重新附壁，C_q 决定于 Re，达峰值后（$Re>700$），油液有足够的流速，形成的射流在 l/d 较小的情况下不再附壁，使 C_q 下降。当 $l/d>2$ 时，射流基本上能稳定附壁，流量系数 C_q 就不会出现上述现象，因此 $0.5<\frac{l}{d}<2$ 的阻尼器最好不要在 $500<Re<2000$ 的范围内工作。

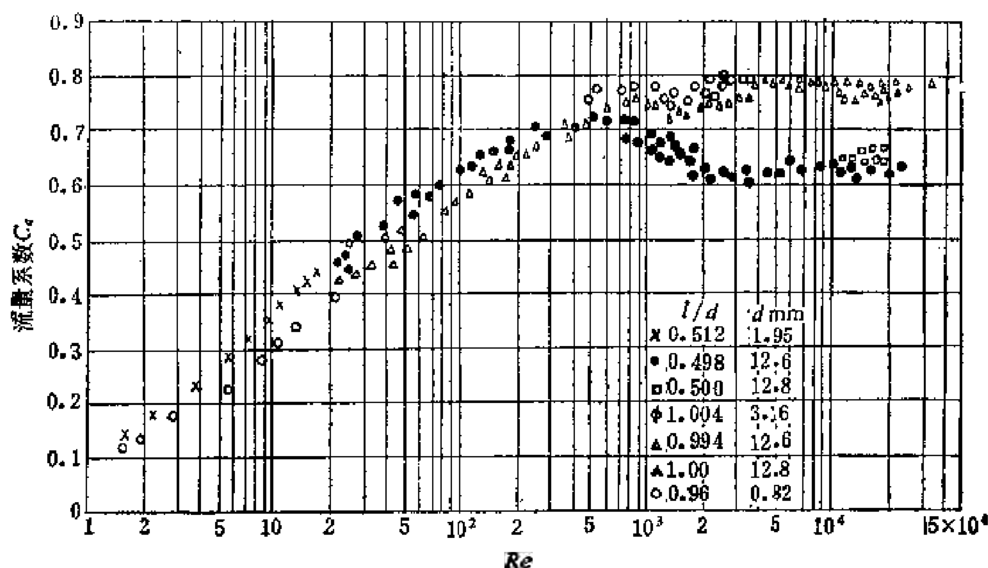


图6-14 $l/t\leqslant 1$时流量系数有突变

阻尼器的计算公式为 $Q=C_qA\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}$，由此可见，阻尼器的计算有下列类型：

1. 已知流量Q，孔径d，求压差Δp；
2. 已知压差Δp，流量Q，求孔径d；
3. 已知压差Δp，孔径d，求流量Q。

由于 C_q 与 Re 数有关，而 $Re=\frac{vd}{\nu}$ 是决定于 v 和 d 的，因此，除了第1类问题外，Re 数是未知值，这样，C_q 也为未知值，计算时往往要用试差法，即假定一个 C_q 值，进行计算后再校核假设的 C_q 是否符合，逐步逼近而求解，比较繁琐。由于 $v=C_v\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}$，对于出流时重新附壁的阻尼孔 $C_v=C_q$，所以我们可得

$$Re=\frac{vd}{\nu}=\frac{C_v\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}\,d}{\nu}$$

或

$$\frac{d\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}}{\nu}=\frac{Re}{C_v}=\frac{Re}{C_q}$$

如果我们用 F 表示 $\frac{d\sqrt{2\Delta p/\rho}}{\nu}$，并称为流数，则

$$F\frac{d}{l}=\frac{Re}{C_q}\frac{d}{l} \tag{6-14}$$

我们将图 6-13 的横座标 $Re\frac{d}{l}$ 换成 $F\frac{d}{l}$，则计算第 3 类问题时就可直接使用图6-15而不必再用试差法了。

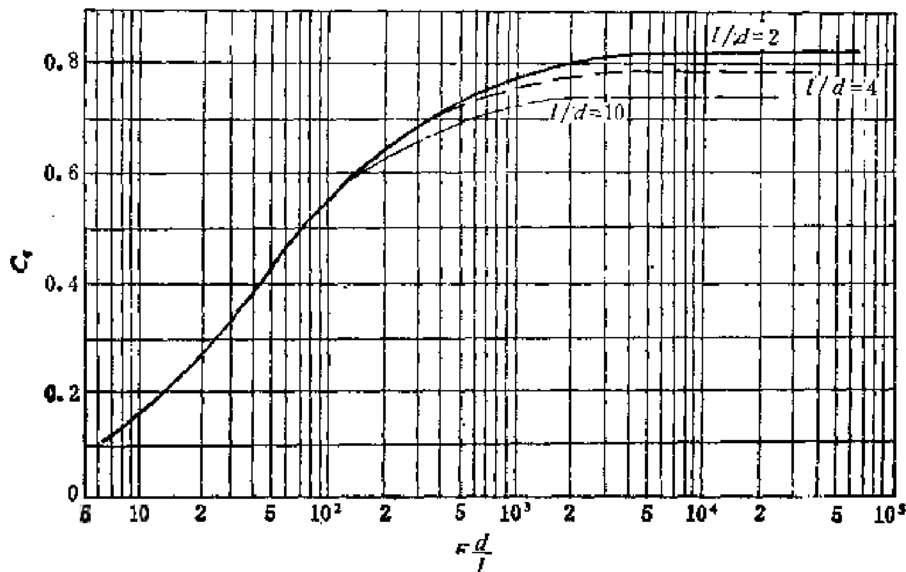


图6-15 阻尼长孔 C_q 与 $F\frac{d}{l}$ 的关系

§ 6-7 滑阀和锥阀阀口流量系数

滑阀和锥阀广泛应用于方向控制和压强控制阀中，通过阀口的流量可用下式表示：

$$Q=C_qA\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}$$

式中 A——阀口通流断面积；

Δp——阀口压差。

由此可见，在阀的水力计算中，流量系数 C_q 是一个十分关键的数据。1954 年 B.A.Хохлов[1] 对滑阀的流量系数进行比较系统的研究，他的实验结果是当 $Re=\frac{2vx}{\nu}$（v 为阀口平均流速，等于 $\frac{Q}{A}=\frac{Q}{wx}$，这里 w 为阀口周长，x 为阀口开度）小于 260 时 C_q 是随 Re 数而变，而且 C_q 有峰值，当 Re 数大于 260 时，C_q 是相当恒定的，约为 0.57（见图6-16)，现在看来这个数值是偏低的。

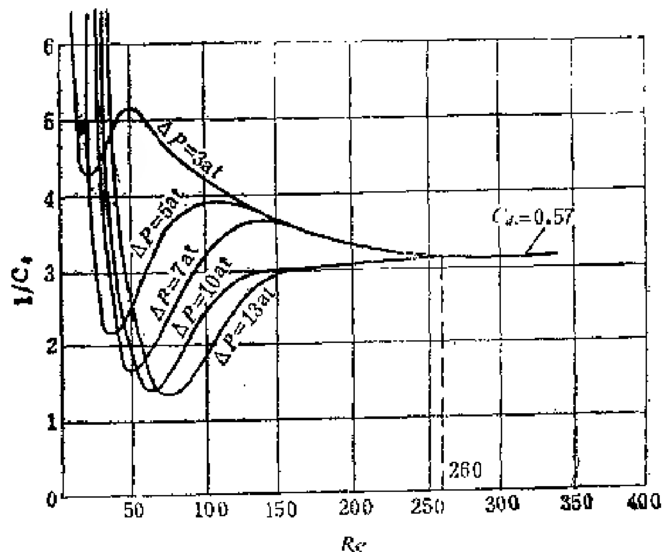


图6-16 滑阀流量系数（Хохлов）

〔1〕 Хохлов В. А., Коэффицент Гидравлических Потерь и Коэффицент Расхда Жидкость через Окна Цилиндрических Золотников Гидравлических Исполнительных Механизмов, АВТОМАТИКА и ТЕЛЕМЕХАНИКА Т. 16 Н. 1 1955 стр. 64~70。

J.F.Blackburn 等[1] 认为阀口是锐边时，流量系数 $C_q \approx 0.6 \sim 0.65$，如果是圆边或即使有很小倒角则 C_q 将达 0.8～0.9 或者更大。节流口或阀口的形状对C_q基本上没有影响，环缝与圆孔几乎一样，目前在计算时锐缘滑阀口的 C_q 常取 0.65。1968年竹中利夫[2] 为日本油压及油压机器调查研究分科会写了一份资料，建议滑阀的流量系数曲线如图 6-17 所示。1970 年阿武和秋山[3]对滑阀的流量系数做了系统的分析和实验研究指出，滑阀的流量系数

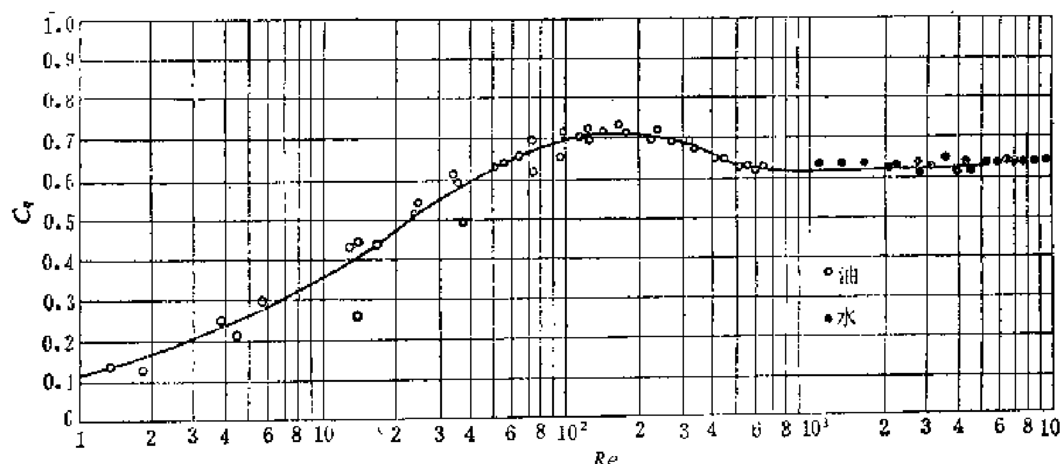


图6-17　滑阀流量系数（竹中）

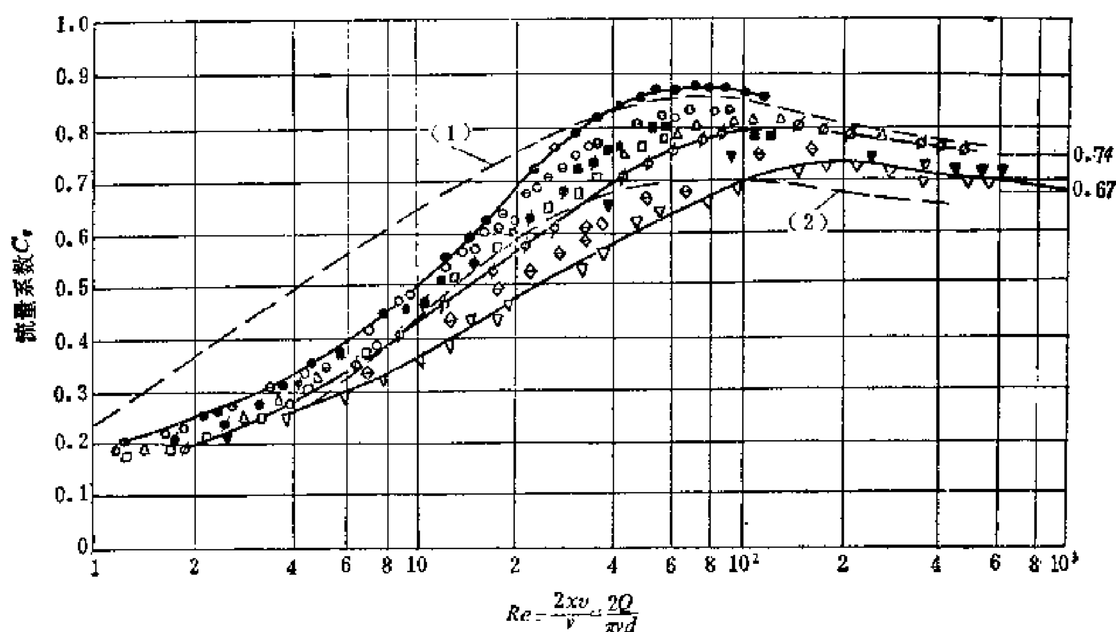


图6-18　滑阀流量系数（阿武·秋山）$c_r=15\mu$

[1] 布拉克伯恩等，气动液动控制(Fluid Power Control, MIT press, 1960)科学出版社，1965 p. 183。
[2] 油压および油压机器调查研究分科会，油压制御弁の安定性，日本机械学会誌71卷599号1968 p. 1734～1738。
[3] 阿武芳朗·秋山伸幸，スプール形油压方向切换弁の流量系数について（第一报，第二报），日本机械学会论文集36卷286号1970，pp. 960～981。

不仅与Re数有关，而且与阀口开度x、径向间隙C_r都有关系，图6-18是当径向间隙为15μ时的实验曲线，他们的试验还指出出口背压对流量系数也有影响。G.D.S.MacLellan等[1]和D.McCloy[2]在试验滑阀时发现液流自阀口出流后有时发生重新附壁现象，在阀口和液流附壁之间形成气泡（图6-19），D.McCloy测得该气泡长度达阀口开度x的四倍，气泡中的压强小于下游阀腔的压强。由于出流的附壁，类似于厚壁孔，使流量系数有显著的增大，MacLellan等曾测得出流附壁时流量系数C_q高达0.93左右。McCloy测得如果出流附壁，在大Re数时恒定的流量系数可达0.72。

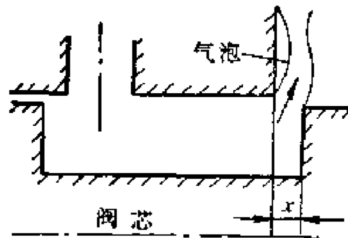


图6-19 阀口出流重新附壁

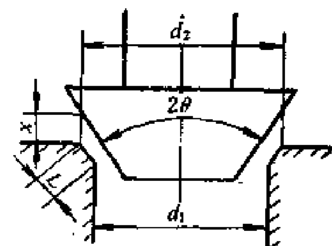


图6-20 锥 阀

综合上述，Хохлов得出的滑阀流量系数是偏小的，阿武和秋山做了系统细致的工作，但系数较一般偏大些，根据工艺条件，在大Re数时滑阀流量系数采用0.65左右是合理的。

市川和清水在[3]在1965对锥阀的流量系数进行了研究，求得出流系数C_q的理论式为

$$C_q=\left\{\frac{24}{\sin\theta}\left(\ln\frac{d_2}{d_1}\right)\frac{1}{Re(2h/d_m)}+\beta\left(\frac{d_m}{d_1}\right)^2+\frac{54}{35}\left(\frac{d_m}{d_2}\right)^2\right\}$$

式中 $h=x\sin\theta$；

x=阀的升起高度；

$d_m=\frac{1}{2}(d_1+d_2)$；

$Re=\frac{v_m d_m}{2\nu}$。

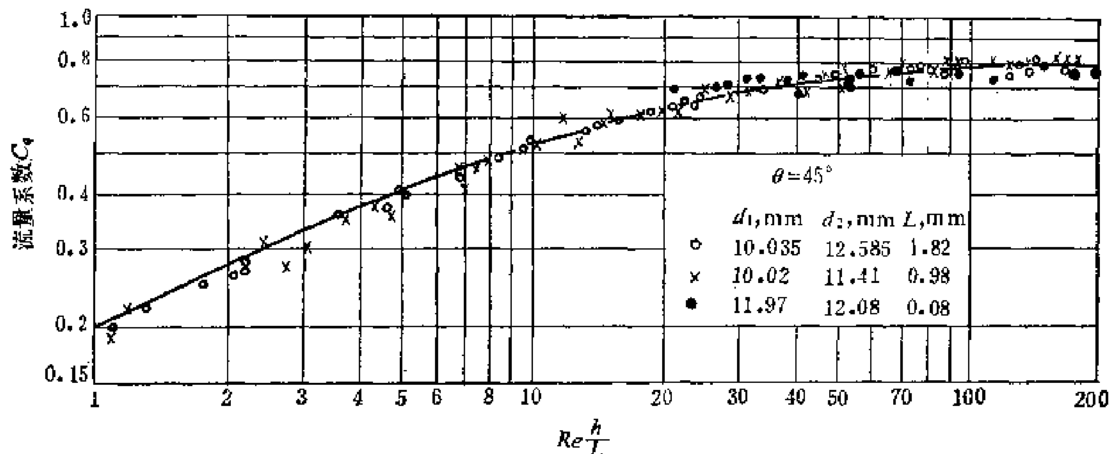


图6-21 锥阀流量系数（市川・清水）

[1] G. D. S. MacLellan, Mitchell A. E. & Turnbull D. E., Flow characteristics of Piston-type Control Valve, Proc. of the Symposium on Recent Mech. Engng. Developments in Automatic Control, Jan. 1960 pp. 13~30。

[2] McClog D., Discharge Characteristics of Servo-Valve Orifice, Proc. of the 1968 Fluid Power International Conference Sept. 1968 pp. 43~60。

[3] 市川常雄・清水孝，ポペット弁の流量系数について，机论31卷222号1965 pp. 317~319。

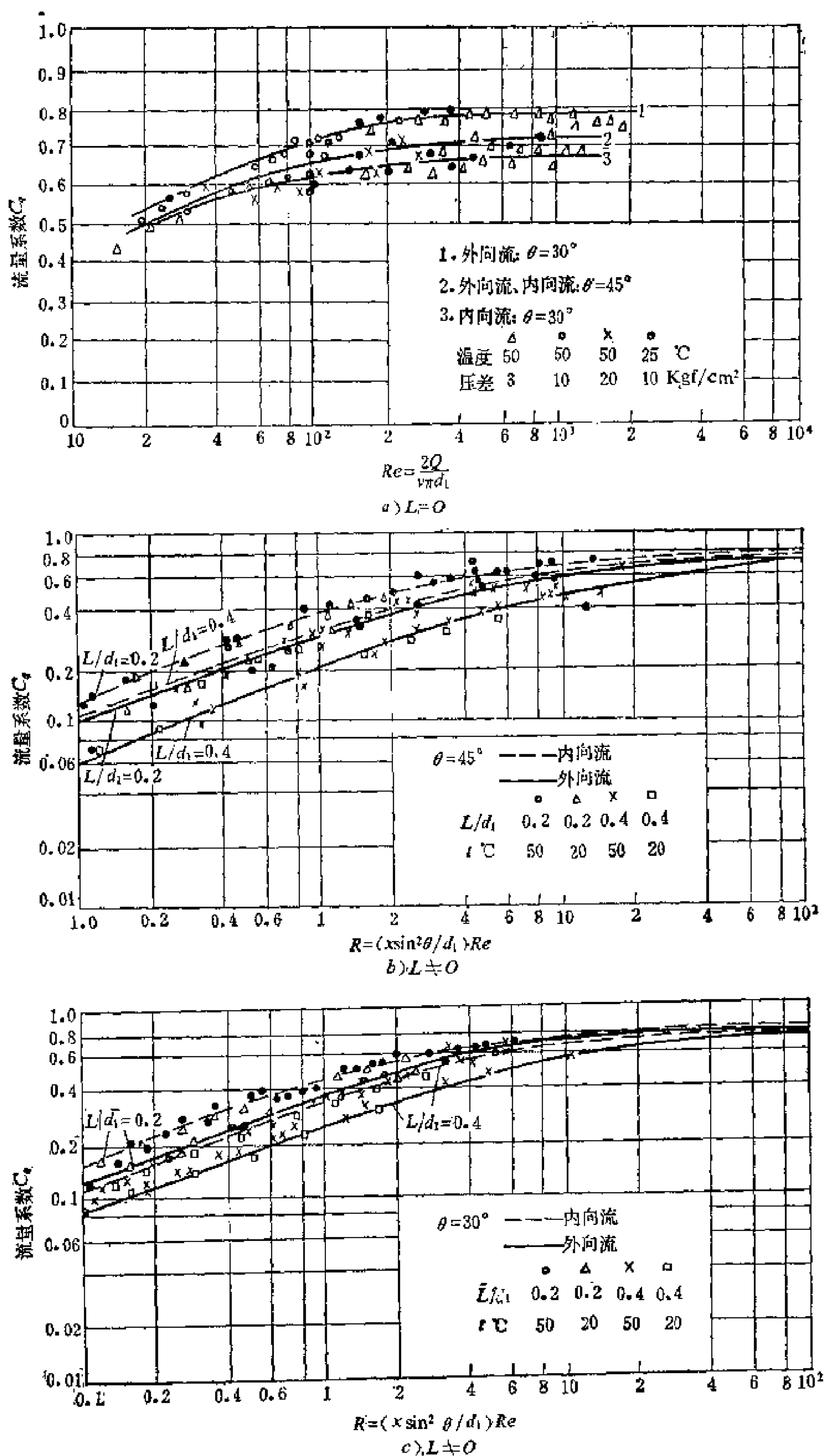


图6-22 锥阀的流量系数（笠井）

v_m 为 d_m 处的平均流速；

$\beta \approx 0.18$。

实验数据与理论式基本符合（图 6-21），以后竹中和浦田[1]对 Vickers 型的高压溢流阀做了研究工作，得出主阀（$\theta = 45°$）在 $Re<80$ 时 $C_q = 0.08\,Re^{1/2}$，在 $Re = 80\sim200$ 时 $C_q = 0.42\,Re^{1/3}$，$Re>200$ 时流量系数为恒定值，约为 0.8～0.82，1967 年笠井浩爾[2]发表了锥阀流量系数的论文，他指出锥阀的流量系数 C_q 不仅与 Re 数有关，而且与半锥角 θ，凡尔线宽 L 以及流动方向都有关，图 6-22 是按笠井的数据制成的。

§6-8 喷嘴-挡板阀流量系数

在气动控制系统中常利用喷嘴-挡板作为控制元件，在液压技术中，喷嘴-挡板广泛地用作伺服阀的第一级。在喷嘴-挡板阀的计算中需要确定喷嘴-挡板间的流量系数。T.Y.Feng[3]曾经在喷嘴挡板阀上测定喷嘴与挡板之间缝隙的流量系数，结果如图（6-23）所示，图中 p_c 为喷嘴进口腔中的压强，p_s 为固定节流器前的压强，p_c/p_s 称为供压比。雷诺数 $Re = \dfrac{v_0(2x_f)}{\nu} = \dfrac{2x_f}{\nu}\left(\dfrac{Q}{\pi d x_f}\right) = \dfrac{2Q}{\pi \nu d}$，这里 x_f 为喷嘴与挡板间的距离。Feng 的试验指出，Re 数在 300 到 400 之间，流量系数 C_q 有较大变化，应予避免，但 T.Y.Feng 为使试验稳定，雷诺数 Re 较低。Lichtarowicz 和 Markland[4] 对喷嘴挡板这种型式的流动进行研究，求得收缩系数 C_c 为

$$\frac{1}{C_c} = 1 - \frac{K^2-1}{\pi K^2}\,\text{arctg}\,\frac{2K}{K^2-1} + \frac{2a}{\pi K}\,\text{Arth}\,\frac{1}{a}$$

在无汽穴情况下系数 $K = 1$，则上式为

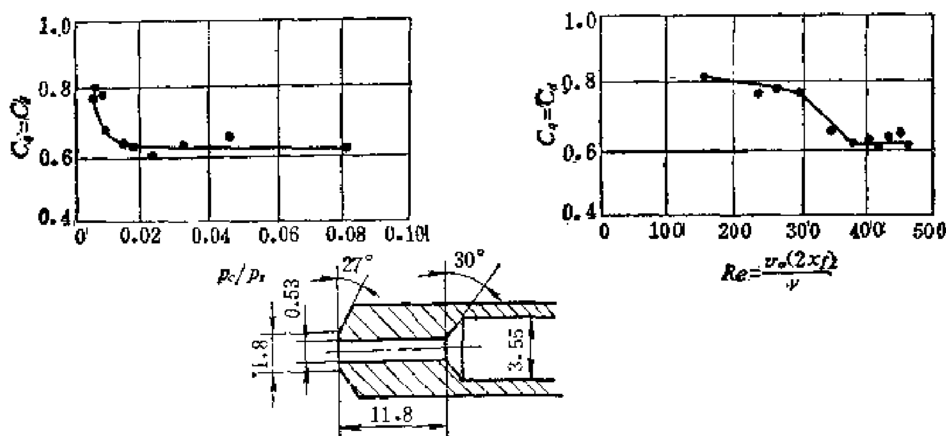


图6-23 喷嘴流量系数（T. Y. Feng）

[1] Takenaka T. & Urata E. ,Static & Dynamic Characteristics of Oil-hydraulic Control Valves, The 1968 Fluid Power International Cenference Sept. 1968 pp. 67～74。

[2] 笠井浩爾（现名高桥浩爾），円すい形ポペット弁の流量系数について，机论33卷251号1967 pp. 1083～1086。

[3] Feng T. Y. , Static & Dynamic Control Characteristics of Flapper-nozzle Valves, J. of Basic Engng. Trans. ASME series D V81 N 3 1959 pp. 275～284。

[4] Lichtarowicz A. & Markland E. ,Calculation of Potential Flow with Separation in a Right-angled Elbow with Unequal Branches, J. of Fluid Mechanics, V17 pt. 4 1963 pp. 596～606。

$$\frac{1}{C_c}=1+\frac{2a}{\pi}\text{Arth}\frac{1}{a}$$

式中 $a=\frac{1}{2}\left(v_0+\frac{1}{v_0}\right)$，这里 v_0 相当于喷嘴出口前的流速。他们用实验方法求得喷嘴与挡板间缝隙内出流的流量系数 C_q，不仅与 Re 数有关，而且与喷嘴前端的几何形状和缝隙 x_f 的大小有关，如果喷嘴前端基本上是锐缘的，即 t/x_f 等于零或很小（图 6-24）则液流自喷嘴出流后与喷嘴前端是脱离的，即缝隙面积有收缩，流量系数 C_q（也就是出流系数 C_d）为0.61～0.62（图 6-25），与锐缘薄壁孔口相同，与上述的收缩系数公式

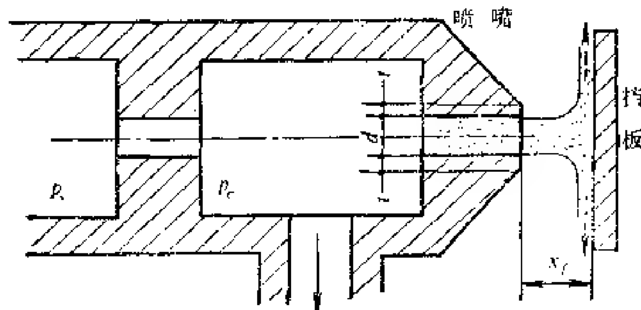


图6-24 喷嘴和挡板

也相当符合。但当 t/x_f 较大时，液流自喷嘴出流后，与喷嘴前端的环状壁面重新粘附，使流量系数 C_q 增大，而且随着 Re 数的增大而有所增加图 6-25，在这种情况下，流量就要受温度变化而不稳定。因此，喷嘴前端应尽可能做得尖锐些，即 t 尽可能接近于零，由图 6-26 可见，一般应使 $t/x_{f0}<2$，这里 x_{f0} 是零位时的缝隙宽度。图 6-26 也是 Lichtarowicz 及 Mark-

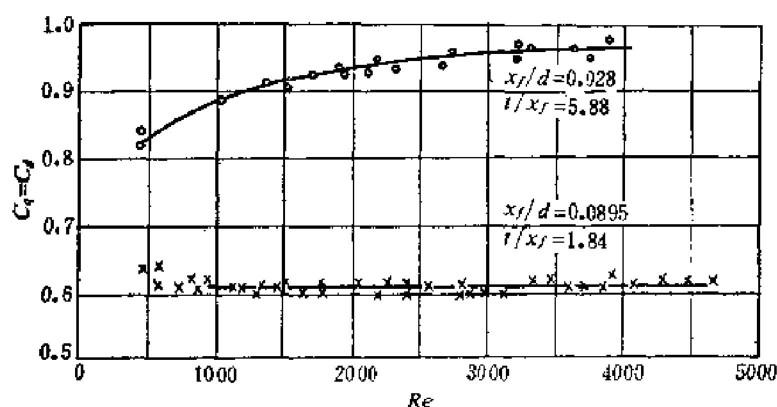


图6-25 喷嘴的 C_q-Re 曲线

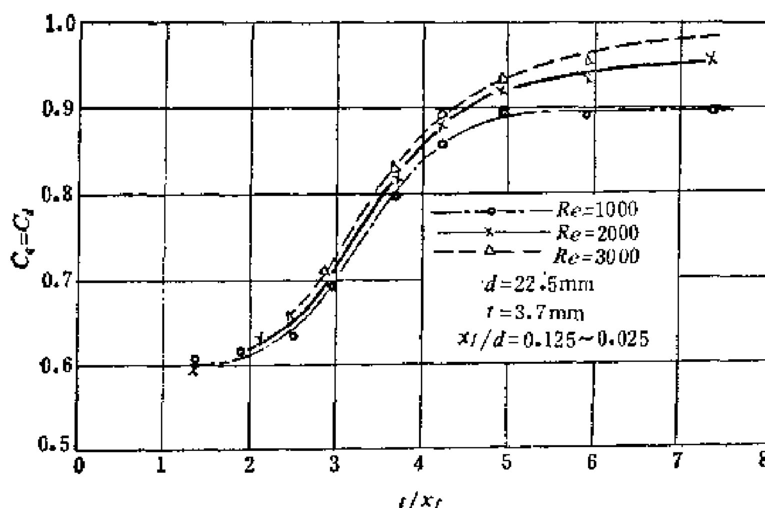


图6-26 喷嘴的 C_q-t/x_f 曲线

land 的实验曲线，作者认为喷嘴前端在 $l/x_{f0}<2$的情况下取$C_q=C_d=0.61\sim0.62$ 是合理的。

§6-9 变水头下的液体出流

打开油箱的放油孔，将油液放尽需要多少时间？这是一个实际问题，应该属于孔口出流范畴。必须指出，在这个问题中，由于容器（油箱）内的液面连续不断地变化，因而它是一个非恒定流问题，要用非恒定流柏努利方程来解，但由于实际上放油孔断面要比容器断面小得多，因此，容器内液面变化，也就是孔口的水头变化相当缓慢，非恒定流柏努利方程中的惯性项$\int_s \frac{\partial v}{\partial t}ds$可以略而不计，因而可以认为在微小时间段 dt 内出流的水头不变，把它作恒定流来处理，在每一dt 时间内的液体出流问题都可引用前面导出的流速和流量公式。

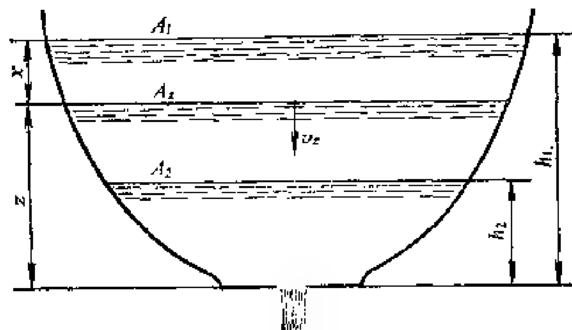


图6-27 孔口变水头出流

设容器断面积 $A(z)$是高度 z 的函数(图6-27)。在已知容器中断面积 $A(z)$ 函数是完全可以确定的。如果容器中起始液面高度 $z=h_1$，则液面下降到 $z=h_2$ 时所需时间 t 的计算如下：

设孔口断面积为 A_0，当液面下降到高度 z，在这瞬时的流量 Q 为

$$Q=C_qA_0\sqrt{2gz}$$

如果液面下降的速度为 v_z，则在该瞬时

$$v_zA(z)=Q=C_qA_0\sqrt{2gz}$$

因为液面下降的距离为 $x=h_1-z$，而液面下降速度 $v_z=\frac{dx}{dt}=-\frac{dz}{dt}$，由此得

$$-\frac{dz}{dt}A(z)=C_qA_0\sqrt{2gz}$$

或

$$dt=\frac{-A(z)dz}{C_qA_0\sqrt{2gz}}$$

积分之得

$$\int_0^t dt=\int_{h_1}^{h_2}\frac{-A(z)dz}{C_qA_0\sqrt{2gz}}$$

因此，出流时间为

$$t=\frac{1}{C_qA_0\sqrt{2g}}\int_{h_2}^{h_1}\frac{A(z)dz}{\sqrt{z}} \tag{6-15}$$

放空时 $h_2=0$，所以放空时间 t_0 为

$$t_0=\frac{1}{C_qA_0\sqrt{2g}}\int_0^{h_1}\frac{A(z)dz}{\sqrt{z}} \tag{6-15 a}$$

在液压技术中，油箱断面积是常数，即 $A(z)=A=$常数，因此出流时间 t 为

$$t=\frac{A}{C_qA_0\sqrt{2g}}\int_{h_2}^{h_1}\frac{dz}{\sqrt{z}}=\frac{2A}{C_qA_0\sqrt{2g}}z^{\frac{1}{2}}\Big|_{h_2}^{h_1}$$

$$=\frac{2A}{C_qA_0\sqrt{2g}}(\sqrt{h_1}-\sqrt{h_2}) \tag{6-16}$$

放空时间为

$$t_0=\frac{2A\sqrt{h_1}}{C_qA_0\sqrt{2g}}=\frac{2Ah_1}{\mu A_0\sqrt{2gh_1}} \tag{6-16a}$$

因为 Ah_1 为容器内油液的容积 V，所以

$$t_0=\frac{2V}{C_qA_0\sqrt{2gh_1}}$$

上述出流时间和放空时间只适用于孔口断面积与容器断面积之比很小的情况，这也是大都数容器的情况。必须指出，当孔口开在底部时，液面降低到接近孔口，液流会出现旋涡，液体不再充满孔口，上述公式不再适用，但就整个放空时间来说，这个现象的影响是小的。

§6-10 节 流 汽 穴

通过阀口、阻尼孔时，即使下游处压强较高，由于射流的收缩和重新附壁，在重新附壁前往往形成一个低压区，如果低压区产生真空，且真空度很高，使油液汽化，则就要产生汽穴现象。这种汽穴是通过节流口而形成的，称为节流汽穴。汽穴发生时伴随着噪声和振动，而且还可能蚀损元件的表面。现在我们以阻尼孔为例，对这个问题进行讨论。

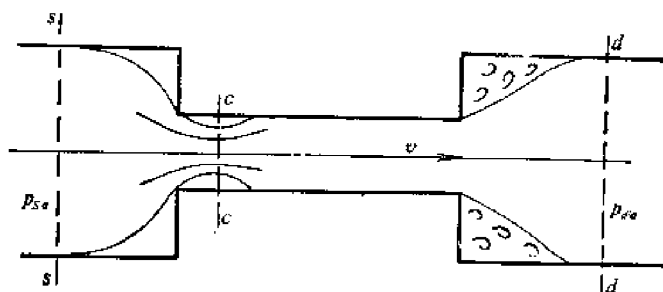


图6-28 节流汽穴

设阻尼孔进口容腔中的绝对压强为 p_{so}，下游容腔的绝对压强为 p_{do}，收缩断面的绝对压强为 p_c，列出 s–s 至 c–c 的柏努利方程

$$\frac{p_{so}}{\rho}+\frac{\alpha_s v_s^2}{2}=\frac{p_c}{\rho}+\frac{\alpha_c v_c^2}{2}+\zeta_c\frac{v_c^2}{2}$$

因为容腔面积比阻尼孔面积大得多，所以 $v_s \ll v_c$，可以将 $\frac{\alpha_s v_s^2}{2}$ 略去不计。由于 $\alpha_c=1$，而 $v=C_cv_c$，则

$$\frac{p_{so}}{\rho}=\frac{p_c}{\rho}+\left(\frac{1+\zeta_c}{C_c^2}\right)\frac{v^2}{2}$$

而
$$v=C_v\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}=C_v\sqrt{\frac{2(p_{so}-p_{do})}{\rho}}$$

因为阻尼孔中液流重新附壁，所以 $C_v=C_q$，则

$$\frac{v^2}{2}=C_q^2\frac{(p_{so}-p_{do})}{\rho}=C_q^2\frac{\Delta p}{\rho}$$

代入上式得

$$\frac{p_{sa}-p_c}{\rho}=\left(\frac{1+\zeta_c}{C_c^2}\right)C_q^2\frac{\Delta p}{\rho}$$

或

$$\left(\frac{1+\zeta_c}{C_c^2}\right)C_q^2=\frac{p_{sa}-p_c}{\Delta p} \tag{6-17 a}$$

上式等号两边各减去1则可得

$$\left(\frac{1+\zeta_c}{C_c^2}\right)C_q^2-1=\frac{p_{sa}-p_c}{\Delta p}-1=\frac{p_{da}-p_c}{\Delta p} \tag{6-17 b}$$

由（6-17 a）或（6-17 b）式可见，如果在一定的 p_{sa} 和 p_{da} 下，p_c 的降低将使 C_q 增大，如果 p_c 降至油液的汽化压强 p_v 时将产生汽穴现象，这时的流量系数达到临界状态，用符号 C_{qc} 表示，则

$$\left(\frac{1+\zeta_c}{C_c^2}\right)C_{qc}^2=\frac{p_{sa}-p_v}{\Delta p}$$

及

$$\left(\frac{1+\zeta_c}{C_c^2}\right)C_{qc}^2-1=\frac{p_{da}-p_v}{\Delta p}$$

设 $\zeta_c=0.042$，$C_c=0.61$ 则 $\left(\frac{1+\zeta_c}{C_c^2}\right)=2.75$，由于油液的汽化压强极低 $p_v\approx 0$，并将 $\frac{p_{da}}{\Delta p}\approx\frac{p_{da}-p_v}{\Delta p}=K$，则

$$C_{qc}=\left(\frac{K+1}{2.75}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{6-18 a}$$

式中 K 为表征汽穴发生倾向的系数，K 值越小越易发生汽穴。

必须指出，这里的所谓临界状态的流量系数 C_{qc} 并不是阻尼器的最大流量系数，而是阻尼器不发生汽穴的极限值，如果阻尼器的流量系数超过它，那末阻尼器就要发生汽穴，所以阻尼器不发生汽穴的条件是

$$C_q\leqslant\left(\frac{K+1}{2.75}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{6-18 b}$$

曾对几种不同尺寸的阻尼器进行了试验[1]，结果如图（6-29）所示，图中的实线表示公式（6-18 a），由图可见，发生汽穴的试验点均位于该实线的左上方，而且十分接近于实线。因此我们认为如果按图（6-13）或（6-15）的阻尼器流量系数 C_q 大于 C_{qc} 时，阻尼器将发生汽穴现象，这时的流量系数应近似地取为 C_{qc}。

我们也可以按（6-18 b）式，根据图（6-13）或（6-15）查得的 C_q 求得不发生汽穴的阻尼器临界汽穴准数 K_c 为

$$K_c=\left(\frac{p_{da}}{\Delta p}\right)_c=2.75C_q^2-1 \tag{6-19}$$

如果 $K<K_c$，则阻尼器将发生汽穴。

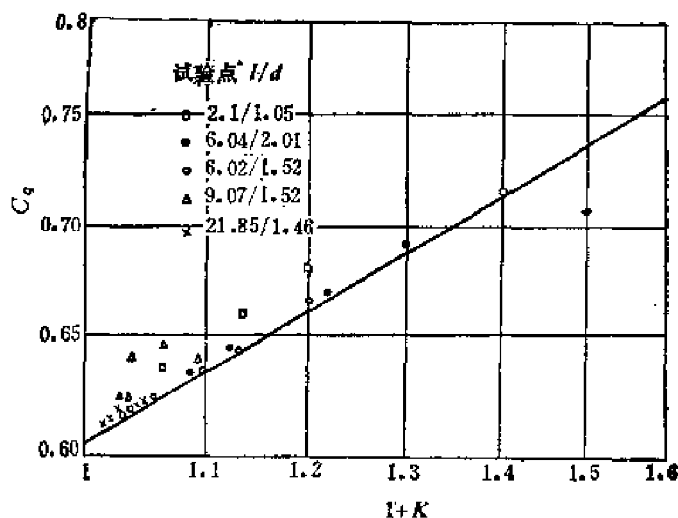


图6-29　汽穴时的流量系数

〔1〕盛敬超、刘其元、梁钧陶，长孔口的出流特性，浙江大学液压教研室，1979年5月。

例6-1 一限流量切断阀，当通过流量过大时就关闭阀口，该阀采用阻尼器造成压差的原理，如图 6-30 所示。如果 $D=18\text{mm}$，$D_1=38\text{mm}$ 阻尼孔直径 $d=2.5\text{mm}$，弹簧预紧力为 60 N，求阀口开始切断时的流量，油液粘度 $\nu=20$ c.St.密度 $\rho=0.87\times10^{-3}$ kg/cm³。

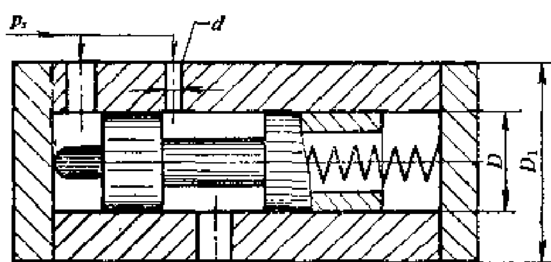


图6-30 例6-1

解 阻尼孔长 $l=\frac{D_1-D}{2}=\frac{38-18}{2}=10\text{ mm}$

所以

$$l/d=\frac{10}{2.5}=4$$

阀芯开始动作时阀芯上受力平衡为

$$p_s\frac{\pi}{4}D^2=(p_s-\Delta p)\frac{\pi}{4}D^2+60$$

这里 Δp 为阻尼孔上的压降，所以

$$\Delta p=\frac{4\times60}{\pi D^2}=\frac{4\times60}{3.14(1.8)^2}=23.6\text{ N/cm}^2=2.36\text{ bar}$$

流数 F 为

$$F=\frac{d\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}}{\nu}=\frac{0.25\sqrt{\frac{2\times1000\times2.36}{0.87\times10^{-3}}}}{0.2}=2.91\times10^3$$

则

$$F\frac{d}{l}=2.91\times10^3\times\frac{1}{4}=7.26\times10^2$$

查图 6-15 得 $C_q=0.74$，所以关闭流量 Q 为

$$Q=C_qA\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}=0.74\times\frac{\pi}{4}(0.25)^2\sqrt{\frac{2\times1000\times2.36}{0.87\times10^{-3}}}=84.6\text{ cm}^3/\text{s}$$

例6-2 油液经四边滑阀进入液压缸，活塞上负载 $F=73000\text{ N}$，液压缸直径 $D=150\text{mm}$，活塞杆直径 $d_1=63\text{ mm}$，滑阀阀芯直径 $d=10\text{ mm}$，油液密度 $\rho=0.87\times10^{-3}\text{kg/cm}^3$，如果油源压强 $p_s=70\text{ bar}$，求阀口开度 $x=0.5\text{ mm}$ 时阀芯上受到油液运动时的作用力(称为液动力)，设阀口流量系数 $C_q=0.65$。

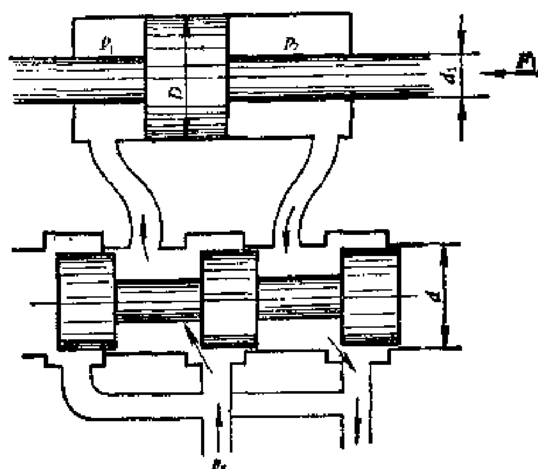


图6-31 例6-2

解

活塞面积 $A_D=\frac{\pi}{4}(15)^2=177\text{ cm}^2$

活塞杆面积 $A_{d1}=\frac{\pi}{4}(6.3)^2=31.1\text{ cm}^2$

$\Delta A=A_D-A_{d1}=177-31.1=145.9\text{ cm}^2$

液压缸内活塞二边的压差

$$\Delta p_{12}=p_1-p_2=\frac{F}{\Delta A}=\frac{73000}{145.9}=500\ \mathrm{N/cm^2}=50\ \mathrm{bar}$$

油液经过阀口是要发生压降的，如果滑阀是对称而匹配的，则进油阀口压降与回油阀口压降是相等的均为 Δp_l，则

$$p_2=\Delta p_l,\quad p_1=p_s-\Delta p_l=p_s-p_2$$
$$\Delta p_{12}=p_1-p_2=p_s-2p_2$$

由此得

$$p_2=\frac{p_s-\Delta p_{12}}{2}=\frac{70-50}{2}=10\ \mathrm{bar}$$

阀口流量

$$Q=C_qA\sqrt{\frac{2\Delta p_l}{\rho}}=0.65\pi(1)(0.05)\sqrt{\frac{2\times1000\times10}{0.87\times10^{-3}}}=490\ \mathrm{cm^3/s}$$

由动量定理

$$F_0=\rho Qv\cos\theta$$

阀口流速 $v=C_v\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}=0.98\sqrt{\frac{2\times1000\times10}{0.87\times10^{-3}}}=4.698\times10^3\mathrm{cm/s}$

因为 $\theta=69°,\ \cos\theta=0.36$

所以 $F_0=0.87\times10^{-3}\times490\times4.698\times10^3\times0.36=721\ \frac{\mathrm{kg\cdot cm}}{\mathrm{s^2}}=7.21\ \mathrm{N}$

有二个阀口（进油和回油）在工作，阀芯上受力为 $2F_0=14.42\,\mathrm{N}$，该力使阀芯趋于关闭。

例6-3 一水平圆筒容器，直径2.6m，长4 m，下面有一出流短管，直径 60 mm，长120 mm，空气可从容器顶部放气孔流入，当容器充满汽油和充油到3/4 高度时，求放空所需时间。

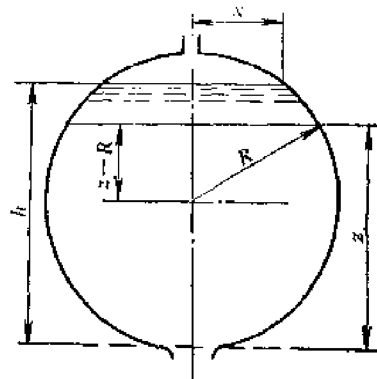


图6-32 例6-3

解 已知 $D=2.6\mathrm{m}$，$R=1.3\mathrm{m}$，$L=4\ \mathrm{m}$，$d_1=0.06\mathrm{m}$，$l_1=0.12\mathrm{m}$，$h_1=D=2.6\mathrm{m}$，$h_2=\frac{3}{4}D=1.95\mathrm{m}$

因为汽油的粘度很小，雷诺数 Re 较大，对于 $l/d=120/60=2$ 的出流短管流量系数 C_q可取为 0.82。

在 z 高度处的长方形断面积为

$$A(z)=2xL=2L\sqrt{R^2-(z-R)^2}$$
$$=2L\sqrt{2Rz-z^2}$$

根据（6-15a）式

$$t_0=\frac{1}{C_qA_0\sqrt{2g}}\int_0^h\frac{2L\sqrt{2Rz-z^2}}{\sqrt{z}}dz$$
$$=\frac{2L}{C_qA_0\sqrt{2g}}\int_0^h\sqrt{2R-z}\,dz=\frac{2L}{C_qA_0\sqrt{2g}}\left[\frac{2}{3}(2R-z)^{\frac{3}{2}}\right]_0^h$$
$$=\frac{4L}{3C_qA_0\sqrt{2g}}[(2R)^{3/2}-(2R-h)^{3/2}]$$

设 $h = h_1 = 2R$，则放空时间 t_{01} 为

$$t_{01} = \frac{4L}{3C_qA_0\sqrt{2g}}(2R)^{3/2} = \frac{8LR\sqrt{R}}{3C_qA_0\sqrt{g}} = \frac{8\times4\times1.3\sqrt{1.3}}{3\times0.82\times\frac{\pi}{4}(0.06)^2\sqrt{9.8}}$$

$$= 2178\ \mathrm{s} = 36.3\ \mathrm{min}$$

设 $h = h_2 = 1.5R$，则放空时间 t_{02} 为

$$t_{02} = \frac{4L}{3C_qA_0\sqrt{2g}}\{(2R)^{3/2} - (0.5R)^{3/2}\}$$

$$= \frac{4\times4}{3\times0.82\times\frac{\pi}{4}(0.06)^2\sqrt{19.6}}\{(2\times1.3)^{3/2} - (0.5\times1.3)^{3/2}\} = 1900\ \mathrm{s}$$

$$= 31.67\ min$$

例6-4 2.2 MN（2.2×10^6 N）压机系统如图 6-32 所示。液压缸直径为 320 mm，活塞杆直径为 200 mm，低压泵流量为 160 l/min，高压泵为 10 l/min，活塞和活动横梁质量为1500kg，活塞及活塞杆处摩擦力为 2000 N，要求快速下行（换向阀切换至 A 位）速度为 60 mm/s，试车时阻尼器直径为 9 mm，长 35 mm，测得下行速度为 50 mm/s，液压缸上腔压强为 3 bar，求阻尼器尺寸和高低溢流阀调定压强。设油液 $\nu = 20$ c·St，$\rho = 0.88\times10^{-3}$kg/cm³。

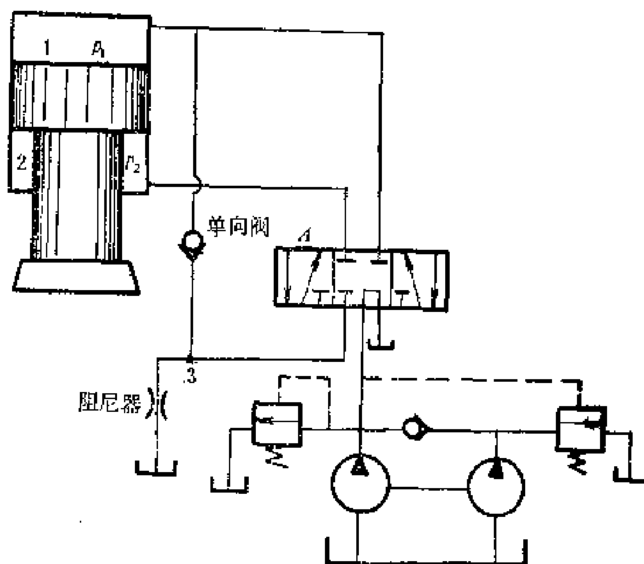


图6-23 例6-4

解 已知 $D_1 = 320$ mm，$d_1 = 200$ mm，$Q_1 = 160$ l/min，$Q_2 = 10$ l/min，试验时活塞下行速度 $v' = 5$ cm/s，试验时阻尼器 $d_0 = 0.9$ cm。

当换向阀切换至 A 位，在未接触工件时油缸上腔压强较低，高低压泵联合向上腔供油，液压缸下腔油液经换向阀后，由于阻尼器的关系，油液不能通畅地回入油箱，大部分油液只能经单向阀而回入液压缸上腔，成为差动回路，使活塞下行速度加快。由连续性方程

$$A_1v' = Q + A_2v' - q'$$

式中 A_1 为油缸上腔的断面积，A_2 为液压缸下腔的有效断面积，q' 为试验时阻尼器中的流量，Q 为油源供油量，则

$$A_1 = \frac{\pi}{4}D_1^2 = 0.785(32)^2 = 805\ \mathrm{cm}^2$$

$$A_2 = \frac{\pi}{4}(D_1^2 - d_1^2) = 0.785[(32)^2 - (20)^2] = 510\ \mathrm{cm}^2$$

$$Q = Q_1 + Q_2 = 160 + 10 = 170\ \mathrm{l/min}$$

由此得 $$q' = A_2v' + Q - A_1v' = 510\times5 + \frac{170\times1000}{60} - 805\times5 = 1355\ \mathrm{cm^3/s}$$

阻尼器中的流速 v 为

$$v=\frac{q'}{A_0}=\frac{1355}{0.785(0.9)^2}=\frac{1355}{0.636}=2130\ \mathrm{cm/s}$$

雷诺数 $Re=\frac{vd_0}{\nu}=\frac{2130\times0.9}{0.2}=9570$

因为$\frac{d_0}{l}\approx\frac{1}{4}$，所以 $Re\frac{d_0}{l}=9570\times\frac{1}{4}=2390$，查图（6-13）得 $C_q=0.78$，由此得临界系数K_c为

$$K_c=2.75C_q^2-1=2.75(0.78)^2-1=0.675$$

因为油缸上腔压强为 3 bar，而阻尼器进口处的压强 p_3 将大于 3 bar，我们进行试算，设 $p_3=4$ bar，则

$$K=\frac{p_{da}}{\Delta p}=\frac{1}{5-1}=\frac{1}{4}=0.25<K_c$$

阻尼器在汽蚀情况下工作，流量系数应取为 $C_q\approx C_{qc}$，即

$$C_q\approx C_{qc}=\left(\frac{1+K}{2.75}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1.25}{2.75}\right)^{\frac{1}{2}}=(0.454)^{\frac{1}{2}}=0.673$$

因为 $q'=C_qA_0\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}=C_qA_0\sqrt{\frac{2p_3}{\rho}}$，则

$$p_3=\frac{q'^2\rho}{2C_q^2A_0^2}=\frac{(1355)^2\times0.88\times10^{-3}}{2(0.673)^2(0.636)^2\times10^3}=4.37\ \mathrm{bar}$$

计算所得 p_3 大于假设的 p_3，所以再设 $p_3=4.4$ bar 则$K=\frac{1}{4.4}=0.227$，所以

$$C_q=\left(\frac{1+K}{2.75}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1.227}{2.75}\right)^{\frac{1}{2}}=(0.446)^{\frac{1}{2}}=0.668$$

$$p_3=\frac{q'^2\rho}{2C_q^2A_0^2}=\frac{(1355)^2\times0.88\times10^{-3}}{2(0.668)^2(0.636)^2\times10^3}=4.44\ \mathrm{bar}$$

由于系统中管路较短，流道中以局部阻力为主，所以压降 Δp 与流量平方成正比，即

$$\Delta p_{31}=p_3-p_1=K_1(A_2v'-q')^2$$

所以

$$K_1=\frac{p_3-p_1}{(A_2v'-q')^2}=\frac{4.44-3}{(510\times5-1355)^2}=\frac{1.44}{(1.195\times10^3)^2}=10^{-6}\frac{\mathrm{bars}^2}{\mathrm{cm}^6}$$

活塞上力的平衡为

$$p_1A_1+G=p_2A_2+2000$$

$$3\times10\times805+1500\times9.8=510\times10\ p_2+2000$$

$$p_2=\frac{30\times805+1500\times9.8-2000}{510\times10}=7.22\ \mathrm{bar}$$

液压缸下腔至阻尼器前的压降 Δp_{23}

$$\Delta p_{23}=p_2-p_3=K_2(A_2v')^2$$

$$K_2=\frac{p_2-p_3}{(A_2v')^2}=\frac{7.22-4.44}{(510\times5)^2}=4.27\times10^{-7}\frac{\mathrm{bars}^2}{\mathrm{cm}^6}$$

求得的 K_1 及 K_2 是特定管路的系数，管路尺寸不变，它们的值也不变。

当要求下行速度为 $v = 6\ \mathrm{cm/s}$ 时，由连续性方程：

$$A_1 v = Q + A_2 v - q$$

阻尼器流量 q 为

$$q = Q + A_2 v - A_1 v = \frac{170 \times 1000}{60} + 510 \times 6 - 805 \times 6 = 1060\ \mathrm{cm^3/s}$$

压降 Δp_{31} 为

$$\Delta p_{31} = p_3 - p_1 = K_1 (A_2 v - q)^2 = 10^{-6}(510 \times 6 - 1060)^2$$

即

$$p_3 - p_1 = 4 \tag{1}$$

压降 Δp_{23} 为

$$\Delta p_{23} = p_2 - p_3 = K_2 (A_2 v)^2 = 4.27 \times 10^{-7}(510 \times 6)^2$$

或

$$p_2 - p_3 = 4.01 \tag{2}$$

活塞上力的平衡

$$p_1 A_1 + G = p_2 A_2 + 2000$$

由此得

$$p_1 = \frac{p_2 A_2 - G + 2000}{A_1} = \frac{510 \times 10 p_2 - 1500 \times 9.8 - 2000}{10 \times 805}$$

即

$$p_1 = 0.633\, p_2 - 2.07 \tag{3}$$

解（1）（2）及（3）式得

$$p_1 = 8.17\ \mathrm{bar}$$
$$p_2 = 16.18\ \mathrm{bar}$$
$$p_3 = 12.17\ \mathrm{bar}$$

设阻尼器在汽穴情况下工作 $K = \frac{p_{d3}}{\Delta p} = \frac{1}{12.17} = 0.082$，流量系数 C_q 为

$$C_q = C_{qc} = \left(\frac{1 + K}{2.75}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1.082}{2.75}\right)^{\frac{1}{2}} = (0.394)^{\frac{1}{2}} = 0.626$$

由此得阻尼孔断面积 A_0 为

$$A_0 = \frac{q}{C_q \sqrt{\frac{2 p_3}{\rho}}} = \frac{1060}{0.626\sqrt{\frac{2 \times 1000 \times 12.17}{0.88 \times 10^{-3}}}} = 0.323\ \mathrm{cm^2}$$

所以

$$d_0 = \sqrt{\frac{4 A_0}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \times 0.323}{\pi}} = 0.634\ \mathrm{cm}$$

取阻尼器直径 $d_0 = 6.4\ \mathrm{mm}$

$$l \approx 4 d_0 = 25.6\ \mathrm{mm}$$

低压溢流阀要保证快速下行和快速上行时的压强，快速下行时压强为 8.17 bar，快速上行时压强为 $\frac{G + 2000}{A_2} = \frac{1500 \times 9.8 + 2000}{510} = 32.8\ \mathrm{N/cm^2} = 3.28\ \mathrm{bar}$，所以溢流阀调定压强应稍大于 8.17 bar，可调整为 8.5 bar。

高压溢流阀按压制能力 2.2 MN 调压，则

$$p = \frac{2.2 \times 10^6}{805} = 2733\ \mathrm{N/cm^2} = 273.3\ \mathrm{bar}$$

可调定为 275 bar。

第七章　缝隙流动

在液压技术中，有很多场合零件之间具有一定的缝隙，缝隙的大小不仅要影响泄漏量，而且也影响其他性能，因此探讨缝隙中油液运动的规律，对液压元件的设计和分析有一定的帮助，由于缝隙的水力直径较小，而液压用油都有一定的粘度，因此液压技术中的缝隙流动的雷诺数 Re 一般都较小，往往属于层流范畴。缝隙中油液产生运动的原因有二：一个是由于存在压差而产生流动，这种流动称为压差流或 Poiseuille 流，另一种是由于组成缝隙的壁面具有相对运动而使缝隙中油液流动，称为剪切流或 Couette 流，两者的叠加则称为 Couette-Poiseuille 流[1][2]。

§7-1　缝隙中的流速分布

相对速度为 U 的两个壁面形成间距为 h 的缝隙，缝隙中充满油液。如果该两壁面互相平行，则 h 为常数，如果两壁面不平行，则 h 为变量，不管该两壁面是否平行，只要 h 是小量，则它的不平行度也是十分微小的，缝隙中油液基本上呈平行层流运动，液流受到粘性力的控制，流动比较安定。我们在缝隙的油液内放置直角座标（图7-1），在 z 轴垂直于某一壁面，x 轴与流向一致，则 $u_y=0$，$u_z\approx0$，$u_x=u$。在重力场的情况下：质量力 $X=Y=0$，$Z=-g$。在上述的特定条件下，粘性流体的运动方程为

$$\left.\begin{aligned}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)&=u\frac{\partial u}{\partial x}\\ -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}&=0\\ -g-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}&=0\end{aligned}\right\}\quad(7\text{-}1)$$

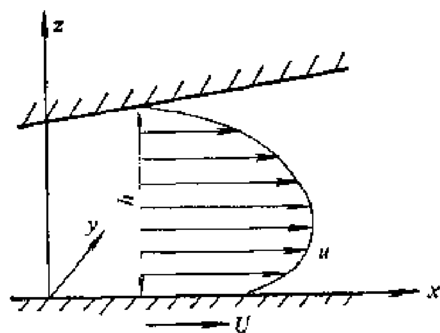


图7-1　缝隙流动

由(7-1)式中的第二式得压强 p 与 y 无关，由第三式积分得压强 p 为

$$p=-\rho gz+f(x)$$

由此可得 $\frac{\partial p}{\partial x}=f'(x)$，即 $\frac{\partial p}{\partial x}$ 与 z 无关。

在缝隙内的油液以速度 u 运动，而流体又粘在壁面上且缝隙的 z 轴向尺度 h 又很小，所以缝隙流动必然存在着很大的速度梯度 $\frac{\partial u}{\partial z}$。由连续性方程又可得 $\frac{\partial u}{\partial x}\approx0$，如果组成缝隙的壁面 y 轴向的尺寸较大，则 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 是很小的，也可忽略不计，则第一式可简化为

$$\frac{dp}{dx}=\mu\frac{d^2u}{dz^2}$$

---

〔1〕 Schlichting H., Boundary-Layer Theory, McGraw-Hill, 1968 p. 77.

〔2〕 Yih C. S.（易家训）, Fluid Mechanics, McGraw-Hill, 1969, pp. 303～306.

上式关于 z 的二次积分得

$$u=\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}\frac{z^2}{2}+C_1z+C_2$$

式中的积分常数 C_1 及 C_2 可用边界条件：当 $z=0$ 时 $u=U$ 及 $z=h$ 时 $u=0$ 来求得。以 $z=0, u=U$ 代入上式得：$C_2=U$。以 $z=h, u=0$ 及 $C_2=U$ 代入得 $C_1=-\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}h-\frac{U}{h}$，以 C_1 及 C_2 代入之即得缝隙中流速 u 的普遍公式为

$$u=-\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}(h-z)z+U\left(1-\frac{z}{h}\right) \tag{7-2}$$

当 $U=0$ 时，即固定壁面所形成的缝隙中的流速

$$u=-\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}(h-z)z \tag{7-2 a}$$

§7-2　固定壁面所形成缝隙的泄漏量

在上节中我们求得了固定壁面所组成的流速规律，我们就可用 $q=\int_A udA$ 的关系式来求出缝隙泄漏量 q，式中 dA 为微小过流断面。现在分下列几种情况加以说明。

1．平行平面间的泄漏量

两平行壁面所组成的缝隙 h 为一常数，设此间隙为 δ，则 $h=\delta$，由(7-2 a)式可得流速 u 为

$$u=-\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}(\delta-z)z$$

如果缝隙宽度为 b，则微小过流断面 $dA=bdz$，由此流量 q 为

$$q=\int_A udA=\int_0^\delta ubdz=-b\int_0^\delta\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}(\delta-z)zdz$$

因为 δ 很小，液流没有 z 方向的运动，因此 $\frac{dp}{dx}$ 与 z 无关，所以

$$q=-\frac{b}{2\mu}\frac{dp}{dx}\int_0^\delta(\delta-z)\,zdz=-\frac{b}{12\mu}\frac{dp}{dx}\delta^3$$

由此可得 $\frac{dp}{dx}=-\frac{12\mu q}{b\delta^3}=$ 常数，即在两平行壁面所形成的缝隙中，沿 x 方向的压强改变率是不变的。如果沿 l 长度内压强由 p_1 降至 p_2(图7-2)，即压降为 $\Delta p=p_1-p_2$，则压强变化率为 $\frac{p_2-p_1}{l}=-\frac{\Delta p}{l}$，这个变化率也就等于 $\frac{dp}{dx}$，即 $\frac{dp}{dx}=-\frac{\Delta p}{l}$，代入流速及流量公式得

$$u=\frac{\Delta p}{2\mu l}(\delta-z)z \tag{7-3}$$

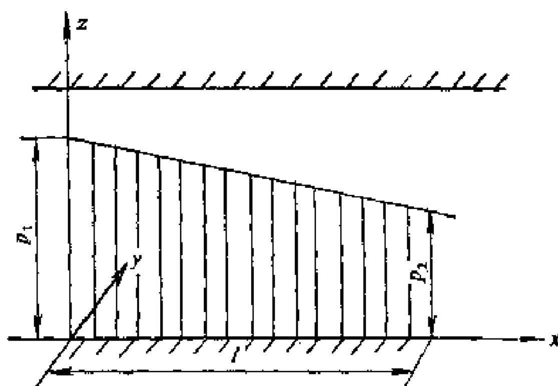


图7-2　平行平面缝隙中压强分布

$$q = \frac{b\delta^3 \Delta p}{12\mu l} \tag{7-4}$$

考虑到层流起始段的影响，流量公式应以系数 c 加以修正，即

$$q = \frac{b\delta^3 \Delta p}{12\mu l c} \tag{7-5}$$

式中系数 $c = 1 + \xi \frac{Re}{48} \frac{\delta}{l}$，图 7-3 示出了 ξ 及 c 和 $l/Re\delta$ 的关系。

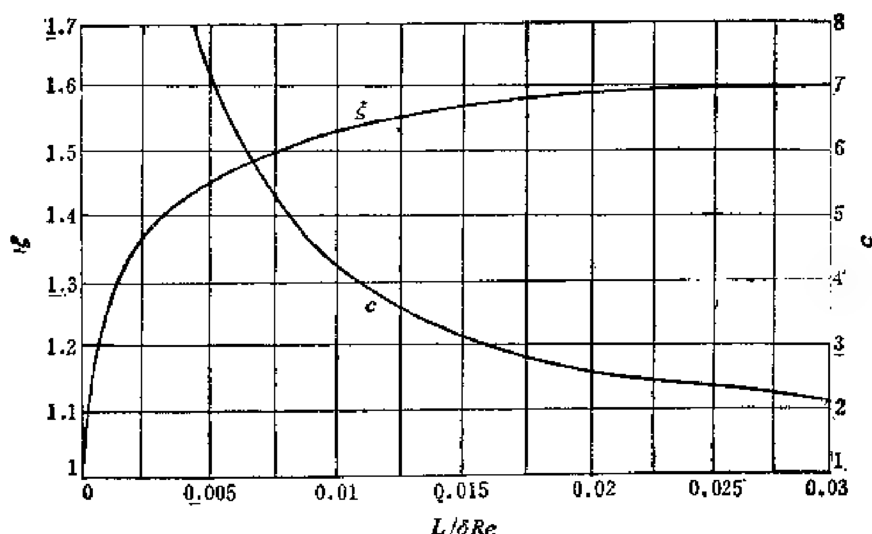


图7-3　矩形缝隙层流起始段修正系数

由此可见两平行壁面间的泄漏量 q 与间隙 δ 的三次方成正比，因此 δ 稍有增大将引起泄漏量 q 的显著增加。

上述结论也可近似地适用于两平行圆柱面所形成的同心圆环缝隙(图7-4)，只要把(7-4)式中的宽度 b 用环缝周长 πd 代替即可：

$$u = \frac{\Delta p}{2\mu l}(\delta - z)z$$

$$q = \frac{\pi d \Delta p \delta^3}{12\mu l c} \tag{7-6}$$

必须指出，公式(7-6) 中的考虑层流起始段影响的系数 c 与(7-5)式中的系数 c 是有所差异的，(7-6)式中的 c 值如图 7-5 所示。

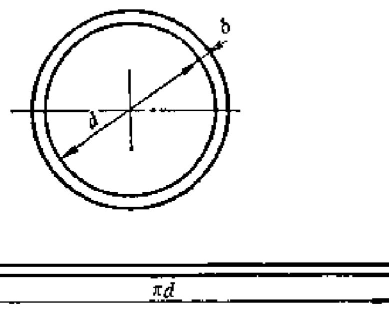


图7-4　同心环缝

2. 偏心圆环缝隙中的泄漏量近似计算

实际上在工程问题中同心环缝的情况是较少的。在液压技术领域内，例如液压缸与柱塞间所形成的环隙，由于柱塞受力不均匀，往往都是偏心的，因为液压缸内径 $2r_0$ 与柱塞外径 $2r_i$ 相差很小，两者如不同心则偏心 e 必为一小量，缸与柱塞所形成的平均半径间隙 $\delta = r_0 - r_i$ 也是一个小量，当然缸与柱塞所形成的实际间隙 h 也是一个小量，并且 h 又是个变量，它是随 θ 角而变的，由图 7-6 可知

$$h = AB = OB - OA = r_0 - (r_i + e\cos\theta) = \delta - e\cos\theta$$

我们在任意角 θ 处取一微小圆周长 CB，它的夹角为 $d\theta$，则 $CB = r_0 d\theta$。由于 CB 是一个

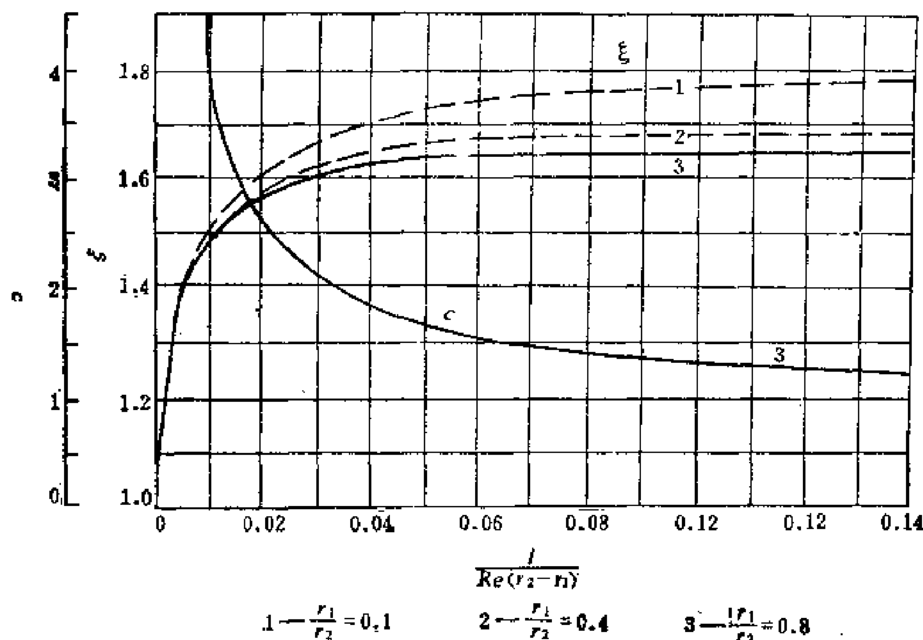


图7-5 同心环形流道的层流起始段修正系数

微小长度，因此可以认为 CB 与 AD 所形成的缝隙，类似于两平行平面所形成的缝隙，该缝隙中的微小泄漏量 dq 为

$$dq=\frac{\Delta p}{12\mu l}h^3 r_1 d\theta$$

以 $h=\delta-e\cos\theta$ 代入，积分之得偏心环缝的总泄漏量 q 为

$$q=\int dq=\frac{r_0\Delta p}{12\mu l}\int_0^{2\pi}(\delta-e\cos\theta)^3 d\theta$$

$$=\frac{\pi d}{12\mu l}\Delta p\delta^3(1+1.5\varepsilon^2) \qquad (7\text{-}7)$$

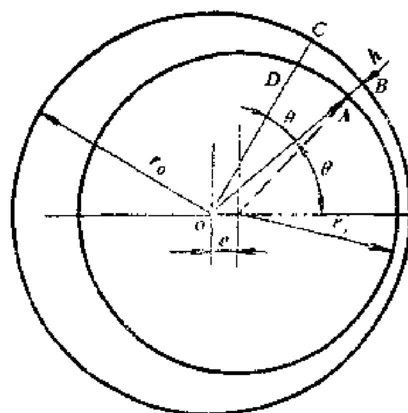


图7-6 偏心环缝

式中 $d=2r_0$ 为液压缸直径，$\varepsilon=\frac{e}{\delta}$ 为偏心比。

当完全偏心时 $e=\delta$，即 $\varepsilon=1$ 则泄漏量 q 为

$$q=2.5\frac{\pi d}{12\mu lc}\Delta p\delta^3 \qquad (7\text{-}8)$$

式中 c 为考虑层流起始段影响的修正系数。

必须指出，当 δ 很小时，例如2～5μ以下，实际的泄漏量 q 往往大大地小于（7-7）式所给出的值，原因尚不太清楚，可能是由于粘附于壁面的油液分子极化而产生堵塞现象。

§7-3 具有相对运动的平行面缝隙中的流动

在工程实际问题中，缝隙往往是具有相对运动的壁面所组成的，例如：齿轮泵及齿轮马达壳体内腔与齿顶的缝隙，齿轮端面与轴套之间的缝隙，齿轮是转动的，壳体及轴套则不转动，它们之间有相对运动。又如叶片泵及叶片马达转子端面的缝隙，柱塞泵及柱塞式马达的

柱塞与缸之间的缝隙等都是由具有相对运动的壁面所组成。由于两壁面有相对运动，又由于液体的粘性作用，运动壁面对缝隙中的油液引起了纯 Couette 流，将产生一附加的诱导速度 u''，因此缝隙内液体的流速 u 将为由压差 Δp 引起的主流速度 u' 和诱导速度 u'' 的迭加，即 $u = u' + u''$。

附加的诱导速度 u'' 是由于壁面相对运动而产生的，它在缝隙内是直线分布的，在相对静止面上为零，在相对运动面上为 U，而且在液压泵中运动面的运动方向与泄漏方向相反，所以附加诱导速度与泄漏方向也是相反的，而液压马达的附加诱导速度则与泄漏方向相同。因此，如果压差引起的主流速度 u' 为正，则附加诱导速度 u'' 就可能为正(例如液压马达)，也可能为负(例如泵)。所以

$$u'' = \pm U(z/\delta)$$

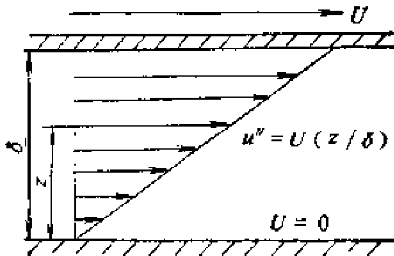


图 7-7

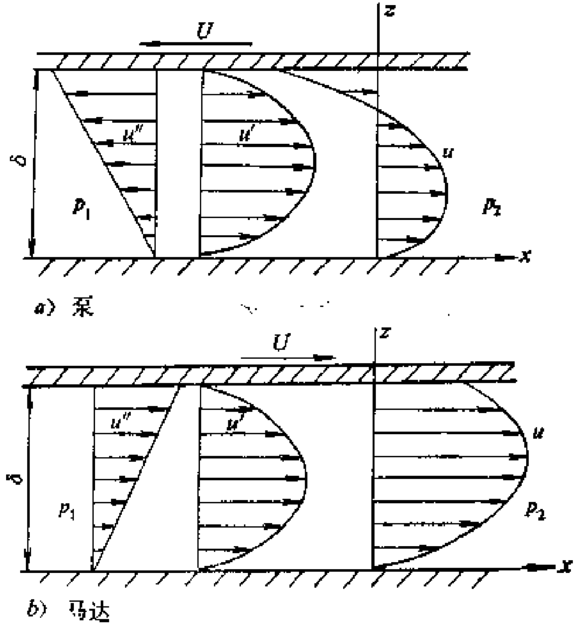


图7-8 具有相对运动平行面缝隙中的流动

缝隙内的流速将为主流速度 $u' = \frac{\Delta p}{2\mu l}(\delta - z)z$ 与附加速度 $u'' = \pm U(z/\delta)$ 的迭加，即

$$u = u' + u'' = \frac{\Delta p}{2\mu l}(\delta - z)z \pm \frac{Uz}{\delta} \tag{7-9}$$

泄漏量为 $q = \int_A u dA$，对于矩形的缝隙，微小面积 $dA = bdz$，所以泄漏量为

$$q = \int_A u dA = \frac{b\Delta p}{2\mu l}\int_0^{\delta}(\delta - z)zdz \pm \frac{bU}{\delta}\int_0^{\delta} zdz$$

$$= b\left(\frac{\Delta p}{12\mu l}\delta^3 \pm \frac{U\delta}{2}\right) \tag{7-10}$$

如果是同心环缝，则可将 πd 代替宽度 b，则泄漏量为

$$q = \pi d\left(\frac{\Delta p}{12\mu l}\delta^3 \pm U\frac{\delta}{2}\right) \tag{7-11}$$

如果是偏心环缝，则在环缝上取微小段 $ABCD$，如图 7-6 所示，它的间隙为 h，宽为 $r_0 d\theta$，由于宽度 $r_0 d\theta$ 极小，可以认为缝隙类似于平行平面的缝隙，根据(7-10)式，该微小段的泄漏量为 $dq = \left(\frac{\Delta p}{12\mu l}h^3 \pm \frac{Uh}{2}\right)r_0 d\theta$，因此总的泄漏量 q 为

$$q = \int dq = \int_0^{2\pi}\left(\frac{\Delta p}{12\mu l}h^3 \pm \frac{Uh}{2}\right)r_0 d\theta = \pi d\left[\frac{\Delta p\delta^3}{12\mu l}(1 + 1.5\varepsilon^2) \pm \frac{\delta U}{2}\right] \tag{7-12}$$

比较一下(7-10)，(7-11)及(7-12)式，我们可以发现它们的类型完全相同，并且可以用一普遍形式表示

$$q=K_1\left(\frac{K_2\Delta p\delta^3}{12\mu l}\pm\frac{\delta U}{2}\right)\tag{7-13}$$

式中 K_1 为宽度尺寸，矩形缝隙 $K_1=b$，环形缝隙$K_1=\pi d$；K_2 为偏心系数，$K_2=(1+1.5\varepsilon^2)$，没有偏心时 $\varepsilon=0$，则$K_2=1$。

由此可见：

（1）液压泵的缝隙泄漏量为

$$q=K_1\left(\frac{K_2\Delta p\delta^3}{12\mu l}-\frac{U\delta}{2}\right)$$

（2）液压马达的缝隙泄漏量为

$$q=K_1\left(\frac{K_2\Delta p\delta^3}{12\mu l}+\frac{U\delta}{2}\right)$$

即由于液压马达的泄漏流向与壁面运动同向，它的泄漏量 q 将随着 δ 的增大而显著增加，而液压泵的泄漏流向与壁面运动相反，互相有抵偿作用，所以当 $\delta=0$，$q=0$；$\delta=\delta_c=\left(\frac{6\mu lU}{K_2\Delta p}\right)^{\frac{1}{2}}$ 时 $q=0$，即两者相互抵消；$\delta<\delta_c$ 时 q 为负值，即压差 Δp 引起的泄漏小于壁面运动引起的反向泄漏；$\delta>\delta_c$ 时，q 为正值，即压差泄漏大于反向泄漏。q 与 δ 的关系如图 7-9 所示。

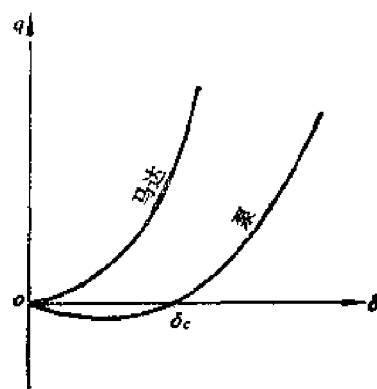


图7-9 泵和马达的泄漏量

现在让我们来计算动面处液体内的剪切应力 τ_0。因为动面的位置在 $z=\delta$ 处，所以动面处油液内的剪应力 $\tau_0=\mu\left.\frac{du}{dz}\right|_{z=\delta}$，以(7-9)式对 z 取导数后代入得：

$$\tau_0=\mu\left.\frac{du}{dz}\right|_{z=\delta}=\mu\frac{\Delta p}{2\mu l}(\delta-2z)\pm\mu\left.\frac{U}{\delta}\right|_{z=\delta}$$

$$=-\frac{\Delta p\delta}{2l}\pm\frac{\mu U}{\delta}\tag{7-14}$$

上式中等号后第一项的负号表示壁面处（$z=\delta$）由压差 Δp 引起的液体内剪应力总是与流向相反，第二项前的正号为马达，负号为泵，由此，动面上的摩擦力$F_f=\int\tau_0 dA$。

对于宽度为 b，长度为 l 的平行平面

$$F_f=bl\tau_0=bl\left(-\frac{\Delta p\delta}{2l}\pm\frac{\mu U}{\delta}\right)$$

$$=-bl\left(\frac{\Delta p\delta}{2l}\mp\frac{\mu U}{\delta}\right)$$

对于长为 l，直径为 d 的同心环缝

$$F_f = -\pi l d\left(\frac{\Delta p\delta}{2l} \mp \frac{\mu U}{\delta}\right)$$

对于长为 l，直径为 $d=2r_0$ 的偏心环缝，环缝间隙为 h，则

$$F_f = \int \tau_0 dA = \int_0^{2\pi} \tau_0 l r_0 d\theta = l r_0 \int_0^{2\pi}\left(-\frac{\Delta p\, h}{2l} \pm \frac{\mu U}{h}\right)d\theta$$

$$= -\pi l d\left(\frac{\Delta p\delta}{2l} \mp \mu\frac{U}{\delta}\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)$$

式中偏心比 $\varepsilon = \frac{e}{\delta}$。

比较上列三种情况的摩擦阻力 F_f，可以写出下列普遍式为

$$F_f = -K_1 l\left(\frac{\Delta p\delta}{2l} \mp K_3\frac{\mu U}{\delta}\right) \tag{7-15}$$

式中系数 K_1如前述，系数$K_3 = \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$，当无偏心时 $\varepsilon=0$，$K_3=1$。

由摩擦阻力 F_f 所引起的功率损失 $N_f = \pm UF_f$，这里正号为马达，负号适用于泵，所以

$$N_f = \mp K_1 l U\left(\frac{\Delta p\delta}{2l} \mp K_3\frac{\mu U}{\delta}\right)$$

$$= K_1 U\left(\frac{K_3\mu U l}{\delta} \mp \frac{\Delta p\delta}{2}\right) \tag{7-16}$$

式中负号为马达，正号为泵。由此可见，泵的摩擦功率损失 N_f 大于马达，而且有最小值。马达的 N_f则随着缝隙 δ 的增大而减小，如图 7-10 所示。

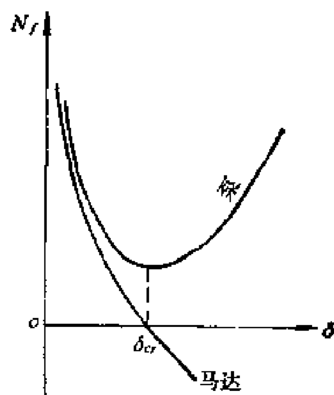


图7-10 泵和马达的摩擦功率损失

对于马达来讲，当$\frac{K_3\mu l U}{\delta} - \frac{\Delta p\delta}{2} = 0$ 时N_f就将等于零，即 $N_f=0$ 时

$$\delta = \delta_{cr} = \left(\frac{2K_3\mu l U}{\Delta p}\right)^{\frac{1}{2}}$$

对于泵则当 δ 从接近于零处逐渐增大时，摩擦阻力所引起的功率损失也逐渐下降，至一定值后它又将随着 δ 的增大而增大，损失最小的 δ 值为

$$\frac{dN_f}{d\delta} = K_1 U\left(-\frac{K_3\mu l U}{\delta^2} + \frac{\Delta p}{2}\right) = 0$$

即
$$\delta = \delta_{cr} = \left(\frac{2K_3\mu l U}{\Delta p}\right)^{\frac{1}{2}}$$

这个 δ 值与马达在 $N_f=0$ 时的 δ 相同，均为

$$\delta_{cr} = \left(\frac{2K_3\mu l U}{\Delta p}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{7-17}$$

缝隙中泄漏所造成的功率损失为 $q\Delta p$，因此，具有相对运动壁面所组成的缝隙中，由摩擦和泄漏所引起的总的功率损失为 $E_f = q\Delta p + N_f$，以(7-13)及(7-16)式代入则

$$E_f = K_1\left[\frac{K_2(\Delta p)^2\delta^3}{12\mu l} \pm \frac{U\Delta p\delta}{2}\right] + K_1\left(\frac{K_3\mu l U^2}{\delta} \mp \frac{U\Delta p\delta}{2}\right)$$

$$= \frac{K_1K_2(\Delta p)^2\delta^3}{12\mu l} + \frac{K_1K_3\mu l U^2}{\delta} \tag{7-18}$$

由(7-18)式可见，液压泵与液压马达的缝隙中功率总损失是相同的。如果应用的油液已选定，则粘度 μ 就确定了，总功率损失 E_f 就随 δ 而变，且 E_f 有最小值，即 δ 较小时由于摩擦功率损失增大，总功率损失较大，如果 δ 过大则泄漏所引起的功率损失大增，结果也增大了总功率损失，最小的总功率损失在 $\frac{dE_f}{ds}=0$ 时，即

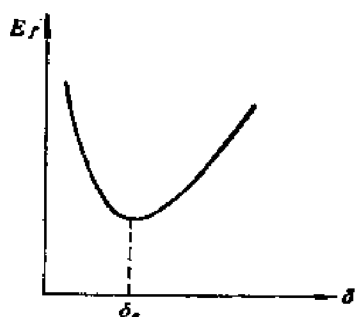


图7-11　缝隙中的总功率损失

$$\frac{dE_f}{d\delta}=\frac{3K_1K_2(\Delta p)^2\delta^2}{12\mu l}-\frac{K_1K_3\mu lU^2}{\delta^2}=0$$

由此得

$$\delta=\left(\frac{2\mu lU}{\Delta p}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{K_3}{K_4}\right)^{\frac{1}{4}}=\delta_0 \tag{7-19}$$

§7-4　缸与柱塞滑动副的能量损失分析

上节中讨论了滑动副中泄漏和摩擦损失是不可避免的，并且两者相互制约，因此存在着功率损失最小的最佳方案。现在我们针对柱塞式液机(液压泵、液压马达)的缸与柱塞副进行讨论(图7-12)。

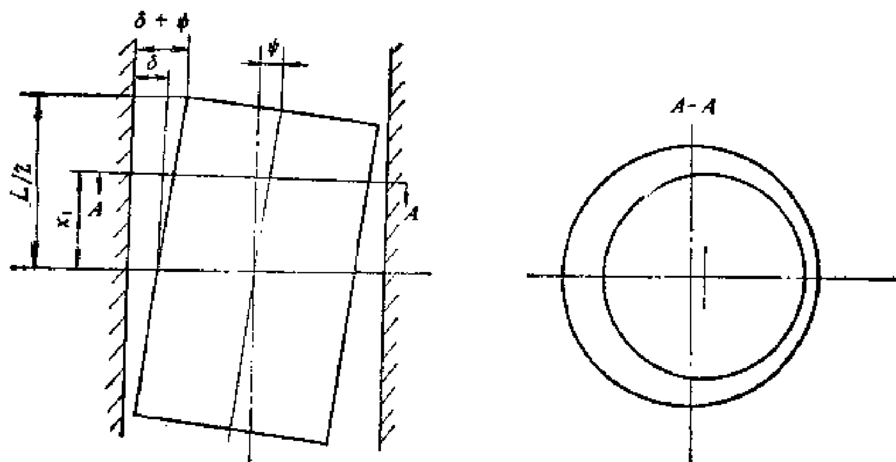


图7-12　油缸柱塞滑动副

如果液压缸内压强为 p_s，柱塞在液压缸内是平行无偏斜，即 $\psi=0$，则通过半径间隙 δ 的泄漏量为

$$q=\frac{\pi d\delta^3}{12\mu L}p_s$$

由于液压缸内压强是按照排油压强和吸油压强交变的，如图 7-13 所示。如果吸油压强为大气压，则液机的时间平均压强为 $\frac{1}{2}p_s$。因此，单位时间内由于泄漏而损失的能量也就是泄漏功率损失为

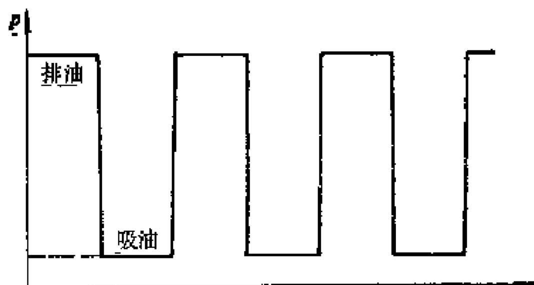


图7-13　液压缸内压强交变

$$\frac{1}{2}p_sq=\frac{\pi d}{24\mu L}p_s^2\delta^3$$

柱塞运动时剪切油液的应力为 $\tau=\mu\frac{du}{dy}=\mu\frac{U}{\delta}$。如果柱塞长为 L，则摩擦力 $F_f=\tau A=\pi\mu\frac{U}{\delta}Ld$。设柱塞分布圆半径为 R（图7-14），则当斜盘倾角为 θ 时柱塞位移 x 为

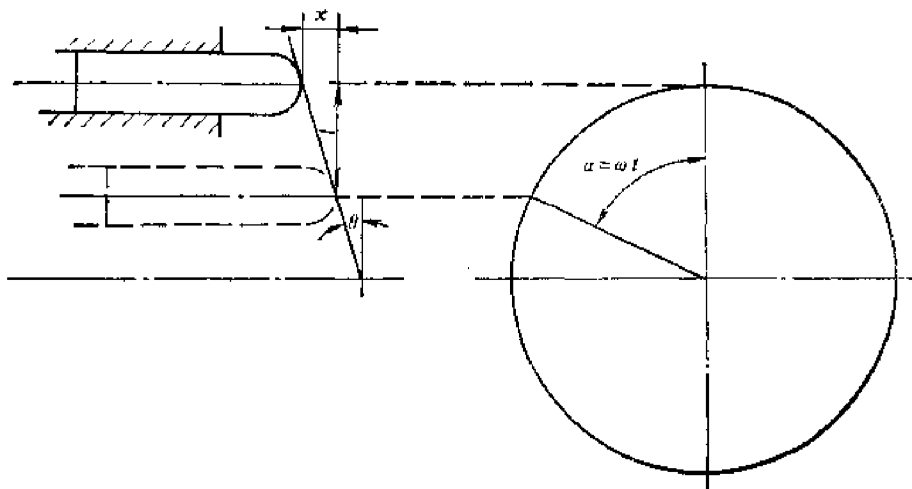


图7-14　柱塞运动位置

$$x=l\text{tg}\,\theta=R(1-\cos\omega t)\text{tg}\,\theta$$

由此可得柱塞运动速度 U 为

$$U=\frac{dx}{dt}=R\omega\text{tg}\,\theta\sin\omega t$$

因此，单位时间内由摩擦而损失的能量，也就是摩擦损失功率为 F_fU，如果液机的每分转速为 n 则 $F_fU=\frac{R^2\omega^2\pi\mu}{\delta}Ld\text{tg}^2\theta\sin^2\omega t=\left(\frac{2\pi n}{60}\right)^2\frac{\pi R\mu Ld}{\delta}\text{tg}^2\theta\sin^2\omega t$，由于 $\sin\omega t$ 是随时间而变的，我们求出它的时间平均值

$$\sin^2\omega t=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\omega t\,d\omega t=\frac{1}{2}$$

因此，摩擦功率损失为

$$N_f=F_fU=\frac{n^2\pi^3\mu LR^2\text{tg}^2\theta}{1800\,\delta}d$$

由此，总的功率损失 E_L 为

$$E_L=\frac{p_sq}{2}+F_fU=\frac{\pi d}{24\mu L}p_s^2\delta^3+\frac{\pi^3n^2\mu LR^2\text{tg}^2\theta}{1800\,\delta}d$$

液机的一个缸的理论功率为缸单位时间内排量与压强的乘积，因为柱塞行程为 $2R\text{tg}\,\theta$，所以缸的每秒排量为

$$2R\left(\frac{n}{60}\right)\frac{\pi}{4}d^2\text{tg}\,\theta=\frac{\pi nd^2}{120}R\text{tg}\,\theta$$

因此缸的理论功率 E_{cyl} 为

$$E_{cyl}=\frac{\pi nd^2}{120}p_sR\text{tg}\,\theta$$

缸与柱塞副损失功率 E_z 与缸的理论功率 E_{cyl} 的比，即为缸与柱塞副的效率损失 $\Delta\eta$。设 $\overline{\delta}=\frac{\delta}{d}$，$\overline{L}=\frac{L}{d}$，$\overline{R}=\frac{R}{d}$ 则

$$\Delta\eta=\frac{5\overline{\delta}^3}{\left(\frac{\mu n}{p_s}\right)\overline{L}\,\overline{R}\operatorname{tg}\theta}+\frac{\pi^2}{15}\frac{\overline{L}\,\overline{R}}{\overline{\delta}}\left(\frac{\mu n}{p_s}\right)\operatorname{tg}\theta$$

设缸与柱塞副几何特征参数 λ 为

$$\lambda=\left(\frac{p_s}{\mu n}\right)\frac{1}{\overline{L}\,\overline{R}\operatorname{tg}\theta}$$

因此效率损失百分比为

$$\Delta\eta=100\left(5\lambda\overline{\delta}^3+\frac{\pi^2}{15\lambda\overline{\delta}}\right) \tag{7-20}$$

实际上由于柱塞上除了轴向力外，还作用着一些垂直于轴向的分力（例如滑履上的液压反力，就有这种分力作用于柱塞）；这些力将使柱塞在缸内发生倾侧，柱塞完全倾侧后的泄漏量尚待进一步研究，但可以认为它是介于同心和完全偏心之间，即约为同心泄漏的 1.75 倍 $\left(\frac{1+2.5}{2}=1.75\right)$，而柱塞完全倾侧后的摩擦损失约为同心时的 $\pi/2$ 倍[1]，这样对于比较符合实际情况的油缸柱塞副效率损失 $\Delta\eta$ 为

$$\Delta\eta=100\left(8.75\lambda\overline{\delta}^3+\frac{\pi^3}{30\lambda\overline{\delta}}\right) \tag{7-21}$$

由此可见，缸与柱塞副的损失与 $\overline{\delta}$ 及 λ 有关，在一般情况下，柱塞直径 d，缸的分布圆半径 R 和油液压强 p_s 均按设计要求确定，在 λ 中唯一可供选择者为柱塞长度 L。$\overline{\delta}$ 应尽可能小些，但受加工条件的限制，即配合要求的限制，也受到油液滤清条件的限制，一般 δ 至少应为油液中杂质颗粒尺寸的 2 倍，此外，还应考虑热膨胀和变形等因素。如果选定了 δ 值，则可求出在给定 $\overline{\delta}$ 条件下按 $\frac{d\Delta\eta}{d\lambda}=0$ 求出损失最小的几何参数 λ，求出 λ 后即可确定柱塞长度 L。在给定 $\overline{\delta}$ 条件下，最小损失的 λ 为

$$\lambda=0.344/\overline{\delta}^2 \tag{7-22}$$

同样，如果给定 λ 可以按 $\frac{d\Delta\eta}{d\overline{\delta}}=0$ 求得最小损失的 $\overline{\delta}$ 为

$$\overline{\delta}^2=0.199/\lambda$$

或

$$\lambda=0.199/\overline{\delta}^2 \tag{7-23}$$

如果柱塞的密封长度是随柱塞在缸体内的位置而变的，即柱塞无细颈部分（图7-15）则泄漏损失应加以修正，修正系数[1]为

$$\left[1-(R\operatorname{tg}\theta/L)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

这里 L 为柱塞伸入油缸的平均值，这样，总的效率损失为

---

〔1〕 Shute N. A. & Turnbull D. E., Minimum Power Loss Conditions of the Pistons and Valve Plate in Axial-type Pumps and Motors, ASME Paper No. 63-WA-90 1963.

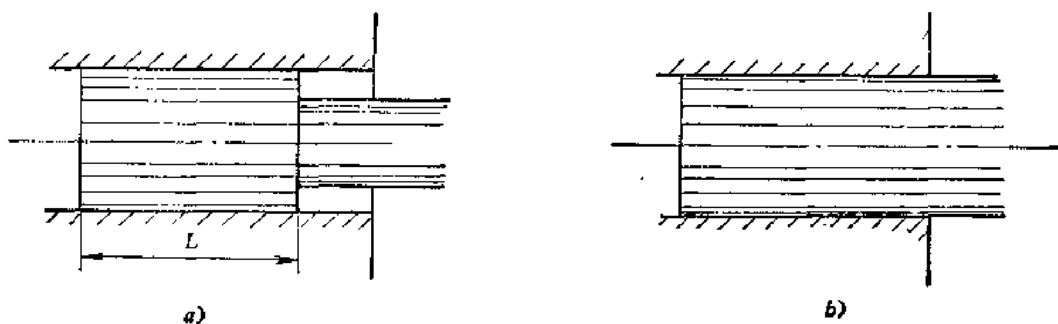


图7-15 两种柱塞结构

a) 密封长度不变 b) 密封长度改变

$$\Delta\eta = 100\left\{\frac{8.75\lambda\bar{\delta}^3}{[1-(R\operatorname{tg}\theta/L)^2]^{\frac{1}{2}}} + \frac{\pi^3}{30\lambda\bar{\delta}}\right\} \tag{7-24}$$

因此，在给定$\bar{\delta}$时的最小损失 λ 值为

$$\lambda = \frac{0.344}{\bar{\delta}}[1-(R\operatorname{tg}\theta/L)^2]^{\frac{1}{4}} \tag{7-25}$$

给定 λ 时，损失最小的$\bar{\delta}$值为

$$\bar{\delta}^2 = 0.199\left[1-\left(\frac{R\operatorname{tg}\theta}{L}\right)^2\right]^{\frac{1}{4}}\Big/\lambda \tag{7-26}$$

图 7-16 示出了当修正值为 1 时的 λ，$\bar{\delta}$与 Δη 的关系，图中上面的实线表示给定$\bar{\delta}$时最佳的$\bar{\delta}$与 λ 关系，下面的实线则为给定 λ 条件下的$\bar{\delta}$和 λ 关系。

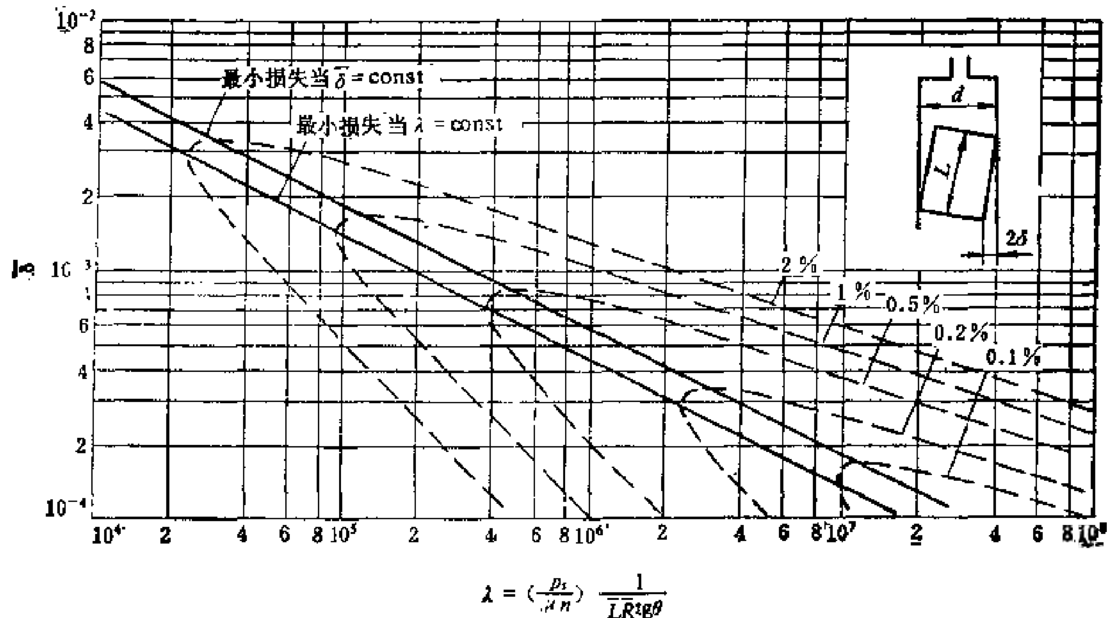


图7-16 缸与柱塞副的效率损失

§ 7-5 倾斜壁面缝隙间的流动

如果两壁面并不平行，而是倾斜 α 角，它们之间的间隙成为楔形，即间隙 h 是随 x 而异的

变数。但只要 h 是小量，根据(7-2 a)式缝隙中流速为

$$u=-\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}(h-z)z$$

由于 h 很小，液体无 z 方向的运动，所以$\frac{dp}{dx}$与 z 无关。如果宽度为 b，则泄漏量 q 为

$$q=\int_A udA=-\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}\int_0^h(h-z)zbdz$$

$$=-\frac{bh^3}{12\mu}\frac{dp}{dx}$$

或

$$\frac{dp}{dx}=-\frac{12\mu q}{bh^3}$$

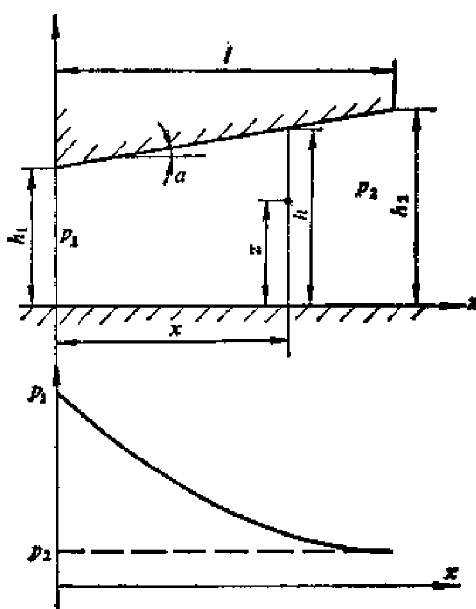


图7-17　倾斜壁面的缝隙

由图 7-17 可见 $h=h_1+x\text{tg}\,\alpha$，因此在倾斜壁面缝隙内$\frac{dp}{dx}$并不是常量而将随 x 而变，即

$$\frac{dp}{dx}=-\frac{12\mu q}{b(h_1+x\text{tg}\,\alpha)^3}$$

因此

$$dp=-\frac{12\mu q}{b(h_1+x\text{tg}\,\alpha)^3}dx$$

积分之：

$$p=-\int\frac{12\mu q}{b}(h_1+x\text{tg}\,\alpha)^{-3}dx=\frac{6\mu q}{b\text{tg}\,\alpha}\frac{1}{(h_1+x\text{tg}\,\alpha)^2}+C$$

积分常数 C 可用边界条件：当 $x=0$ 时 $p=p_1$ 求得

$$C=p_1-\frac{6\mu q}{b\text{tg}\,\alpha}\left(\frac{1}{h_1^2}\right)$$

以上述 C 式及 $h=h_1+x\text{tg}\,\alpha$ 代入之得

$$p=p_1-\frac{6\mu q}{b\text{tg}\,\alpha}\left(\frac{1}{h_1^2}-\frac{1}{h^2}\right)\qquad(7\text{-}27)$$

这个公式说明压强 p 与 h 的关系（或与 x 的关系）呈抛物线分布。由图 7-17 可见，当 $x=l$ 时 $h=h_2$，$p=p_2$，并以 $\text{tg}\,\alpha=\frac{h_2-h_1}{l}$ 代入上式得

$$p_2=p_1+\frac{6\mu q}{b\text{tg}\,\alpha}\left(\frac{1}{h_2^2}-\frac{1}{h_1^2}\right)=p_1-\frac{6\mu ql}{b}\left(\frac{h_2+h_1}{h_1^2+h_2^2}\right)$$

由此可求得泄漏量 q 为

$$q=\frac{(p_1-p_2)b}{6\mu l}\frac{(h_1h_2)^2}{(h_1+h_2)}$$

$$=\frac{b\Delta p}{6\mu l}\frac{(h_1h_2)^2}{h_1+h_2}\qquad(7\text{-}28)$$

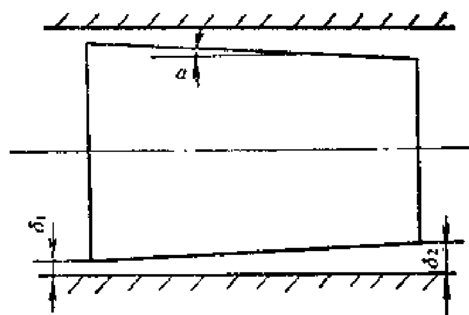


图7-18　有锥度的同心环缝

如果是缸孔或柱塞有锥度，则缸与柱塞间缝隙呈楔形，这时上式是适用的，但应将宽度 b 改作 πd

$$q=\frac{\pi d}{6\mu l}\Delta p\frac{(\delta_1\delta_2)^2}{\delta_1+\delta_2}\qquad(7\text{-}28\,\text{a})$$

式中　d——缸的内径；

δ_1 及 δ_2——柱塞两端的半径间隙，如图 7-18 所示。

§7-6　液压卡紧现象

圆柱滑阀阀芯在阀套内移动，它们之间的粘性摩擦力应该是很小的。但实践证明，阀芯从静止到运动的过程中，起动力却往往很大，有时甚至不能够移动，出现卡住现象，这是什么原因呢？需要我们探讨。

我们来分析一下圆柱滑阀阀芯圆周上受到由液体所引起的力。设一稍有锥度的阀芯或阀套，它们所组成的间隙是有倾斜的，其倾斜角为 α，它的两端与阀套间的半径间隙各为 δ_1 及 δ_2(图 7-18)。如果阀芯与阀套之间产生偏心距 e（图7-19），则阀芯与阀套之间的间隙 h 将随 θ 角和轴向长度 x 而异，当 $x=0$ 时，$h=h_1=\delta_1-e\cos\theta$；当 $x=l$ 时，则 $h=h_2=\delta_2-e\cos\theta$，任意处的间隙 h 为

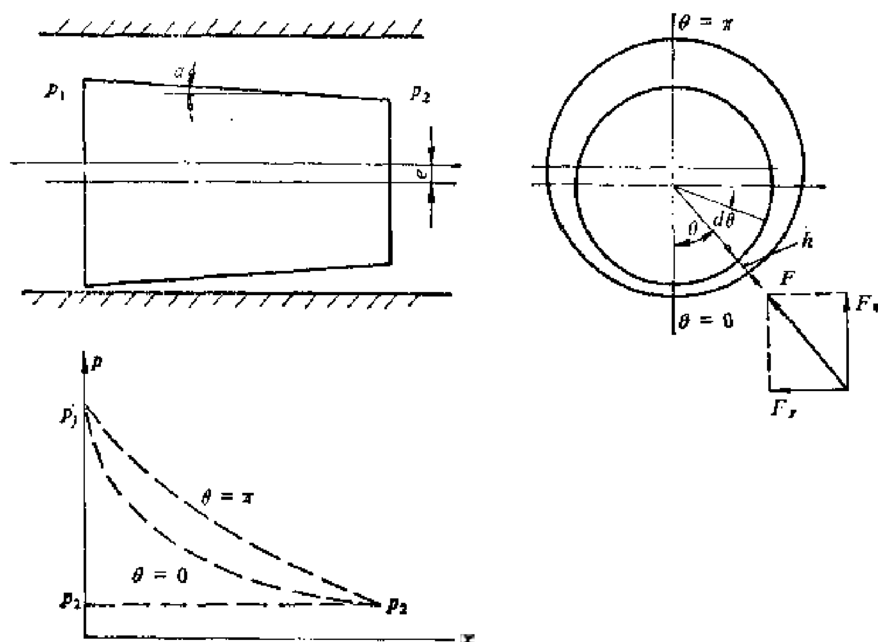


图7-19　有锥度的偏心环缝

$$h=h_1+x\operatorname{tg}\alpha=\delta_1-e\cos\theta+x\operatorname{tg}\alpha \tag{7-29}$$

式中 α 为阀芯锥角之半。我们取 $\theta=0$ 及 $\theta=\pi$ 两个位置来分析，显然 $\theta=0$ 处的 h 小于 $\theta=\pi$ 处的间隙。由(7-27)式可知 $\theta=0$ 处的压强值要比 $\theta=\pi$ 处的压强值为小，因此使阀芯偏心增大。阀芯压向阀套壁面而产生卡紧现象，称为液压卡紧，至于卡紧力的大小怎样，需要进一步分析。

在某一确定的 θ 角时，间隙 h 将只随 x 而异，任一 x 的微小改变 dx 将引起间隙的相应改变 dh，它们的关系可由(7-29)微分求得，即

$$dh=\operatorname{tg}\alpha dx$$

或

$$dx=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}dh$$

在阀芯上取一微小面积 $rd\theta dl$，该面积上所受的液压力为 $df' = prd\theta dl$，它的方向垂直于该面，则径向作用于阀芯的力为 $df = df'\cos\alpha = prd\theta dl\cos\alpha = prd\theta dx$，由此，径向作用于阀芯上 θ 和 $\theta + d\theta$ 之间面上的液压力为

$$f = \int df = \int prd\theta dx$$

以(7-27)式及 $dx = \dfrac{dh}{\operatorname{tg}\alpha}$ 代入，我们得：

$$f = \frac{rd\theta}{\operatorname{tg}\alpha}\int_{h_1}^{h_2} p\,dh = \frac{rd\theta}{\operatorname{tg}\alpha}\int_{h_1}^{h_2}\left[p_1 + \frac{6\mu q}{rd\theta\operatorname{tg}\alpha}\left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{h_1^2}\right)\right]dh$$

$$= \frac{rd\theta}{\operatorname{tg}\alpha}\left[p_1 h + \frac{6\mu q}{rd\theta\operatorname{tg}\alpha}\left(-\frac{1}{h}\right) - \frac{6\mu q}{rd\theta\operatorname{tg}\alpha}\left(\frac{h}{h_1^2}\right)\right]_{h_1}^{h_2}$$

或

$$f\frac{\operatorname{tg}\alpha}{rd\theta} = p_1h_2 - p_1h_1 - \frac{6\mu q}{rd\theta\operatorname{tg}\alpha}\left(\frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_1} + \frac{h_2}{h_1^2} - \frac{h_1}{h_1^2}\right)$$

以(7-28)式代入之，我们得：

$$f\cdot\frac{\operatorname{tg}\alpha}{rd\theta} = p_1h_2 - p_1h_1 - \frac{6\mu}{rd\theta\operatorname{tg}\alpha}\frac{rd\theta(p_1-p_2)}{6\mu l}\frac{h_1^2h_2^2}{h_1+h_2}\left(\frac{h_1^2 - 2h_1h_2 + h_2^2}{h_1^2h_2}\right)$$

$$= p_1h_2 - p_1h_1 - \frac{p_1-p_2}{l\operatorname{tg}\alpha}\frac{h_2}{h_1+h_2}(h_1-h_2)^2$$

因为 $h = h_1 + x\operatorname{tg}\alpha$，当 $x = l$ 时，$h = h_2$，即 $h_2 = h_1 + \operatorname{tg}\alpha$ 所以 $l\operatorname{tg}\alpha = h_2 - h_1$，代入上式得

$$f\frac{\operatorname{tg}\alpha}{rd\theta} = p_1h_2 - p_1h_1 - \frac{p_2-p_1}{h_1-h_2}\frac{h_2}{h_1+h_2}(h_1-h_2)^2$$

$$= \frac{p_1h_1h_2 - p_1h_1^2 + p_1h_2^2 - p_1h_1h_2 - p_2h_1h_2 + p_2h_2^2 + p_1h_1h_2 - p_1h_2^2}{h_1+h_2}$$

$$= (h_2-h_1)\frac{p_1h_1+p_2h_2}{h_1+h_2} = l\operatorname{tg}\alpha\frac{p_1h_1+p_2h_2}{h_1+h_2}$$

所以

$$f = lrd\theta\left(\frac{p_1h_1+p_2h_2}{h_1+h_2}\right)$$

设 $\dfrac{h_1+h_2}{2} = h_m$；$\dfrac{h_2-h_1}{2} = \Delta h$ 则

$$f = \frac{lrd\theta}{2}\left[(p_1+p_2) - (p_1-p_2)\frac{\Delta h}{h_m}\right] \tag{7-30}$$

研究一下(7-30)式，可以得出一些结论：

（1）如果阀芯和阀套均无锥度，则 $\Delta h = 0$，由此可得

$$f = \frac{rd\theta}{2}l(p_1+p_2)$$

因为 r、l、p_1 及 p_2 均为常数，所以 f 不随 θ 而变，即阀芯上的径向作用力是平衡的，如果我们计算一下阀芯上作用的总径向力（液压力）将等于零。

总液压力 $\boldsymbol{F}$ 为：$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{j}F_y + \boldsymbol{k}F_z$

y 方向分力 F_y 为

$$F_y = \int_0^{2\pi} f\cos\theta = \frac{rl}{2}(p_1+p_2)\int_0^{2\pi}\cos\theta d\theta = 0$$

z 方向分力 F_z 为

$$F_z=\int_0^{2\pi} f\sin\theta = \frac{rl}{2}(p_1+p_2)\int_0^{2\pi}\sin\theta d\theta = 0$$

所以总液压力 $F=0$。由此可以得出结论：圆柱滑阀的阀芯和阀套均无锥度时，液压力为零，即不产生液压卡紧现象。

（2）如果阀芯或阀套有锥度，但阀芯与阀套同心（即 $e=0$），则任意 θ 角时的 $\Delta h=\frac{\delta_2-\delta_1}{2}$，$h_m=\frac{\delta_1+\delta_2}{2}$ 均为常数，因此 f 不随 θ 角而变，即阀芯上的径向作用力是平衡的。由此得到结论：阀芯与阀套同心时液压力为零，不产生液压卡紧现象。但阀芯和阀套保持同心是困难的。

（3）如果阀芯或阀套有锥度，且形成的间隙向流动方向减小，即 $h_2<h_1$，$\Delta h<0$；则 f 力将随 $\Delta h/h_m$ 的绝对值 $\left|\frac{\Delta h}{h_m}\right|$ 的增大而增大，由图 7-19 可见，如果阀芯与阀套产生偏心 e 时，在图 7-19 的下部（即 $\theta=0$ 处）的 $\left|\frac{\Delta h}{h_m}\right|_{\theta=0}=\left|\frac{\delta_2-\delta_1}{\delta_2+\delta_1-2e}\right|$ 将较上部（$\theta=\pi$ 处）的 $\left|\frac{\Delta h}{h_m}\right|_{\theta=\pi}=\left|\frac{\delta_2-\delta_1}{\delta_2+\delta_1+2e}\right|$ 为大，因此将产生一个向上的径向力，将使偏心减小直至趋于同心。因此在 $\Delta h<0$ 时，阀芯上作用着对中力，使阀芯自动消除偏心。由此可以得出结论：圆柱滑阀阀芯或阀套有锥度，所形成的间隙向流动方向减小时，不产生液压卡紧现象。

（4）如果阀芯或阀套有锥度，形成间隙向流动方向增大，即 $h_2>h_1$，$\Delta h>0$；则由(7-30)式可知 f 力将随着 $\Delta h/h_m$ 的增大而减小。同样，由图 7-19 可见，如果阀芯与阀套产生偏心 e 时，在图 7-19 下部（$\theta=0$）的 $\left|\frac{\Delta h}{h_m}\right|_{\theta=0}$ 将较上部（$\theta=\pi$）的 $\left|\frac{\Delta h}{h_m}\right|_{\theta=\pi}$ 为大，因此在 $\theta=0$ 处的力将小于 $\theta=\pi$ 处的力，这样就产生了使偏心距 e 增大的力，将使阀芯压向阀套壁面。由此得出结论：圆柱滑阀阀芯或阀套有锥度且间隙向流动方向增大时将产生液压卡紧现象。

§7-7　液压卡紧力的计算

上面我们将液压卡紧力产生的原因和条件进行了理论分析，使我们对这个现象有所了解，下面我们将对液压卡紧力进行计算。

由图 7-19 可见

$$h_1(\theta)=\delta_1-e\cos\theta$$
$$h_2(\theta)=\delta_2-e\cos\theta$$

则

$$h_m=\frac{h_1(\theta)+h_2(\theta)}{2}=\frac{\delta_1+\delta_2}{2}-e\cos\theta=\delta_m-e\cos\theta$$

及

$$\Delta h=\frac{h_2(\theta)-h_1(\theta)}{2}=\frac{\delta_2-\delta_1}{2}=\Delta\delta$$

代入(7-30)式得：

$$f=\frac{rd\theta}{2}l\left[(p_1+p_2)-(p_1-p_2)\frac{\Delta\delta}{\delta_m-e\cos\theta}\right]$$

与前述一样，我们求作用在阀芯上的总液压力$F = F_y j + F_z k$。

$$F_y = \int_0^{2\pi} f\sin\theta = \frac{rl}{2}\int_0^{2\pi}\left[(p_1+p_2)-(p_1-p_2)\frac{\Delta\delta}{\delta_m - e\cos\theta}\right]\sin\theta d\theta = 0$$

$$F_z = \int_0^{2\pi} f\cos\theta = \frac{rl}{2}\int_0^{2\pi}\left[(p_1+p_2)-(p_1-p_2)\frac{\Delta\delta}{\delta_m - e\cos\theta}\right]\cos\theta d\theta$$

$$= -ld(p_1-p_2)\frac{\pi\Delta\delta}{2e}\left[\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{e}{\delta_m}\right)^2}}-1\right]$$

或
$$F = F_z = -ld(p_1-p_2)\frac{\pi\Delta\delta}{2e}\left[\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{e}{\delta_m}\right)^2}}-1\right]$$

式中负号(－)表示液压卡紧力是向下的，如果我们求它的绝对值则为

$$F = ld(p_1-p_2)\frac{\pi\Delta\delta}{2e}\left[\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{e}{\delta_m}\right)^2}}-1\right] = Kld(p_1-p_2) = KF_r \tag{7-31}$$

式中 $K = \frac{\pi\Delta\delta}{2e}\left[\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{e}{\delta_m}\right)^2}}-1\right]$——卡紧力系数；

d——阀芯直径；

$F_r = ld(p_1-p_2)$。

阀芯发生卡紧现象时，阀芯必与阀套壁面接触，现在我们来探讨一下有锥度的阀芯的一端与阀套壁面接触的情况，此时$e=\delta_m-\Delta\delta$(图7-20)，因此卡紧力系数K为

$$K = \frac{\pi\Delta\delta}{2(\delta_m-\Delta\delta)}\left[\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\delta_m-\Delta\delta}{\delta_m}\right)^2}}-1\right]$$

设 $t=\frac{\Delta\delta}{\delta_m}$代入上式得

$$K = \left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{t}{1-t}\left[\frac{1}{\sqrt{1-(1-t)^2}}-1\right] \tag{7-32}$$

K与t的关系画成曲线如图7-21，由图可见K的最大值可达0.27。

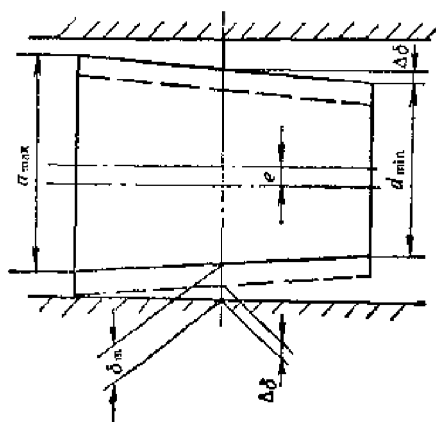


图7-20 阀芯一端与阀套接触

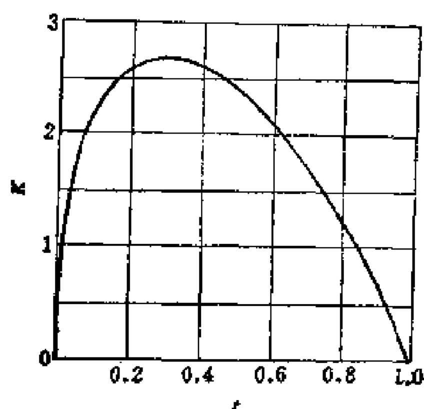


图7-21 卡紧力系数K

实际上为了便于检验，不采用半径间隙，而采用直径间隙，而锥度也是用两端直径差来表示。由图 7-20 可见，平均直径间隙等于 $2\delta_m$，而锥度 $(d_{max}-d_{min})$ 则等于 $4\Delta\delta$。

例7-1 设一滑阀直径 $d=16$mm，滑阀支承长度 $l=12$mm，工作压强为 210bar，直径平均间隙 $2\delta_m=0.01$，锥度允差 0.002mm，求液压卡紧力。

解 先求 F_r

$$F_r=\Delta pld=210\times10\times1.2\times1.6=4030\,\text{N}$$

$$t=\frac{\Delta\delta}{\delta_m}=\frac{0.002/4}{0.01/2}=0.1$$

由图 7-21 查得 $K=0.225$

或 $K=\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{t}{1-t}\left[\frac{1}{\sqrt{1-(1-t)^2}}-1\right]=\frac{\pi}{2}\left(\frac{0.1}{0.9}\right)\left[\frac{1}{\sqrt{0.19}}-1\right]=0.225$

由此得液压卡紧力 F 为

$$F=KF_r=0.225\times4030=906\,\text{N}$$

如果滑阀与阀套之间的摩擦系数取为 0.15 则由于液压卡紧力 F 而造成的轴向阻力可达 $0.15\times906=146$N，也就是说就液压卡紧力而论，要推动这个阀芯至少需146N的力，因为 K 的最大值为0.27，因此可能最大液压卡紧力为 $0.27\times4030=1090$N，因此最大可能的轴向阻力为 $0.15\times1090=163.5$N。

由上所述，不产生液压卡紧力的条件是：（1）$t=0$，即阀和阀套无锥度；（2）$t=1$，即 $\Delta\delta=\delta_m$，则 $\frac{\delta_2-\delta_1}{2}=\frac{\delta_1+\delta_2}{2}$，即 $\delta_1=0$，就是说阀芯一端的直径刚好等于阀套的孔径。这两个条件在工艺上是不可能实现的。另一不产生液压卡紧力的条件是使间隙沿流向减小，但某些阀中的液流往往是可逆的。由此可知，实际上液压卡紧力是客观存在的，我们

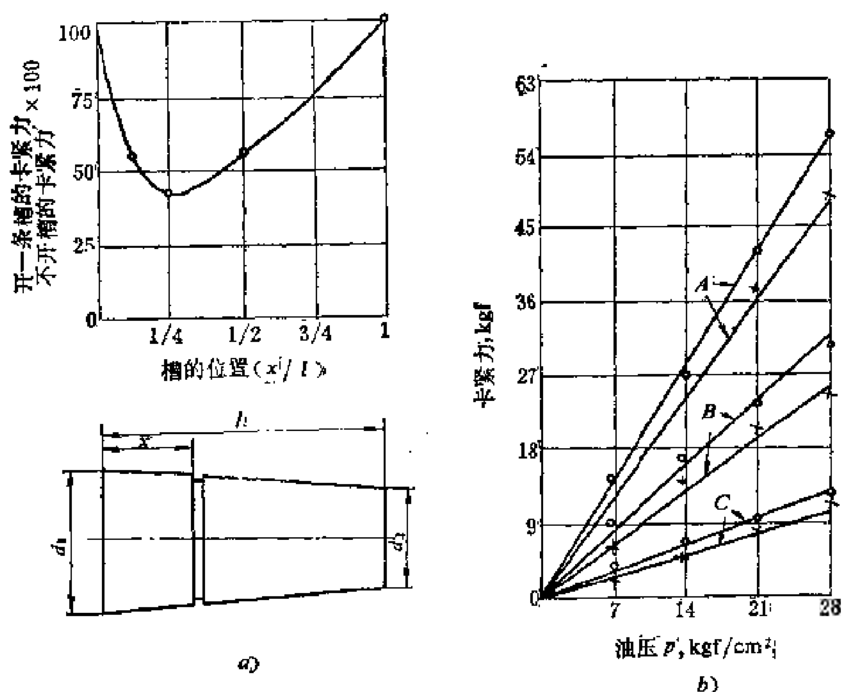


图7-22 均压槽的作用

a）槽的位置对卡紧力的影响 b）开槽后的试验数据 A：不开槽 B：开一条槽在中间位置 C：开三条槽等距离分布 $\frac{d_1-d_2}{2\delta_1}=2$ $+\frac{d_1-d_2}{2\delta_1}=3$

只能采取措施减小它。已经有几种办法可以减小液压卡紧力，其中简单而行之有效的方法是在圆柱体上开平衡压强的槽(均压槽)，因为既然产生液压卡紧力的原因是圆柱阀芯上压强分布不均匀，则开了均压槽就能使圆柱体上不同压强区互相沟通，使压强分布趋于均匀，这个问题就得到解决。根据实践证明，在阀芯上开一条槽可使卡紧力减少到无均压槽的58%，开三条槽可降到24%[1]，如图 7-22。这就是为什么我们看到圆柱滑阀阀芯和某些柱塞上都开有环状的槽的道理。

必须指出，滑阀的卡住，除了上述液压卡紧力外，油中脏物卡在间隙中也必然使滑阀卡住，所以液压用油的滤清，应该特别重视。阀芯上开了棱边的均压槽也有利于把脏物刮藏在槽内。

§7-8　平行圆盘缝隙间的层流

两圆盘 A 和 B 平行地相距 δ (图7-23)，液流或者从中心向四周径向流出(源流)，或者从四周径向汇入中心(汇流)。由于缝隙 δ 很小，流动呈层流。因为流动是径向的，所以对称于中心轴线。在轴向柱塞式液机的滑履(靴)与斜盘间，油缸体与配流盘间的缝隙中基本上属于这种流动。某些端面推力静压轴承也属于这种流动。因此，探讨一下这种流动的规律是有意义的。

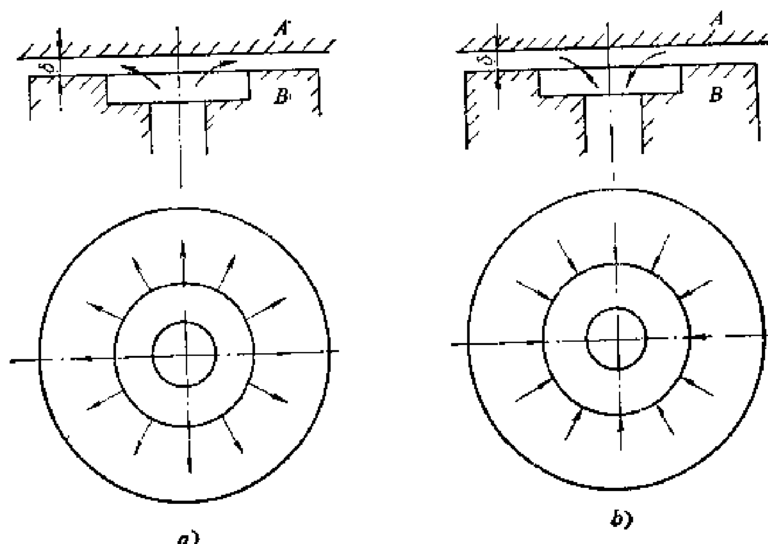


图7-23　平行圆盘间的源流与汇流
a) 源流　b) 汇流

探讨这种流动，采用圆柱座标系是比较方便的，圆柱座标系中空间点的位置由 r、θ、z 三个变量确定，因此运动参数（例如压强 p，流速 u 等）也可表示为 r，θ，z 的函数。但由于我们所探讨的平行圆盘间的流动是径向的，它对称于 z 轴，这样，运动参数就与 θ 无关。根据流动是径向的，而且缝隙高度 δ 很小，所以 $u_\theta=0$，$u_z\approx 0$，则 $u_r=u$。因此圆柱座标系N－S方程(4-37)可简化为

$$R-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{u}{r^2}\right)=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}$$

$$Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=0$$

在重力场中 $R=0$，$Z=-g$，则 z 轴向N－S方程的积分为

$$p=-\rho g z+f(r)$$

[1] Mannam J., Hydraulic and Dirt Lock in Piston Type Control Valves, Proc. of the First Australasian Conference on Hydraulic and Fluid Mechanics, Pergamon Press 1964 pp. 15～31.

由此得$\frac{\partial p}{\partial r}=f'(r)$，即$\frac{\partial p}{\partial r}$与$z$无关。

由于$u_\theta=u_z=0$，连续性方程为

$$\frac{u}{r}+\frac{\partial u}{\partial r}=0 \tag{7-33}$$

对r求导得

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{u}{r^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}=0$$

代入上述N-S方程得

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=u\frac{\partial u}{\partial r}$$

或
$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{u}{\nu}\frac{\partial u}{\partial r}$$

在$(r_2-r_1)/r_1$（图7-24）不大的情况下$\frac{\partial u}{\partial r}\ll\frac{\partial p}{\partial r}$，因此上式等号右边第二项可以略去。因为缝隙中$0\leqslant z\leqslant\delta$，$\rho gz\ll f(r)$，由此可以认为$\frac{\partial p}{\partial r}\approx\frac{dp}{dr}$。在上述条件下我们得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dr}$$

二次积分，并以边界条件：$z=0$，$u=0$；$z=\delta$，$u=0$代入，我们得

$$u=-\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dr}(\delta-z)z \tag{7-34}$$

泄漏量q为

$$q=\int_0^\delta udA=\int_0^\delta 2\pi rudz=-\frac{2\pi r}{2\mu}\frac{dp}{dr}\int_0^\delta(\delta-z)zdz$$
$$=-\frac{2\pi\delta^3}{12\mu}r\frac{dp}{dr}$$

所以
$$dp=-\frac{6\mu q}{\pi\delta^3}\frac{dr}{r}$$

积分之得圆盘上压强分布为

$$p=-\frac{6\mu q}{\pi\delta^3}\ln r+C$$

积分常数C由边界条件：$r=r_2$，$p=p_2$求得

$$C=\frac{6\mu q}{\pi\delta^3}\ln r+p_2$$

代入上式得

$$p=\frac{6\mu q}{\pi\delta^3}\ln\frac{r_2}{r}+p_2$$

或
$$p-p_2=\frac{6\mu q}{\pi\delta^3}\ln\frac{r_2}{r} \tag{7-35}$$

当$r=r_1$时，$p=p_1$则

$$p_1 - p_2 = \Delta p = \frac{6\mu q}{\pi\delta^3} \ln\frac{r_2}{r_1}$$

或

$$q = \frac{2\pi\delta^3}{12\mu} \frac{\Delta p}{\ln\frac{r_2}{r_1}} \tag{7-36}$$

考虑到层流起始段影响，可用系数 c_e 修正，c_e 值见图7-25，则

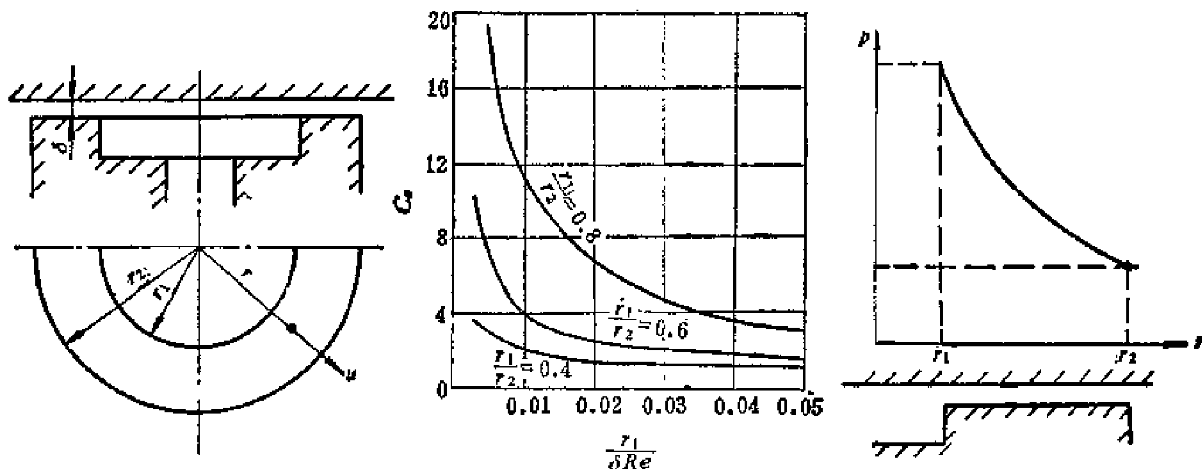


图7-24　平行圆盘缝隙　　图7-25　平行圆盘起始段修正系数　　图7-26　平行圆盘压强分布

$$q = \frac{2\pi\delta^3}{12c_e\mu} \frac{\Delta p}{\ln\frac{r_2}{r_1}} \tag{7-36 a}$$

以(7-36)式代入(7-35)式得

$$p - p_2 = \frac{6\mu q}{\pi\delta^3} \ln\frac{r_2}{r_1} = \frac{\ln\frac{r_2}{r}}{\ln\frac{r_2}{r_1}} \Delta p$$

如果圆盘外侧为大气压，即 $p_2 = 0$，则圆盘上的压强分布规律为(图7-26)

$$p = p_1 \frac{\ln\frac{r_2}{r}}{\ln\frac{r_2}{r_1}} \tag{7-37}$$

求得圆盘上缝隙内的压强分布规律后就可以求出圆盘上缝隙部分的总压力 F_δ：

$$F_\delta = \int_{r_1}^{r_2} p\,dA$$

式中 $dA = 2\pi r dr$，即圆盘上半径为 r，宽为 dr 的环形面积，所以

$$F_\delta = \frac{2\pi p_1}{\ln\frac{r_2}{r_1}} \int_{r_1}^{r_2} r \ln\frac{r_2}{r} dr$$

$$= \frac{2\pi p_1}{\ln r_2/r_1}\left(\int_{r_1}^{r_2} r \ln r_2\, dr - \int_{r_1}^{r_2} r \ln r dr\right)$$

式中 $\int_{r_1}^{r_2} r\ln r_2 dr = (\ln r_2)\left(\frac{r_2^2 - r_1^2}{2}\right)$

$\int_{r_1}^{r_2} r\ln r dr$ 可用分部积分法求得，即

$$\int_{r_1}^{r_2} r\ln r dr = \frac{r^2\ln r}{2}\Bigg|_{r_1}^{r_2} - \int_{r_1}^{r_2}\left(\frac{r^2}{2}\right)\left(\frac{1}{r}\right)dr = \frac{r^2\ln r}{2} - \frac{r^2}{4}\Bigg|_{r_1}^{r_2}$$

$$= \frac{r_2^2\ln r_2}{2} - \frac{r_1^2\ln r_1}{2} - \frac{r_2^2 - r_1^2}{4}$$

代入上式得圆盘缝隙部分上的总压力 F_δ 为

$$F_\delta = \frac{2\pi p_1}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\left[\left(\frac{r_2^2 - r_1^2}{2}\right)\ln r_2 - \frac{r_2^2\ln r_2}{2} + \frac{r_1^2\ln r_1}{2} + \frac{r_2^2 - r_1^2}{4}\right]$$

或
$$F_\delta = \frac{2\pi p_1}{4\ln\frac{r_2}{r_1}}\left(r_2^2 - r_1^2 - 2r_1^2\ln\frac{r_2}{r_1}\right) \tag{7-38}$$

计及半径为 r_1 的油腔内的作用力，则圆盘上受到的总压力为

$$F = \pi r_1^2 p_1 + \frac{2\pi p_1}{4\ln r_2/r_1}\left(r_2^2 - r_1^2 - 2r_1^2\ln\frac{r_2}{r_1}\right) = \frac{2\pi p_1}{4\ln\frac{r_2}{r_1}}(r_2^2 - r_1^2) \tag{7-39}$$

公式(7-36)、(7-37)及(7-38)是按源流情况求得的，如果液流从外向中心汇流，则用同样方法可求得流量 q、压强 p 及总压力 F_δ 为

$$q = -\frac{2\pi\delta^3}{12\mu c_e}\frac{\Delta p}{\ln\frac{r_1}{r_2}} \tag{7-40}$$

$$p = p_1\frac{\ln\frac{r}{r_2}}{\ln\frac{r_1}{r_2}} \tag{7-41}$$

$$F_\delta = \frac{2\pi p_1}{4\ln\frac{r_1}{r_2}}\left[2r_1^2\ln\frac{r_1}{r_2} - (r_1^2 - r_2^2)\right] \tag{4-42}$$

如果平行圆盘的内径 r_1 和外径 r_2 相差不大，则我们可以近似地认为缝隙内压强呈直线分布，理论泄漏量可按(7-4)式计算，式中 $b = \pi(r_1 + r_2)$，$l = r_2 - r_1$，即

$$q' = \frac{\pi(r_1 + r_2)\delta^3}{12\mu(r_1 - r_2)}\Delta p$$

而压强按对数分布的理论泄漏量为 $q = \frac{2\pi\delta^3}{12\mu\ln r_2/r_1}\Delta p$，设 $r_2/r_1 = x$，则

$$\frac{q}{q'} = \frac{2(r_2 - r_1)}{(r_2 + r_1)\ln r_2/r_1} = \frac{2(x-1)}{(x+1)\ln x} = f_1(x) \tag{7-43}$$

$f_1(x)$计算如表 7-1。

如果缝隙内压强呈直线分布则圆盘缝隙部分的总压力 F'_δ

表7-1 $f_1(x)$ 的值

x	$f_1(x)$	x	$f_1(x)$	x	$f_1(x)$	x	$f_1(x)$
1.02	1.000100	1.08	0.999525	1.40	0.990820	2.20	0.951230
1.04	0.999890	1.09	0.999355	1.50	0.986530	2.40	0.940680
1.05	0.999805	1.10	0.998300	1.60	0.981996	2.60	0.930270
1.06	0.999700	1.20	0.997240	1.80	0.972183	2.80	0.920123
1.07	0.999600	1.30	0.994310	2.00	0.961790	3.00	0.910241

$$F'_b = \frac{\pi}{3}p_1(r_2^2 + r_1^2 + r_2 r_1) - \pi r_1^2 p_1$$

即

$$F'_b = \frac{\pi}{3}p_1(r_2^2 - 2r_1^2 + r_1 r_2)$$

因此近似式与理论式(7-38)的比为

$$\frac{F_b}{F'_b} = \frac{3[(r_2^2 - r_1^2) - 2r_1 \ln r_2/r_1]}{2(r_2^2 - 2r_1^2 + r_1 r_2)\ln\dfrac{r_2}{r_1}} = \frac{3[(x^2-1) - 2\ln x]}{2[(x^2-2) + x]\ln x} = f_2(x) \tag{7-44}$$

$f_2(x)$值计算如表 7-2。

表7-2 $f_2(x)$ 值

x	$f_2(x)$	x	$f_2(x)$	x	$f_2(x)$
1.02	1.0034115	1.10	0.973820	1.5	0.928215
1.04	0.993880	1.20	0.968423	1.6	0.916070
1.06	0.989838	1.30	0.954506		
1.08	0.987190	1.40	0.941440		

由表 7-1 及表 7-2 可见，当 $r_2/r_1<1.3$ 时，采用近似公式计算，流量误差不超过1%，总压力误差将不超过 4.5%。在液压技术中，例如滑履及配流盘，它们的 r_2/r_1 的比值是不大的，尤其是配流盘，r_2/r_1 一般不会超过 1.2，为了处理问题方便起见，可以采用近似计算式。

*§7-9 二元缝隙流动

前几节讨论的是 $u_y=u_z=0$ 或 $u_\theta=u_z=0$ 的缝隙流动，在液压技术中，很多缝隙流动可以这样处理，但某些缝隙中的流动，例如齿轮泵侧面间的油液泄漏就既存在 u_x 或 u_r，也存在 u_y或 u_θ，当然u_z 仍可以认为等于零。本节将对这种流动加以讨论。设流体在重力场作用下，质量力$X=Y=0$，$Z=-g$，则N-S方程为

$$\left.\begin{aligned}
&-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right) = u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}\\
&-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\right) = u_x\frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}\\
&-g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = 0
\end{aligned}\right\} \tag{7-45}$$

由(7-45)的第三式可得压强

$$p=-\rho gz+f(x,y)$$

则 $\quad \dfrac{\partial p}{\partial x}=\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$，$\dfrac{\partial p}{\partial y}=\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$，即$\dfrac{\partial p}{\partial x}$及$\dfrac{\partial p}{\partial y}$与 z 无关。

流体具有粘性，将粘附于壁面，所以缝隙间的流动将存在着很大的速度梯度$\dfrac{\partial u_x}{\partial z}$及$\dfrac{\partial u_y}{\partial z}$，所以$\dfrac{\partial u_x}{\partial x}$，$\dfrac{\partial u_x}{\partial y}$，$\dfrac{\partial u_y}{\partial x}$及$\dfrac{\partial u_y}{\partial y}$与前者相比，通常认为已小得可以忽略不计，则(7-45)式中的第一及第二式可写为

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\mu\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}=\mu\frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}$$

由于$\dfrac{\partial p}{\partial x}$及$\dfrac{\partial p}{\partial y}$与 z 无关，上式积分之可得

$$u_x=\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{z^2}{2}+C_1z+C_2$$

$$u_y=\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y}\frac{z^2}{2}+C_3z+C_4$$

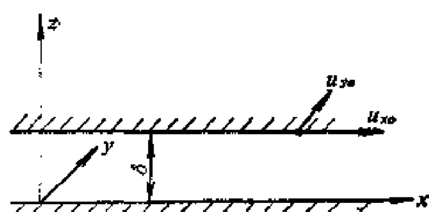


图7-27　二元缝隙流动

积分常数由边界条件确定：当 $z=0$ 时 $u_x=u_y=0$，当 $z=\delta$ 时 $u_x=u_{x0}$，$u_y=u_{y0}$ 则 $C_2=C_4=0$，

$$C_1=\frac{u_{x0}}{\delta}-\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\delta}{2},\quad C_4=\frac{u_{y0}}{\delta}-\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\delta}{2}$$

代入原式得

$$\left.\begin{aligned}u_x&=u_{x0}\frac{z}{\delta}-\frac{\delta^2}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{z}{\delta}\left(1-\frac{z}{\delta}\right)\\u_y&=u_{y0}\frac{z}{\delta}-\frac{\delta^2}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial y}\cdot\frac{z}{\delta}\left(1-\frac{z}{\delta}\right)\end{aligned}\right.\tag{7-46}$$

设

$$\left.\begin{aligned}U_x&=-\frac{\delta^2}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\\U_y&=-\frac{\delta^2}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial y}\end{aligned}\right.\tag{7-47}$$

由此得

$$\left.\begin{aligned}u_x-u_{x0}(z/\delta)&=U_x(z/\delta)[1-z/\delta]\\u_y-u_{y0}(z/\delta)&=U_y(z/\delta)[1-z/\delta]\end{aligned}\right\}\tag{7-48}$$

(7-48)式各对 x 及 y 偏导后相加，由连续性方程可得

$$\frac{\partial U_x}{\partial x}+\frac{\partial U_y}{\partial y}=\left[\frac{\delta}{z}\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}-\left(\frac{\partial u_{x0}}{\partial x}+\frac{\partial u_{y0}}{\partial y}\right)\right]\frac{\delta}{(\delta-z)}\approx 0\tag{7-49}$$

由(7-47)式可知 U_x 及 U_y 满足下式

$$\frac{\partial U_x}{\partial y}-\frac{\partial U_y}{\partial x}=0\tag{7-50}$$

(7-49)及(7-50)式说明 U_x 及 U_y 既满足连续性方程，又满足无旋条件，所以在 x、y 平

面内存在一个调和函数 Φ，它对 x 及 y 的偏导为 U_x 及 U_y，即

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}=U_x，\quad \frac{\partial \Phi}{\partial y}=U_y$$

所以 U_x 及 U_y 相当于势流场的速度，具有这样性质的流动称为 Hele-Shaw 流动。由(7-47)可得调和函数 Φ 为

$$\Phi=-\frac{\delta^2}{2\mu}p+C$$

如果采用极座标系，则

$$U_r=\frac{\partial \Phi}{\partial r}=-\frac{\delta^2}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial r}$$

$$U_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}=-\frac{\delta^2}{2\mu}\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}$$

Hele-Shaw 流与理想流体势流虽然可以获得相同的流动图形，但两者是有本质差别的，前者是惯性力极小而以粘性力为主的，后者恰好相反，略去粘性力而以惯性力为主。

现在，让我们应用上述原理来求解齿轮泵侧面的泄漏问题。设齿轮泵内压强升降过程均呈线性变化，如图 7-28 所示。我们采用极座标系，平面的连续性方程为

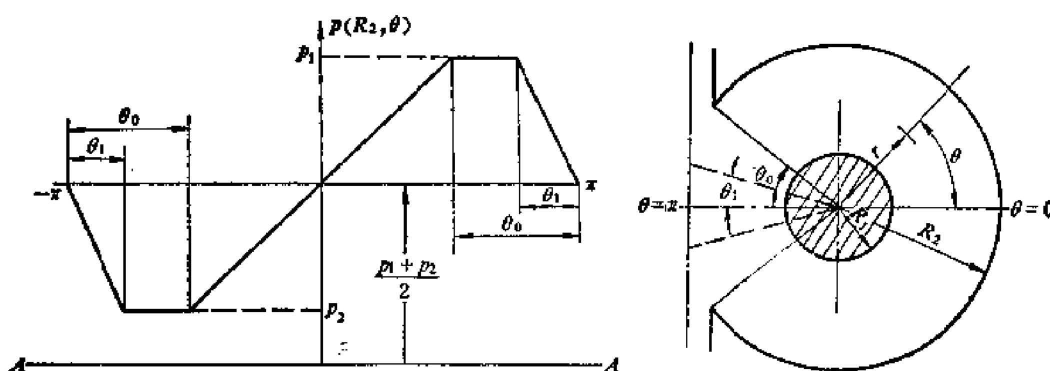


图7-28　齿轮泵内压强分布

$$\frac{U_r}{r}+\frac{\partial U_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial U_\theta}{\partial \theta}=0$$

因为

$$U_r=-\frac{\delta^2}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial r}，\quad U_\theta=-\frac{\delta^2}{2\mu}\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}$$

代入连续性方程得

$$-\frac{\delta^2}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial r}\frac{1}{r}-\frac{\delta^2}{2\mu}\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}-\frac{1}{r^2}\frac{\delta^2}{2\mu}\frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2}=0$$

或

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2}=0 \qquad (7\text{-}51)$$

用分离变量法解上列偏微分方程，设压强 $p(r,\theta)=F(r)G(\theta)$，则

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2}=F(r)\frac{\partial^2 G(\theta)}{\partial \theta^2};$$

$$\frac{\partial p}{\partial r}=G(\theta)\frac{\partial F(r)}{\partial r};$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}=G(\theta)\frac{\partial^2 F(r)}{\partial r^2}$$

代入(7-51)式得

$$G(\theta)\frac{\partial^2 F(r)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}G(\theta)\frac{\partial F(r)}{\partial r}+\frac{1}{r^2}F(r)\frac{\partial^2 G(\theta)}{\partial \theta^2}=0$$

或
$$\frac{\partial^2 F(r)}{\partial r^2}\ \frac{r^2}{F(r)}+\frac{r^2}{rF(r)}\ \frac{\partial F(r)}{\partial r}=-\frac{\partial^2 G(\theta)}{\partial \theta^2}\cdot\frac{1}{G(\theta)}$$

方程左边仅为 r 的函数，而右边又只是 θ 的函数，但它们又相等，所以等号两边只能各等于常数，设该常数为 n^2，则

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2G(\theta)}{d\theta^2}+n^2G(\theta)=0\\&\frac{d^2F(r)}{dr^2}+\frac{1}{r}\ \frac{dF(r)}{dr}-\frac{n^2}{r^2}F(r)=0\end{aligned}\right\}\tag{7-52}$$

先讨论(7-52)的第一式：$\dfrac{d^2G(\theta)}{d\theta^2}+n^2G(\theta)=0$。

这是个无任意函数项的常系数线性微分方程，它的特征方程为：$k^2+n^2=0$

所以
$$k=\pm\sqrt{-n^2}=\pm n\mathrm{j}$$

由此可得方程的解为

$$G(\theta)=C_1\cos n\theta+C_2\sin n\theta$$

再讨论方程：$\dfrac{d^2F(r)}{dr^2}+\dfrac{1}{r}\ \dfrac{dF(r)}{dr}-\dfrac{r^2}{n^2}F(r)=0$

这是个二阶线性齐次方程，设 $r=e^t$ 则

$$dr=e^t dt=r\,dt$$

或
$$\frac{dt}{dr}=\frac{1}{r}$$

因为
$$\frac{dF(r)}{dr}=\frac{dF(r)}{dt}\cdot\frac{dt}{dr}=\frac{1}{r}\ \frac{dF(r)}{dt}$$

$$\frac{d^2F(r)}{dr^2}=-\frac{1}{r^2}\ \frac{dF(r)}{dt}+\frac{1}{r}\ \frac{dt}{dr}\ \frac{d^2F(r)}{dt^2}$$

$$=-\frac{1}{r^2}\ \frac{dF(r)}{dt}+\frac{1}{r^2}\ \frac{d^2F(r)}{dt^2}$$

代入原式得

$$-\frac{1}{r^2}\ \frac{dF(r)}{dt}+\frac{1}{r^2}\ \frac{d^2F(r)}{dt^2}+\frac{1}{r^2}\ \frac{dF(r)}{dt}-\frac{n^2}{r^2}F(r)=0$$

或
$$\frac{d^2F(r)}{dt^2}-n^2F(r)=0$$

特征方程为：$k^2-n^2=0$，由此得 $k=\pm n$，则方程的解为：

$$F(r)=C_3e^{nt}+C_4e^{-nt}=C_3r^n+C_4r^{-n}$$

由此可得压强 p 为

$$p=F(r)G(\theta)=(C_3r^n+C_4r^{-n})(C_1\cos n\theta)+(C_3r^n+C_4r^{-n})C_2\sin n\theta$$

或
$$p=(a_1r^n+a_2r^{-n})\sin n\theta+(a_3r^n+a_4r^{-n})\cos n\theta\tag{7-53}$$

系数 a_1, a_2, a_3 及 a_4 用边界条件求得，根据齿轮泵 $r=R_2$ 处的压强分布情况：

$$p(R_2,\ \theta)=-\left(\frac{p_1-p_2}{2}\right)\frac{\theta+\pi}{\theta_1},\quad -\pi\leqslant\theta\leqslant-(\pi-\theta_1);$$

$$=-\frac{p_1-p_2}{2},\qquad -(\pi-\theta_1)\leqslant\theta\leqslant-(\pi-\theta_0);$$

$$=\left(\frac{p_1-p_2}{2}\right)\frac{\theta}{\pi-\theta_0},\qquad -(\pi-\theta_0)\leqslant\theta\leqslant(\pi-\theta_0);$$

$$=\frac{p_1-p_2}{2},\qquad \pi-\theta_0\leqslant\theta\leqslant(\pi-\theta_1);$$

$$=\left(\frac{p_1-p_2}{2}\right)\frac{\pi-\theta}{\theta_1},\qquad \pi-\theta_1\leqslant\theta\leqslant\pi。$$

此外，在 $r=R_1$ 处 $U_r=0$，

因为
$$U_r=-\frac{\delta^2}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial r},$$

所以
$$\left.\frac{\partial p}{\partial r}\right|_{r=R_1}=0$$

由边界条件：当 $\theta=-\pi$ 时，$p(R_2,\ -\pi)=0$，所以

$$(a_1R_2^n+a_2R_2^{-n})\sin(-n\pi)+(a_3R_2^n+a_4R_2^{-n})\cos(-n\pi)=0$$

因为
$$\sin(-n\pi)=0,\quad \cos(-n\pi)=(-1)^n$$

所以
$$a_3R_2^n+a_4R_2^{-n}=0 \tag{7-54}$$

在 $r=R_2$ 处，当 $\theta=0$ 或 π 时 $U_r=0$，即 $\left.\frac{\partial p}{\partial r}\right|_{r=R_2,\theta=0,\pi}=0$

而
$$\frac{\partial p}{\partial r}=n\left[a_1r^{n-1}-a_2r^{-(n+1)}\right]\sin n\theta+n\left[a_3r^{n-1}-a_4r^{-(n+1)}\right]\cos n\theta$$

则
$$\left.\frac{\partial p}{\partial r}\right|_{r=R_2,\theta=0}=n\left[a_3R_2^{n-1}-a_4R_2^{-(n+1)}\right]=0$$

即
$$a_3R_2^{n-1}-a_4R_2^{-(n+1)}=0$$

乘以 R_2 则

$$a_3R_2^n-a_4R_2^{-n}=0 \tag{7-55}$$

由(7-54)及(7-55)式可知

$$a_3=0;\quad a_4=0$$

所以压强 p 为

$$p=(a_1r^n+a_2r^{-n})\sin n\theta$$

由于求解的偏微分方程是线性的，它的解的任何线性组合仍是它的解，因而级数

$$p(r,\ \theta)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_1r^n+a_2r^{-n})\sin n\theta$$

是偏微分方程的解，式中系数 a_1 及 a_2 可用下述方法求得：

由 $r=R_2$ 处的压强分布可知 $p(R_2,\ \theta)$ 是个周期函数，周期为 2π，所以 $p(R_2,\ \theta)$ 可用傅里叶级数展开

$$p(R_2, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\theta$$

因为
$$p(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_1 r^n + a_2 r^{-n}) \sin n\theta$$

则
$$p(R_2, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_1 R_2^n + a_2 R_2^{-n}) \sin n\theta$$

比较一下可知 $A_0 = 0$，$A_n = 0$，而

$$B_n = a_1 R_2^n + a_2 R_2^{-n} \tag{7-56}$$

而系数 B_n 又为

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p(R_2, \theta) \sin n\theta d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\left(\frac{p_1 - p_2}{2}\right)\int_{-\pi}^{-(\pi-\theta_1)} \frac{\theta + \pi}{\theta_1} \sin n\theta d\theta - \frac{p_1 - p_2}{2}\int_{-(\pi-\theta_1)}^{-(\pi-\theta_0)} \sin n\theta d\theta \right.$$

$$+ \frac{p_1 - p_2}{2}\int_{-(\pi-\theta_0)}^{\pi-\theta_0} \left(\frac{\theta}{\pi - \theta_0}\right) \sin n\theta d\theta + \frac{p_1 - p_2}{2}\int_{\pi-\theta_0}^{\pi-\theta_1} \sin n\theta d\theta$$

$$\left. + \frac{p_1 - p_2}{2}\int_{\pi-\theta_1}^{\pi} \left(\frac{\pi - \theta}{\theta_1}\right) \sin n\theta d\theta \right]$$

$$= -\frac{p_1 - p_2}{2}\left[\frac{\sin n(\pi - \theta_1)}{\theta_1} + \frac{\sin n(\pi - \theta_0)}{(\pi - \theta_0)}\right]$$

再由边界条件 $U_r|_{r=R_1} = 0$ 得 $\left.\frac{\partial p}{\partial r}\right|_{r=R_1} = 0$，所以

$$\left.\frac{\partial p}{\partial r}\right|_{r=R_1} = \sum_{n=1}^{\infty} [n a_1 r^{n-1} - n a_2 r^{-(n+1)}]_{r=R_1} = \sum_{n=1}^{\infty} [n a_1 R_1^{n-1} - n a_2 R_1^{-(n+1)}] = 0$$

即
$$n a_1 R_1^{n-1} - n a_2 R_1^{-(n+1)} = 0$$

或
$$a_1 R_1^n - a_2 R_1^{-n} = 0 \tag{7-57}$$

由(7-56)及(7-57)式解之得

$$a_1 = \frac{B_n R_2^n}{R_1^{2n} + R_2^{2n}}$$

$$a_2 = \frac{B_n R_1^{2n} R_2^n}{R_1^{2n} + R_2^{2n}}$$

由此得压强 p 为

$$p = \sum_{n=1}^{\infty} (a_1 r^n + a_2 r^{-n}) \sin n\theta = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\left[\frac{(R_2 r)^n}{R_1^{2n} + R_2^{2n}} + \frac{R_1^{2n} R_2^n r^{-n}}{R_1^{2n} + R_2^{2n}}\right]\sin n\theta$$

$$= -\frac{p_1 - p_2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{r}{R_2}\right)^n + \left(\frac{R_1}{r}\right)^n \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^n}{1 + \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2n}} \left[\frac{\sin n(\pi - \theta_1)}{\theta_1}\right.$$

$$\left. + \frac{\sin n(\pi - \theta_0)}{(\pi - \theta_0)}\right] \frac{\sin n\theta}{n^2} \qquad (7\text{-}58)$$

如果压强 p 以 $A-A$ 线(图7-28)为基零，则可在(7-58)式上再加$\left(\frac{p_1 + p_2}{2}\right)$项。

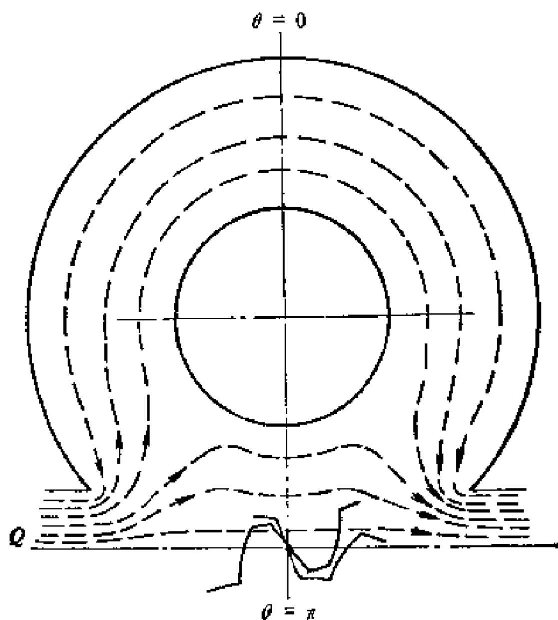


图7-29　齿轮泵侧面泄漏

由图 (7-29) 可见齿轮泵侧面泄漏量在 $\theta = 0$ 及 $\theta = \pi$ 处的 u_θ 乘以间隙面积，即

$$q = \int_0^\delta \int_{R_1}^{R_2} (u_\theta|_{\theta=0} + u_\theta|_{\theta=\pi}) dz dr$$

而　$u_\theta = u_{\theta 0}(z/\delta) + U_\theta \frac{z}{\delta}(1 - z/\delta)$

因为 $u_{\theta 0}$ 在 $\theta = 0$ 及 $\theta = \pi$ 时方向相反，互相抵消

而　$U_\theta = -\frac{\delta^2}{2\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta}$，所以

$$q = -\frac{\delta^2}{2\mu} \int_0^\delta \frac{z}{\delta}\left(1 - \frac{z}{\delta}\right) dz \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r}\left(\left.\frac{\partial p}{\partial \theta}\right|_{\theta=0} + \left.\frac{\partial p}{\partial \theta}\right|_{\theta=\pi}\right) dr$$

由(7-58)式得

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = -\frac{(p_1 - p_2)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(r/R_2)^n + \left(\frac{R_1}{r}\right)^n \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^n}{1 + \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2n}} \left[\frac{\sin n(\pi - \theta_1)}{\theta_1} + \frac{\sin n(\pi - \theta_0)}{\pi - \theta_0}\right] \frac{\cos n\theta}{n}$$

所以

$$\left.\frac{\partial p}{\partial \theta}\right|_{\theta=0} + \left.\frac{\partial p}{\partial \theta}\right|_{\theta=\pi} = -\frac{(p_1 - p_2)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(r/R_1)^n + \left(\frac{R_1}{r}\right)^n \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^n}{1 + \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2n}} \left[\frac{\sin n(\pi - \theta_1)}{\theta_1} + \frac{\sin n(\pi - \theta_0)}{\pi - \theta_0}\right] \frac{1 + \cos n\pi}{n}$$

由此得

$$q = \frac{\delta^2}{2\mu}\left(\frac{\delta^2}{2} - \frac{\delta^2}{3}\right) \frac{(p_1 - p_2)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2n}}$$

$$\left[\frac{\sin n(\pi - \theta_1)}{\theta_1} + \frac{\sin n(\pi - \theta_0)}{\pi - \theta_0}\right] \frac{1 + \cos n\pi}{n} \int_{R_1}^{R_2} \left[\frac{r^{n-1}}{R_2} + \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^n R_1^n r^{-(n+1)}\right] dr$$

$$=\frac{\delta^3(p_1-p_2)}{12\pi\mu}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2n}}{1+\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2n}}\left[\frac{\sin n(\pi-\theta_1)}{\theta_1}+\frac{\sin n(\pi-\theta_0)}{\pi-\theta_0}\right]\frac{1+\cos n\pi}{n^2}$$

通常齿轮泵有两个齿轮，共有四个泄漏面，所以总的侧面泄漏量为$4q$。

•§7-10　其他形式的缝隙

柱塞式液机有采用球形活塞的。球形活塞在液压缸中与缸壁形成的缝隙是比较复杂的曲面体。从它的剖面来看，缝隙是由呈直线的缸壁和呈圆弧的活塞壁面所组成（图7-30）。由于圆弧半径$R\gg\delta_0$，我们可以近似地把圆弧作为抛物线来处理，抛物线方程为

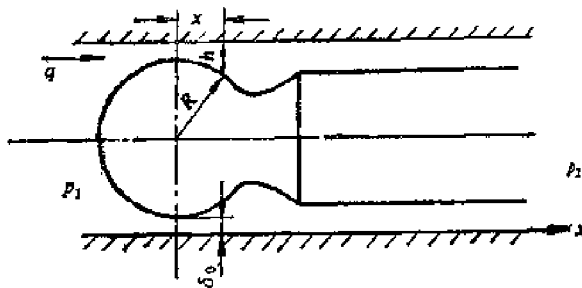


图7-30　球形活塞

$$h(x)=\delta_0+\frac{x^2}{2R}$$

式中R为球头半径。因为

$$\frac{dp}{dx}=-\frac{12\mu q}{bh^3}=-\frac{12\mu q}{2\pi R\left(\delta_0+\frac{x^2}{2R}\right)^3}$$

设　$a^2=\frac{x^2}{2\delta_0 R}$ 则 $dx=\frac{2\delta_0 Ra}{x}da=\sqrt{2\delta_0 R}da$，由此

$$dp=\frac{-12\mu q}{2\pi R}\frac{dx}{\delta_0+\frac{x^2}{2R}}=-\frac{12\mu q\sqrt{2\delta_0 R}}{2\pi R}\frac{da}{\delta_0^3(1+a^2)^3}$$

或

$$p=-\frac{12\mu q\sqrt{2\delta_0 R}}{2\pi R\delta_0^3}\int\frac{da}{(1+a^2)^3}$$

因为

$$\int\frac{da}{(1+a^2)^3}=\frac{a}{4(1+a^2)^2}+\frac{3}{8}\frac{a}{1+a^2}+\frac{3}{8}\operatorname{arctg}a+C$$

所以，缝隙内压强分布为

$$p=-\frac{12\mu q\sqrt{2\delta_0 R}}{2\pi R\delta_0^3}\left[\frac{a}{4(1+a^2)^2}+\frac{3}{8}\frac{a}{1+a^2}+\frac{3}{8}\operatorname{arctg}a+C\right]$$

积分常数可由边界条件求出，即当$x=\infty$(即$a=\infty$)时$p=p_2=0$，则

$$C=-\frac{3}{8}\operatorname{arctg}\infty=-\frac{3}{8}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

当$x=-\infty$(即$a=-\infty$)时，$p=p_1$，则

$$p_1=-\frac{12\mu q\sqrt{2\delta_0 R}}{2\pi R\delta_0^3}\left[-\frac{3}{8}\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{3}{8}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$=\left(\frac{12\mu q}{2\pi R\delta_0^3}\right)\frac{3\pi}{8}\sqrt{2\delta_0 R}=1.67\left(\frac{12\mu q}{2\pi R\delta_0^3}\right)\sqrt{\delta_0 R}$$

所以泄漏量 q 为

$$q=\frac{2\pi R\delta_0^3 p_1}{(12\mu)1.67\sqrt{\delta_0 R}}=\frac{2\pi R\delta_0^3}{12\mu L_{eq}}p_1 \tag{7-59}$$

式中　$L_{eq}=1.67\sqrt{\delta_0 R}$ ——当量长度。

* § 7-11　粘性变化的影响

由于温度与压强对油液的粘度均有影响，因此在工作过程中如果压强和温度变化较大，就应该考虑油液的粘度是压强和温度的函数，不应该把它简单地作为常数来处理。但是在前面的讨论中，我们把油液的粘度作为常数，这样一方面是使问题简化，而更主要的是在中低压情况下，粘度变化的影响不大，把它作为常数还是与实际符合的。但对于高压（例如压强超过 400～500bar）和超高压的情况下，把油液的粘度当作常数就会与实际有较大 的出入。但是考虑粘度变化后，问题就复杂了，计算也比较繁琐。现说明处理这个问题的一些方法。

油液的粘度随压强和温度变化的问题在第一章的 § 1-7 中讨论过， 可以采用下式表示：

$$\mu=\mu_0 e^{\alpha p-\lambda(t-t_1)} \tag{7-60}$$

式中 μ_0 是当压强为大气压，温度为 t_1 时的粘度。这个公式中既有压强变数 p，又有温度变数 t，在处理问题时是很不方便的，应该想办法予以简化。

我们知道在液流经过缝隙时不仅有压降，而且也伴随着发热温升，压降和温升发生在液流这个统一体内，它们之间的关系可用能量观点来分析。我们认为单位时间内油液流过缝隙时的能量关系是：(1)液流的压降 Δp 使液流损失了 $q\Delta p$ 的能量；(2)油液在流动时由于粘性的关系产生液体摩擦，损失了 $\mu AU^2/\delta$ 的能量；(3)这两种能量的损失实际上转变成热能而使油液获得热能 $q\rho c\Delta t$，使油液温度升高 Δt；(4)另有一部分热能则通过壁面散入周围环境（例如大气）中，能量平衡如图 7-31 所示。

现在我们分两种情况进行讨论。

(1) 不计纯 Couette 流，只考虑压差流。

在一般情况下散入周围环境的热量与温升的热量相比，前者是较小的，而且当缝隙 δ 超过 12～15 微米，壁面相对运动速度 U 不大时，E_2 也比 E_1 为小， J .Thoma 认为可以假设散热与 E_2 相平衡，压降的能量全部用于使油液温度升高，即不计纯 Couette 流的影响。

设缝隙入口处油液压强为 p_1，温度为 t_1，离入口为 x 处压强为 p，温度为 t，即在 x 一段内压降为 p_1-p，而温升为 $t-t_1$(图7-32)，按照上述原则得

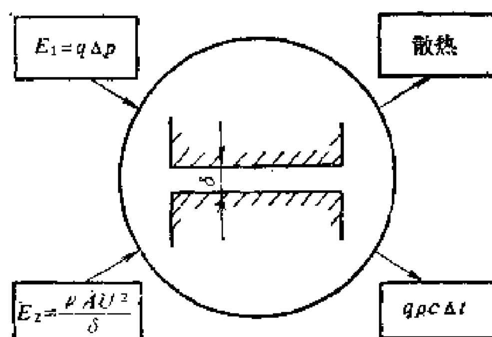


图7-31　缝隙流动能量平衡

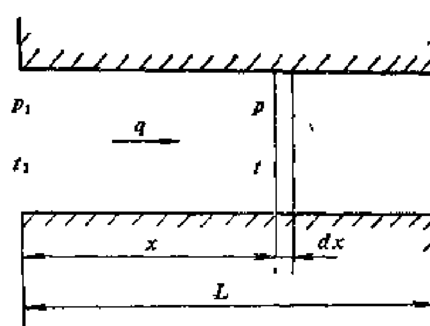


图7-32　能量平衡计算

$$-qdp=\rho qcdt$$

或

$$q(p_1-p_2)=\rho qc(t-t_1)$$

式中　ρ——密度，一般液压油液约为0.88×10^{-3}kg/cm³

　　　c——比热，一般液压油液约为0.46×4.18kJ/kg·K

由此得

$$t-t_1=\frac{p_1-p}{\rho c}=\phi(p_1-p)$$

式中系数　$$\phi=\frac{1}{\rho c}=\frac{1}{0.88\times10^{-3}\times0.46\times4.18\times10^{3}}\frac{\text{cm}^3\cdot\text{K}}{\text{J}}$$

因为　$$1\ \text{J}=10\text{daN}\cdot\text{cm}$$

所以

$$\phi=\frac{1}{0.88\times0.46\times4.18\times10}=\frac{5.9}{100}\frac{\text{cm}^2\cdot\text{K}}{\text{daN}}=\frac{5.9}{100}\frac{\text{K}}{\text{bar}}\tag{7-61}$$

这说明压强每降低100bar将造成约5.9K（K为开氏度，与℃等值）的温升，如用工程单位制（重力制）则

$$q(p_1-p)=Jq\gamma c(t-t_1)$$

式中　J——热功当量，$J=4.27\times10^4$kgf·cm/kcal；

　　　c——比热，液压油约为0.46kcal/kgf℃；

　　　γ——重度，液压油约为0.88×10^{-3}kgf/cm³。

则

$$t-t_1=\frac{p_1-p}{J\gamma c}=\phi(p_1-p)$$

式中系数

$$\phi=\frac{1}{4.27\times10^4\times0.46\times0.88\times10^{-3}}\approx\frac{5.8}{100}\text{℃/kgf/cm}^2$$

即压强每降落100kgf/cm²将造成5.8度的温升，代入粘度公式得

$$\mu=\mu_0e^{\alpha p-\lambda\phi(p_1-p)}=\mu_0e^{\alpha p}\cdot e^{(\alpha+\lambda\phi)(p-p_1)}$$

或

$$\mu=\mu_1e^{(p-p_1)/p_t}\tag{7-62}$$

式中$\mu_1=\mu_0e^{\alpha p_1}$，即$p=p_1$，$t=t_1$时油液的动力粘度，$\mu_0$为$p=0$，$t=t_1$时油液的动力粘度。而

$$p_t=\frac{1}{\alpha+\lambda\phi}\tag{7-63}$$

以20号机械油为例，$\alpha=\frac{1}{432}$，$\lambda=\frac{1}{23}$，则

$$p_t=\frac{1}{\frac{1}{432}+\frac{5.9}{100}\times\frac{1}{23}}\approx205\text{bar}$$

由上可知p_t仅与油液的性质（α，λ，c，ρ）有关，如果已选定了油液，则p_t也就固定了，所以p_t是一常数，而且它又具有压强的量纲，所以称为热效压强，对于一般液压用油的p_t值如表7-3所示。

表7-3 液压油的p_t值

	10号机械油	20号机械油	30号机械油	40号机械油	50号机械油	70号机械油	10号航空油	上稠20·1	上稠30·1	上稠50·1
α	$\frac{1}{432}$	$\frac{1}{432}$	$\frac{1}{432}$	$\frac{1}{432}$	$\frac{1}{432}$	$\frac{1}{432}$	$\frac{1}{432}$	$\frac{1}{432}$	$\frac{1}{432}$	$\frac{1}{432}$
ϕ	$\frac{5.9}{100}$	$\frac{5.9}{100}$	$\frac{5.9}{100}$	$\frac{5.9}{100}$	$\frac{5.9}{100}$	$\frac{5.9}{100}$	$\frac{6.1}{100}$	$\frac{5.9}{100}$	$\frac{5.9}{100}$	$\frac{5.9}{100}$
λ	$\frac{1}{28.5}$	$\frac{1}{23}$	$\frac{1}{23.4}$	$\frac{1}{22.6}$	$\frac{1}{20.4}$	$\frac{1}{20.1}$	$\frac{1}{58}$	$\frac{1}{32.8}$	$\frac{1}{33.0}$	$\frac{1}{32.0}$
p_t	228	205	207	203	192	190	297	243	244	240

由表7-3可见，上稠系列液压油的p_t约为243左右，20～40号机械油约为205左右，这就是说不考虑Couette流时，当压降为243 bar或205 bar左右时，粘度下降的比值为$e=2.71$。有了公式(7-63)就能比较方便地处理缝隙流动中变粘度的问题。

（2）同时考虑压差流及剪切流

如果壁面相对运动速度较高，那末摩擦损失所发生的热量也占有一定的比重，需要加以考虑，这里将对压差流(Poiseuille流)与剪切流(Couette流)互成正交的情况进行讨论。配流盘与缸体缝隙中流动正好就是这种情况。单位宽度缝隙内油液的能量平衡式为

$$-q\,dp+\frac{\mu U^2}{\delta}dx=\rho c q\,dt \tag{7-64}$$

对于平行面缝隙中单位宽度的泄漏量q为

$$q=-\frac{\delta^3}{12\mu}\frac{dp}{dx}$$

或

$$\mu=-\frac{\delta^3}{12q}\frac{dp}{dx}$$

代入(7-64)式得

$$-q\,dp-\frac{\delta^3}{12q}U^2\frac{dp}{dx}dx=\rho c q\,dt$$

或

$$\frac{dt}{dx}=-\frac{1}{\rho c}\frac{dp}{dx}\left(1+\frac{U^2\delta^2}{12q^2}\right)=-\phi\left(1+\frac{U^2\delta^2}{12q^2}\right)\frac{dp}{dx}$$

积分之，并代入边界条件：$x=0$时$p=p_1$，$t=t_1$，则

$$t-t_1=(p_1-p)\phi\left(1+\frac{1}{p_t\phi\lambda}\frac{A}{q^2}\right)=(p_1-p)k\phi \tag{7-65}$$

式中 $A=\phi\lambda p_t\left(\frac{U^2\delta^2}{12}\right)$

$$k=\left[1+\frac{A}{(\phi\lambda p_t)q^2}\right]$$

代入粘度公式(7-60)

$$\mu=\mu_0e^{\alpha p-\lambda(t-t_1)}=\mu_0e^{\alpha p_1}e^{(\alpha+\lambda\phi k)(p-p_1)}=\mu_1\exp[(\alpha+\lambda\phi k)(p-p_1)]$$

因为 $\alpha+\lambda\phi k=\alpha+\lambda\phi\left(1+\frac{A}{\lambda\phi p_tq^2}\right)=\alpha+\lambda\phi+\frac{A}{p_tq^2}=\frac{1+(A/q^2)}{p_t}$

代入上式得

$$\mu=\mu_1\exp\left[\frac{1+(A/q^2)}{p_t}(p-p_1)\right] \tag{7-66}$$

因为 $$\frac{dp}{dx}=-\frac{12\mu q}{\delta^3}=-\frac{12q\mu_1\exp\left[\frac{1+(A/q^2)}{p_t}(p-p_1)\right]}{\delta^3}$$

积分之得

$$\frac{1}{\mu_1\{[1+(A/q^2)]/p_t\}}\exp\left[-\left(1+\frac{A}{q^2}\right)\frac{(p-p_1)}{p_t}\right]=\frac{12q}{\delta^3}x+C$$

由边界条件：$x=0$ 时 $p=p_1$，得积分常数 C 为

$$C=\frac{1}{\mu_1\{[1+(A/q^2)]/p_t\}}$$

因此

$$\exp\left[-\left(1+\frac{A}{q^2}\right)\frac{p-p_1}{p_t}\right]=\frac{12\mu_1\left[\left(1+\frac{A}{q^2}\right)/p_t\right]qx}{\delta^3}+1$$

或 $$-\left(1+\frac{A}{q^2}\right)\frac{(p-p_1)}{p_t}=\ln\left[\frac{12\mu_1\left[\left(1+\frac{A}{q^2}\right)/p_t\right]qx}{\delta^3}+1\right] \tag{7-67}$$

当 $x=L$ 时，$p=0$ 则

$$\left(1+\frac{A}{q^2}\right)\frac{p_1}{p_t}=\ln\left[\frac{12\mu_1\left[\left(1+\frac{A}{q^2}\right)/p_t\right]qL}{\delta^3}+1\right] \tag{7-68}$$

(7-68)式减去(7-67)式并设 $\frac{12\mu_1 L}{p_t\delta^3}=B$ 则

$$\left(1+\frac{A}{q^2}\right)\frac{p}{p_t}=\ln\left[\frac{1+Bq\left(1+\frac{A}{q^2}\right)}{1+Bq\frac{x}{L}\left(1+\frac{A}{q^2}\right)}\right]$$

即 $$\bar{p}=\frac{p}{p_t}=\frac{1}{\left(1+\frac{A}{q^2}\right)}\ln\left[\frac{1+Bq\left(1+\frac{A}{q^2}\right)}{1+Bq\frac{x}{L}\left(1+\frac{A}{q^2}\right)}\right] \tag{7-69}$$

当 $x=0$ 时，$p=p_1$；则可求得进口压强与泄漏量 q 的关系

$$\bar{p}_1=\frac{p_1}{p_t}=\frac{\ln[1+Bq(1+A/q^2)]}{(1+A/q^2)} \tag{7-70}$$

压强分布的相对値 $p_r=p/p_1=\bar{p}/\bar{p}_1$ 为

$$p_r=1-\frac{\ln\left[1+Bq\frac{x}{L}(1+A/q^2)\right]}{\ln[1+Bq(1+A/q^2)]} \tag{7-71}$$

单位宽度内的泄漏量 q 可由(7-70)式求得，但这个公式比较复杂，求解很困难，我们采用图解的办法。首先设不考虑 Couette 流，即 $A=0$，则单宽泄漏量为 q_1，由(7-70)式得

$$\bar{p}_1 = \ln(1 + Bq_1)$$

由此得

$$q_1 = \frac{1}{B}(e^{\bar{p}_1} - 1) = \frac{\delta^3}{12\mu_1 L} p_i (e^{\bar{p}_1} - 1) \tag{7-72}$$

或

$$q_1 = \frac{\delta^3 p_1}{12\mu_0 L}\left[\frac{1}{\bar{p}_1 e^{\alpha p}}(e^{\bar{p}_1} - 1)\right] = q_0 \psi_b$$

式中 $q_0 = \dfrac{\delta^3 p_1}{12\mu_0 L}$为不考虑粘度变化时的泄漏量。

$\psi_b = \dfrac{1}{\bar{p}_1 e^{\alpha p}}(e^{\bar{p}_1} - 1)$为考虑粘度变化，但当$A = 0$时的流量修正系数。

设当$A \neq 0$时，单宽泄漏量$q = C_q q_1$ 则

$$q = C_q(e^{\bar{p}_1} - 1)/B = C_q \psi_b q_0$$
$$= C_q \frac{\delta^3 p_1}{12\mu_0 L}\left[\frac{1}{\bar{p}_1 e^{\alpha p_1}}(e^{\bar{p}_1} - 1)\right] \tag{7-73}$$

系数 C_q 与 $\bar{p}_1$ 及工作参数 AB^2 的关系如图 7-33 所示。图 7-34 则为不同 $\bar{p}_1$ 及 AB^2 值时的压强分布曲线。

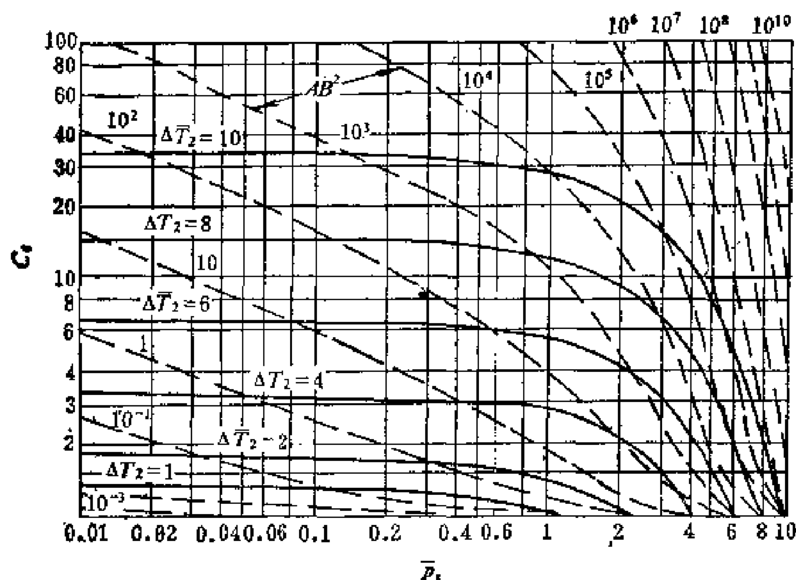


图7-33 流量与温升曲线

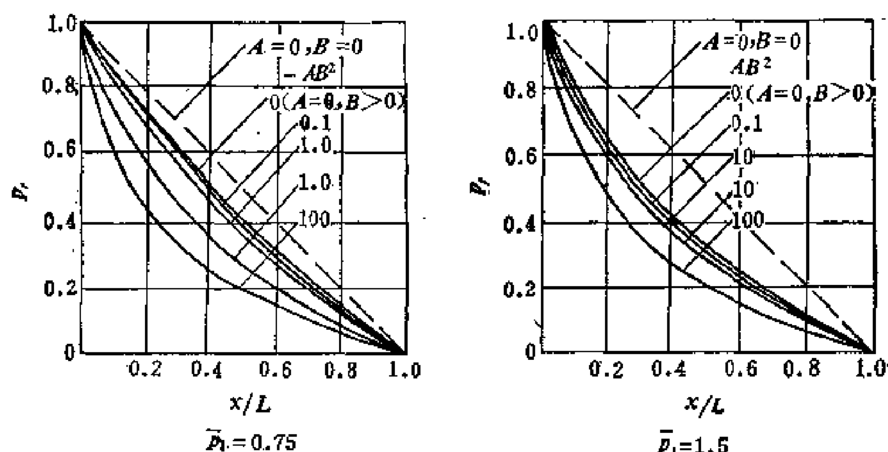


图7-34 压强分布

因为系数ϕ具有温度和压强倒数的量纲，所以ϕp_t就具有温度的量纲，将(7-65)式除以ϕp_t可得 温升 系数$\Delta\overline{T}$为

$$\Delta\overline{T}=\frac{t-t_1}{\phi p_t}=\overline{p}_1 k(1-p_r)$$

对一般液压油液 来 说，$\phi p_t=\dfrac{5.9}{100}\times 205\approx 12^{\circ}\mathrm{C}$， 即温度 系 数$\Delta\overline{T}=1$则实际上温升约为12°C。当压强完全降落时，即压强由p_1降至0($p_r=p/p_1=0$)，则总温升系 数$\Delta\overline{T}_2$为

$$\Delta\overline{T}_2=\Delta\overline{T}\bigg|_{p_r=0}=\frac{t_2-t_1}{\phi p_t}=\overline{p}_1 k \tag{7-74}$$

图 7-33 中作 出 了$\Delta\overline{T}_2$与$\overline{p}_1$的关系曲线。

求得了缝隙中的压强分布，则缝隙内的单宽液压反推力F_s为

$$F_s=\int_0^L p\,dx=\int_0^L p_1 p_r\,dx$$

$$=\int_0^L p_1\,dx-\int_0^L p_1\frac{\ln\left[1+Bq\dfrac{x}{L}\left(1+\dfrac{A}{q^2}\right)\right]}{\ln\left[1+Bq\left(1+\dfrac{A}{q^2}\right)\right]}dx$$

$$=p_1x-p_1\frac{\left[1+Bq\dfrac{x}{L}\left(1+\dfrac{A}{q^2}\right)\right]\ln\left[1+Bq\dfrac{x}{L}\left(1+\dfrac{A}{q^2}\right)\right]-\left[1+Bq\dfrac{x}{L}\left(1+\dfrac{A}{q^2}\right)\right]}{\dfrac{Bq}{L}\left(1+\dfrac{A}{q^2}\right)\ln\left[1+Bq\left(1+\dfrac{A}{q^2}\right)\right]}\Bigg|_0^L$$

$$=\left\{\frac{1}{\ln\left[1+Bq\left(1+\dfrac{A}{q^2}\right)\right]}-\frac{1}{Bq\left(1+\dfrac{A}{q^2}\right)}\right\}\frac{p_1L}{2} \tag{7-75}$$

当$A=0$时液压反推力为F_{s1}，泄漏量为q_1，则

$$F_{s1}=2\left[\frac{1}{\ln(1+Bq_1)}-\frac{1}{Bq_1}\right]\frac{p_1L}{2}$$

由(7-72)式可知$Bq_1=(e^{\overline{p}_1}-1)$，所以，

$$F_{s1}=\frac{p_1L}{2}\left[\frac{2}{\overline{p}_1}-\frac{2}{(e^{\overline{p}_1}-1)}\right]$$

$$=\frac{p_1L}{2}\left[\frac{2}{\overline{p}_1}\left(\frac{e^{\overline{p}_1}-\overline{p}_1-1}{e^{\overline{p}_1}-1}\right)\right]$$

$$=\frac{p_1L}{2}f(\overline{p}_1) \tag{7-76}$$

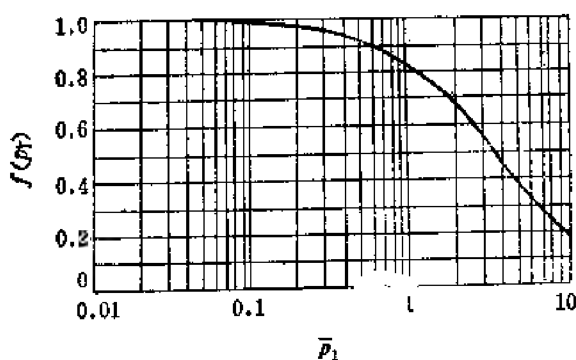


图7-35 $f(\overline{p}_1)$曲线

式中$\dfrac{p_1L}{2}$是粘度为常数，缝 隙 中 压 强 呈直线分布时的反推力。$f(\overline{p}_1)=\dfrac{2}{\overline{p}_1}\left(\dfrac{e^{\overline{p}_1}-\overline{p}_1-1}{e^{\overline{p}_1}-1}\right)$为$A=0$时考虑粘度变化的 修 正 系 数。$f(\overline{p}_1)$的值如图 7-35 所示。

设$A \neq 0$时反推力F_s与F_{s1}的比率为C_F，则

$$F_s = C_F F_{s1} = \frac{p_1 L}{2} C_F f(\bar{p}_1) \tag{7-77}$$

系数C_F随工作参数AB^2和进口压强$\bar{p}_1$而变，如图7-36所示。

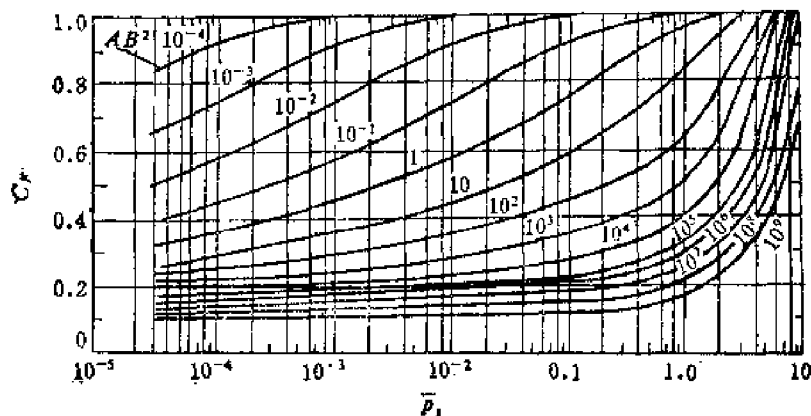


图7-36　C_F曲线

配流盘的密封边是很窄的，直径比一般在1.1左右，所以可以把平形圆盘问题简化成平行面缝隙问题，由于高压液机的配流盘密封边上压降较大，应考虑粘度变化，所以上述的计算方法可以用于高压和超高压液机的配流盘设计计算。

第八章　滑动轴承和往复运动密封

滑动轴承与往复运动密封，就它们的作用来讲是二个完全不同的范畴，但就其基本原理来讲，却有相同之处，它们都是以润滑理论为基础，不过前者作为正问题来解，即根据油膜厚度分布情况来解压强分布而求得承载能力，而后者恰好是一个逆问题，即根据压强分布来求油膜厚度，从而判断其泄漏和摩擦特性。

§8-1　润滑理论的基本概念

具有相对运动的机件，壁面如果直接接触，将引起一定的摩擦阻力而产生磨损和功率损失。如果在机件壁面间存在一层润滑剂，使壁面相互脱离直接接触，将大大改善工作条件，不仅减少功率损失，提高工作效率，而且也延长了工作寿命，这是润滑的作用。

润滑剂可以是固体（如石墨，二硫化钼）、液体或气体，这里讨论的是以液体润滑剂为对象。在机件壁面间的液体润滑剂薄层称为液膜，由于常用的液体润滑剂多数是油类，所以通常就称为油膜。油膜润滑的优点是机件壁面被油膜隔开，避免了机件的强烈磨损，摩擦阻力仅限于剪切油膜的力，因此功率损失减小，不会造成较大的温升。机件间形成油膜的条件与相对速度 v，润滑剂粘度 μ 及平均负载压强 p_{ave} 有关，v 和 μ 越大，p_{ave} 越小，越易于形成油膜，即在 $\frac{\mu v}{p_{ave}}>C$ 时（图 8-1）呈油膜润滑，这时的摩擦力纯粹为剪切油液所需的力，摩擦系数 f 可以低至 0.001 或以下[1]，当 $\frac{\mu v}{p_{ave}}<B$ 时，即负载较大而粘性力不足，油膜被挤破，但由于润滑剂或其他污染物（如灰尘，空气，湿度等）将吸附于金属表面，在壁面上形成一层只有几个分子厚度的保护薄膜，这时使两相对运动的壁面并不完全直接接触，可以避免剧烈的磨损，称为边界润滑区，在这个区域内的摩擦系数约为 0.08～0.14，在油膜润滑和边界润滑之间存在一个过渡区域，在这个区域中，部分油膜被挤破，因此是边界润滑和油膜润滑的混合状态，称为混合润滑，这时的摩擦系数约为 0.02～0.08。

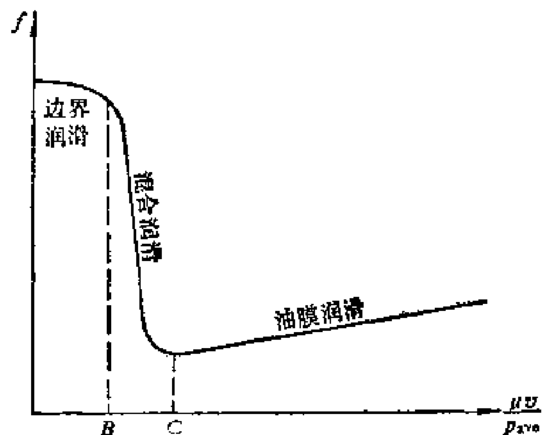


图8-1　润滑区域

机件间形成油膜，要求油膜具有一定的压强分布，也就是要求油膜有一定的承载能力，如果承载能力不足，油膜将被挤破而破坏油膜润滑。根据油膜压强建立的方式，润滑可分两类：

[1] Fuller D. D., Theory & Practice of Lubrication for Engineers, John Wiley, 1956 p. 236.

（1）流体动力润滑：油膜压强由机件相对运动而产生，油膜必需为楔形；

（2）静压润滑：由外界供给有压油液而维持一定厚度的油膜。

本章讨论流体动力润滑的原理。

相对速度为 v 的两运动壁面之间充满油液，形成油膜，由于油膜的尺寸相对于机件的其他尺寸是很小的，可以认为油液在 z 向没有运动，因此，在 z 向的压强分布为等值，即压强仅为 x、y 和 t 的函数。在油膜中取一微小体，微小体上各力如图 8-2 所示。

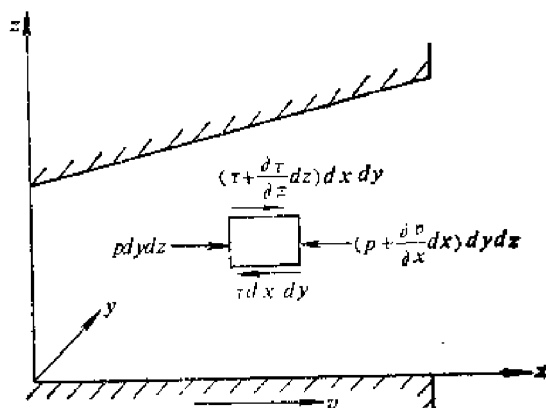


图8-2 微小体上的作用力

$\Sigma F_x = 0$ 则

$$pdydz-\left(p+\frac{\partial p}{\partial x}dx\right)dydz$$

$$=\tau dxdy-\left(\tau+\frac{\partial\tau}{\partial z}dz\right)dxdy$$

或
$$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial\tau}{\partial z}$$

因为
$$\tau=\mu\frac{\partial u_x}{\partial z}，\text{则}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\mu\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \tag{8-1}$$

同样，$\Sigma F_y = 0$ 可得

$$\frac{\partial p}{\partial y}=\mu\frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \tag{8-2}$$

（8-1）式及（8-2）式积分之，并以边界条件 $z=h, u_x=0, u_y=0$； $z=0, u_x=v, u_y=0$ 代入可得

$$u_x=\frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}z(z-h)+v\left(\frac{h-z}{h}\right) \tag{8-3}$$

及
$$u_y=\frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial y}z(z-h) \tag{8-4}$$

流量 q_x 及 q_y 各为

$$q_x=dy\int_0^h u_x dz=\left(-\frac{h^3}{12\mu}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{vh}{2}\right)dy \tag{8-5}$$

上式中等号右边括号内第一项是压差产生的流量，称 Poiseuille 项， 第二项是剪切速度引起的流量称为 Couette 项。

$$q_y=dx\int_0^h u_y dz=\left(-\frac{h^3}{12\mu}\frac{\partial p}{\partial y}\right)dx \tag{8-6}$$

在两壁面间取 dx 长 dy 宽的一段油膜，在 dt 时间内流入该段的油液体积为 $(q_x+q_y)dt$，流出该段的油液体积为 $\left(q_x+\frac{\partial q_x}{\partial x}dx+q_y+\frac{\partial q_y}{\partial y}dy\right)dt$，则流出与流入的差，即为在 dt 时间内

原体积的改变（图 8-3），即

$$\left(q_x+\frac{\partial q_x}{\partial x}dx+q_y+\frac{\partial q_y}{\partial y}dy\right)dt-(q_x+q_y)\,dt=-\frac{\partial h}{\partial t}dxdydt$$

式中等号后的负号表示：如果流出大于流入，则油膜减薄，即 t 增加 h 减小，或$\frac{\partial h}{\partial t}$本身为负值，整理之

$$\frac{\partial q_x}{\partial x}dx+\frac{\partial q_y}{\partial y}dy+\frac{\partial h}{\partial t}dxdy=0 \qquad (8\text{-}7)$$

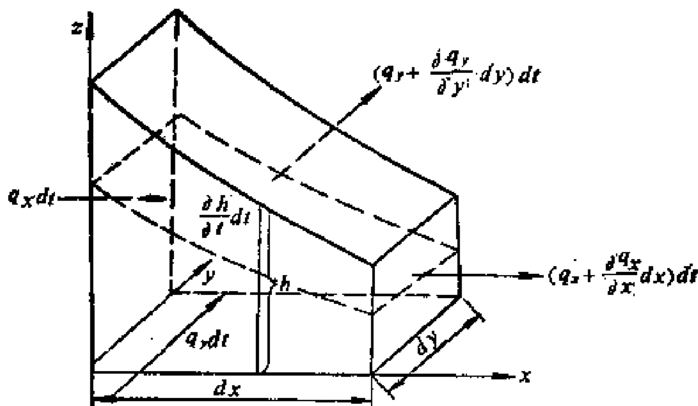


图8-3　流量平衡

由（8-5）式得

$$\frac{\partial q_x}{\partial x}=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^3}{12\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\right)dy+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{vh}{2}\right)dy$$

由（8-6）式得

$$\frac{\partial q_y}{\partial y}=-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{h^3}{12\mu}\frac{\partial p}{\partial y}\right)dx$$

代入（8-7）式得

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial y}\right)=6\mu v\frac{\partial h}{\partial x}+12\mu\frac{\partial h}{\partial t} \qquad (8\text{-}8)$$

这是润滑理论的基本方程，称为雷诺方程，它概括了滑动轴承和往复运动密封内油液运动的规律。雷诺方程的普遍解目前还有困难，因此，要针对具体情况加以简化，例如假设 y 向尺寸很大，油液无 y 向运动，即无侧向流动，也就是压强在 y 向保持为常数，即$\frac{\partial p}{\partial y}=0$，则（8-8）式可简化为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial x}\right)=6\mu v\frac{\partial h}{\partial x}+12\mu\frac{\partial h}{\partial t}$$

如果再假设运动是恒定的，即$\frac{\partial h}{\partial t}=0$，则上式再可简化为

$$\frac{d}{dx}\left(h^3\frac{dp}{dx}\right)=6\mu v\frac{dh}{dx} \qquad (8\text{-}9)$$

实际上轴承两端的环境压强小于轴承内油膜的压强，因此油液将具有侧向（y 向）的运动，油膜压强在 y 向并不是常量，而是向两端降落，所以油膜的实际承载能力要比无侧向泄漏的理论计算所得结果为低。如果轴承负载稳定，则油膜也稳定，运动是恒定的，即$\frac{\partial h}{\partial t}=0$，如果负载变化，则$\frac{\partial h}{\partial t}\neq 0$，将产生油膜挤压作用（关于油膜挤压的问题，在第九章中有所论述）。我们现在讨论$\frac{\partial p}{\partial y}=0$及$\frac{\partial h}{\partial t}=0$的理想情况。（8-9）式积分之得

$$h^3 \frac{dp}{dx} = 6\mu v h + C$$

设在 $x = x_0$ 处油膜压强为最大， 即 $h = h_0$ 时 $\frac{dp}{dx} = 0$，则积分常数 $C = -6\mu v h_0$，代入上式得

$$\frac{dp}{dx} = 6\mu v \frac{h - h_0}{h^3} \tag{8-10}$$

（8-10）式积分后即可求得油膜内压强分布，积分时必须知道 x 与 h 的关系，不同的轴承结构（平面推力轴承与向心轴承）x 与 h 的关系是不同的，所以积分时要区别对待。求得压强分布后即可求得油膜承载能力 F。图 8-4 所示为不同的 $x-h$ 图形。a）为向心轴承，b）

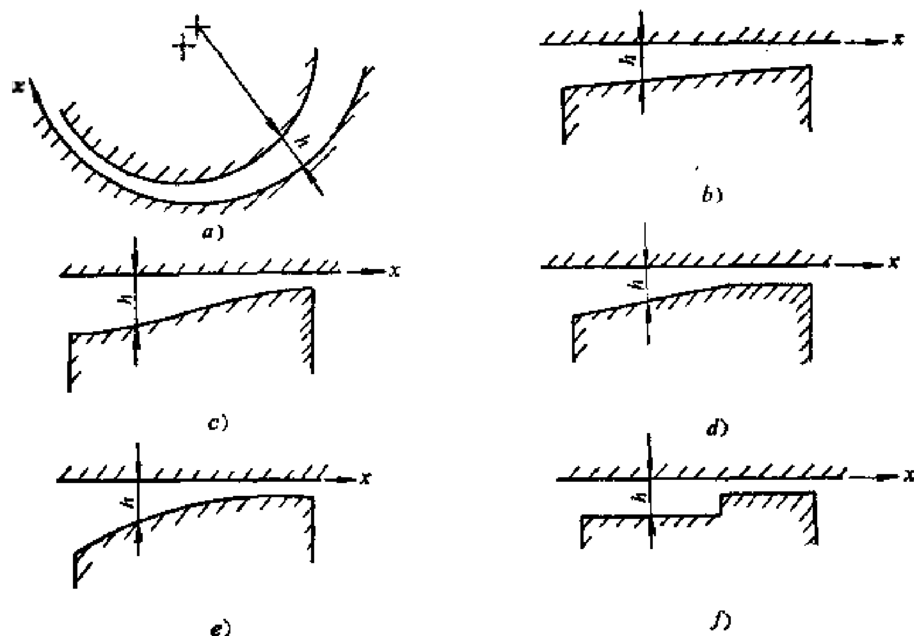


图8-4 各种轴承的 $x-h$ 图形

为典型的平面推力轴承，这两种轴承将在后面较详细地讨论。c）至 f）的形式 H. F. P. Purday[1] 曾加以研究，其中 f）曾由 Rayleigh[2] 指出，其承载能力为各种形式中最大者，在 50 年代 F. R. Archibald 曾成功地将 Rayleigh 的设想应用于推力轴承和向心轴承[3][4]。

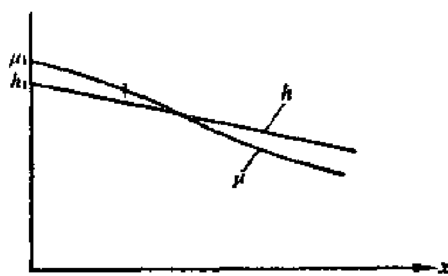


图8-5 粘度变化

轴承工作时，即使是油膜润滑，剪切油膜也要消耗能量而发热，因此润滑剂的粘度 μ 是个变数，实验指出，轴承内的油膜温度随着油膜厚度 h 的减小而减小。根据 Freudenreich[5][6] 的分析，油膜的粘度 μ 的变化与油膜厚度 h 的变化极为相似，如图 8-5 所示。如果 μ_1 为 $h = h_1$ 时的粘度则

[1] Purday H. F. P., An Introduction to Mechanics of Viscous Flow, Dover New York 1949.
[2] Lord Rayleigh, Notes on the Theory of Lubrication, Phil. Mag. 35, 1～12, 1918.
[3] Archibald F. R., A Simple Hydrodynamic Thrust Bearing, Trans. ASME 72, 393～400, 1950.
[4] Archibald F. R., The Stepped Shape Film Applied to a Journal Bearing, J. Franklin Inst. 253, 21～27, 1952.
[5] Auerbach F. & Hort W., Handbuch der Physikalisschen and Technischen Mechanik, Leipzig, J. A. Barth 1927～1931.
[6] Tipei N., Theory of Lubrication, Stanford University press 1962 pp. 39～40.

$$\mu = \mu_1\left(\frac{h}{h_1}\right)^m \tag{8-11}$$

润滑剂的m值一般在0.5至1之间。

*§8-2 推力轴承

承受轴向负载的轴承称为推力轴承，一般是由固紧在转轴上的平面颈圈（转子）与具有扇形推力块的环状轴承座组成。颈圈与推力块间呈楔形，当主轴旋转时，油膜厚度向运动方向呈线性减小。下面我们对这种轴承进行理论分析：

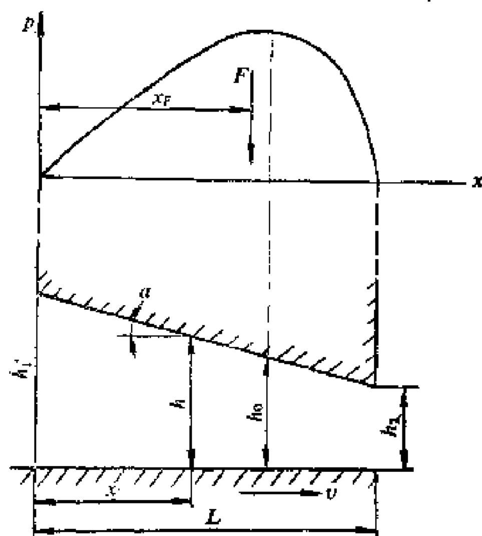


图8-6 推力轴承压强分布

1. 压强分布

推力块长L与速度为v的运动平面成α角（α角是小量），在x处的油膜厚度h为

$$h = h_1 - x\alpha = h_1 - \frac{x}{L}(h_1 - h_2)$$

采用无因次数$\frac{x}{L} = l$，$\frac{h_1}{h_2} = k$，则

$$h = h_2[k + (1-k)l] \tag{8-12}$$

代入（10-10）式，并设$m = 0$，则

$$\frac{dp}{dl} = \frac{6\mu vL}{h_2^2}\left\{\frac{1}{[k+(1-k)l]^2} - \frac{h_0}{h_2[k+(1-k)l]^3}\right\}$$

积分之得

$$p = \frac{6\mu vL}{h_2^2}\left\{-\frac{1}{(1-k)[k+(1-k)l]} + \frac{h_0}{2h_2(1-k)[k+(1-k)l]^2}\right\} + C$$

边界条件为$l = 0$及$l = 1$时$p = p_a$，这里p_a为环境压强，由此

$$p_a = \frac{6\mu Lv}{h_2^2}\left[-\frac{1}{(1-k)k} + \frac{h_0}{2h_2(1-k)k^2}\right] + C$$

及

$$p_a = \frac{6\mu Lv}{h_2^2}\left[-\frac{1}{(1-k)} + \frac{h_0}{2h_2(1-k)}\right] + C$$

两式相减得

$$-\frac{1}{(1-k)k} + \frac{1}{(1-k)} + \frac{h_0}{2h_2(1-k)k^2} - \frac{h_0}{2h_2(1-k)} = 0$$

解方程得

$$h_0 = \left(\frac{2k}{1+k}\right)h_2 \tag{8-13}$$

代入上式得积分常数C为

$$C = p_a + \frac{6\mu Lv}{h_2^2}\left[\frac{1}{(1-k)k} - \frac{1}{(1-k)k(1+k)}\right]$$

$$= p_a + \frac{6\mu Lv}{h_2^2}\left[\frac{1}{(1-k)(1+k)}\right]$$

将C及h_0代入原式得油膜压强分布为

$$p - p_a = \frac{6\mu v L}{h_2^2}\left\{\frac{(k-1)(1-l)l}{(k+1)[k+(1-k)l]^2}\right\} = \beta\frac{\mu v L}{h_2^2} \tag{8-14}$$

式中无量纲数$\beta = \frac{6(k-1)(1-l)l}{(k+1)[k+(1-k)l]^2}$称为压强函数。在进口与出口处，即$l=0$，$l=1$处$\beta=0$。当$k=1$时，$\beta$也等于零，这就是说当推力块与运动平面平行时，不能建立油膜压强。压强函数β与l及k的关系见图 8-7。

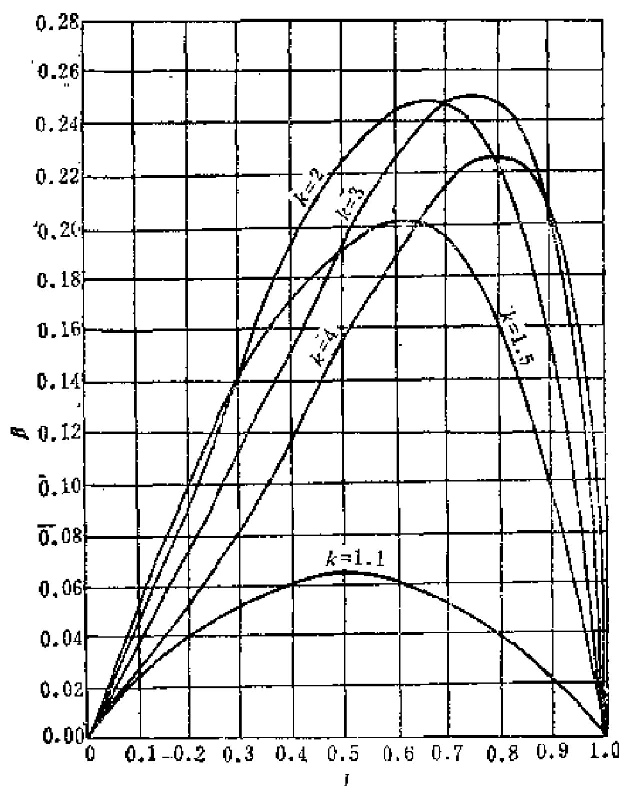


图8-7 压强函数β

最大压强在$x = x_0$处，即$l = l_0$处。由（8-12）式得$h_0 = h_2[k+(1-k)l_0]$，代入(8-13) 式得

$$l_0 = \frac{k}{k+1}$$

代入（8-14）式得

$$p_{max} - p_a = \frac{\mu v L}{h_2^2}\left[\frac{3(k-1)}{2k(k+1)}\right]$$

2. 承载能力和压强中心

推力块上单位宽度所能承受的负载F_L为

$$\begin{aligned} F_L &= \int_0^L (p - p_a)dx \\ &= \frac{\mu v L^2}{h_2^2}\int_0^l \beta dl \\ &= \frac{\mu v L^2}{h_2^2}c_L \end{aligned} \tag{8-15}$$

式中负载函数$c_L = \int_0^l \beta dl$等于图 8-7 曲线下的面积，该面积的大小随k值而定

$$c_L = \frac{F_L h_2^2}{\mu v L} = \int_0^l \beta dl = \frac{6}{(k+1)(k-1)^2}[(k+1)\ln k - 2(k-1)] \tag{8-16}$$

k与c_L的关系如表 8-1 所示。

表 8-1

k	1.6	1.7	1.8	1.9	2	2.2	2.4	2.5	3
c_L	0.1410	0.1482	0.153	0.1566	0.159	0.1602	0.1590	0.1578	0.1476

F_L的集中作用点称为压强中心，设x_F为压强中心与推力块前缘的距离（图 8-6），对推力块前缘取力矩得

$$F_L x_F = \int_0^L (p - p_a)x dx$$

则

$$x_F = \frac{\int_0^L (p-p_a)x dx}{F_L} = L\frac{\int_0^l \beta l dl}{\int_0^l \beta dl} = L\frac{c_M}{c_L} = Lc_{pc} \tag{8-17}$$

式中系数 c_{pc} 为

$$c_{pc}=\frac{1}{2(k-1)}\left[\frac{2k(k+2)\ln k-(1+5k)(k-1)}{(k+1)\ln k-2(k-1)}\right] \tag{8-18}$$

k 与 c_{pc} 的关系如表 8-2 所示

表8-2　k与c_{pc}的关系

k	1	2	2.4	3	4
c_{pc}	0.5	0.566	0.586	0.61	0.635

3. 摩擦阻力

油膜内的剪切应力 τ 为

$$\tau=\mu\frac{du}{dz}$$

因为 $u=\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}z(z-h)+v\left(\frac{h-z}{h}\right)$ 及 $\frac{dp}{dx}=6\mu v\frac{h-h_0}{h^3}$，代入上式得剪切应力为

$$\tau=\mu v\left[3(2z-h)\frac{h-h_0}{h^3}-\frac{1}{h}\right]$$

在运动平板处 $z=0$，剪切应力为 τ_0

$$\tau_0=\mu v\left[\frac{3h_0}{h^2}-\frac{4}{h}\right]$$

在推力块处 $z=h$，剪切应力为 τ_h

$$\tau_h=\mu v\left[\frac{2}{h}-\frac{3h_0}{h^2}\right]$$

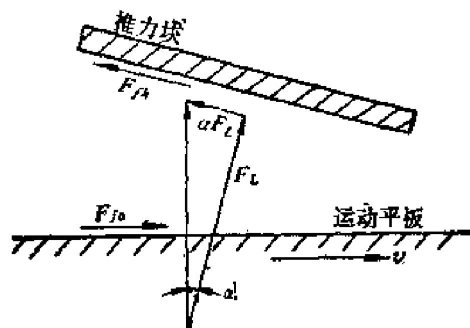


图8-8　摩擦阻力

以 (8-12) 式代入 τ_0 及 τ_h，并对 x 积分可得运动平板和推力块上单位宽度的摩擦阻力各为

$$F_{f0}=\int_0^L\tau_0dx=L\int_0^l\tau_0dl$$

$$=\frac{2\mu vL}{(k-1)h_2}\left[2\ln k-\frac{3(k-1)}{k+1}\right] \tag{8-19}$$

$$F_{fh}=\int_0^L\tau_hdx=L\int_0^l\tau_hdl=\frac{2\mu vL}{(k-1)h_2}\left[\frac{3(k-1)}{k+1}-\ln k\right] \tag{8-20}$$

由上可见，推力块及运动平板上的摩擦力是不等的，这是由于油膜压强产生的力垂直作用于推力块，负载在推力块上产生切向力 αF_L，我们将发现

$$F_{f0}-F_{fh}=\frac{6\mu vL}{(1+k)(k-1)h_2}[(1+k)\ln k-2(k-1)]=\alpha F_L$$

轴承摩擦系数 f 为运动平板摩擦力 F_{f0} 与负载 F_L 之比

$$f_0=\frac{F_{f0}}{F_L}=\frac{(k-1)h_2}{3L}\left[\frac{2(k+1)\ln k-3(k-1)}{(k+1)\ln k-2(k-1)}\right]$$

或 $$c_f=\frac{f_0L}{h_2}=\frac{(k-1)}{3}\left[\frac{2(k+1)\ln k-3(k-1)}{(k+1)\ln k-2(k-1)}\right] \tag{8-21}$$

c_f 的最小值在 $k=2.55$，在变粘度 $m=1$ 时 c_f 基本上不变。

由于略去了侧向流动，即侧向没有泄漏，单位宽度内润滑剂流量 $Q=\int_0^h udz$，在 $x=x_0$ 时 $\frac{dp}{dx}=0$，所以 $u=\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}z(z-h)+v\left(\frac{h-z}{h}\right)=v\left(\frac{h-z}{h}\right)$，则

$$Q=\frac{v}{h_0}\int_0^{h_0}(h_0-z)dz=\frac{vh_0}{2}$$

因为 $h_0=\left(\frac{2k}{1+k}\right)h_2$，所以润滑剂流量 Q 为

$$Q=\left(\frac{kv}{1+k}\right)h_2 \tag{8-22}$$

或流量系数 $$c_Q=\frac{Q}{vh_2}=\left(\frac{k}{1+k}\right) \tag{8-23}$$

4．温升

润滑剂的被剪切将使油膜内产生热量，如果认为在工作时与外界无热量交换，摩擦力所作的功率使润滑剂产生温升 ΔT，则

$$F_{f0}v=Q\rho c\Delta T$$

式中 c 为润滑剂比热，J/kg·K；ρ 为密度，kg/m³，将（8-19）及（8-22）式代入得温升 ΔT 为

$$\Delta T=\frac{2\mu vL}{\rho c(k-1)h_2^2}\left[\frac{2(k+1)\ln k-3(k-1)}{k}\right]$$

或 $$c_T=\frac{\Delta T\rho ch_2^2}{\mu vL}=\frac{2}{k(k-1)}[2(k+1)\ln k-3(k-1)] \tag{8-24}$$

将（8-16），（8-21）及（8-24）式画成曲线如图 8-9 所示。由图可见，在一定的粘度、滑动速度和推力块尺寸下，当油膜厚度比 k 在 2.4 左右将具有最大承载能力，或最小的摩擦阻力，或者在确定的负载下具有最大的油膜厚度。因此，设计推力轴承时，k 值应控制在1.8～3.5 范围。最小油膜厚度 h_2 应根据推力块和运动平板的表面质量和

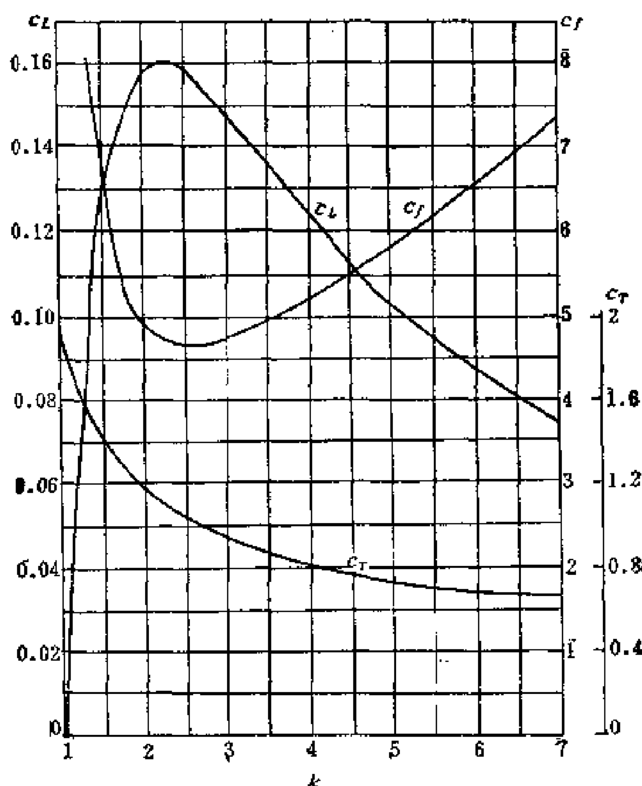


图8-9 c_L、c_f及c_T与 k 的关系

润滑剂滤清程度来决定。通常 h_2 可取为 0.02 毫米左右。确定 h_2 和 k 值后就可求出推力块的倾角 $\alpha = \frac{h_2(k-1)}{L}$。

推力轴承由几块推力块组成，为了使负载平均分布在各推力块上，要求各推力块上的油膜厚度尽可能一致，否则将造成某一推力块上局部温升增高而烧毁，这对推力块的加工工艺提出了一定的要求。

5. 活动推力块

推力块可固定地装在轴承座上，也可做成活动地支承于轴承座上，对于固定推力块的轴承来说，负载改变就改变了油膜厚度，而使 k 值变化，这样就要偏离轴承的最佳工况。对于活动支承的推力块，只要将支承点符合压强中心，即支承点离前缘（进油边）为 $x_F = c_p L$，则推力块就可以自动调节，使它的油膜厚度比 k 为定值，例如 $c_p = 0.56$ 时，k 一定在 2 左右，这种轴承可以使变载情况下轴承都在设计工况左右工作，因此，大型推力轴承都采用活动支承的型式。必须指出，有些轴承为了要适于正反双向转动，支承点只能放在中心，即 $c_p = 0.5$。从理论上讲，这时没有楔形油膜，轴承不能承受载荷，但实际上可能由于推力块的弯曲变形，轴承还是能很好工作的。

6. 侧向泄漏的修正

实际的轴承，推力块宽度有限，它的两端为环境压强，必然产生侧向泄漏，而使油膜压强呈抛物体分布，因此轴承的承载能力将有所减小，可用系数 η 来修正，即

$$F_L = \frac{\mu v L^2}{h_2^2} c_L \eta \tag{8-25}$$

η 的理论计算还有一定的困难，目前是根据 A. Kinsbury 及 S. J. Needs[1][2] 用电比拟法求得的实验值，当 $k = 2$ 时 η 值如表 8-3，当 k 为其它值时 η 变化极小。

表 8-3

L/B	1/3	1/2	2/3	1	$1\,^1/_3$	2	4	$5\,^3/_4$	∞
η	0.09	0.185	0.278	0.440	0.550	0.680	0.835	0.920	1.00

由于摩擦阻力与油膜速度梯度有关，而压强梯度只部分地影响流速，所以侧向泄漏对摩擦阻力影响较小

7. 其它

如果推力块做成如图 8-10 所示形状，无侧向泄漏时轴承单宽承载能力为[3]

$$F_L = \frac{6\mu v L^2}{h_2^2}\left[\frac{\lambda^2 \ln k}{(k-1)^2} - \frac{2\lambda^2}{(k^2-1)} + \frac{(k-1)\lambda(1-\lambda)}{2(1-\lambda)k^2 + \lambda(k+1)}\right]\left[\frac{\lambda}{(k+1)} + \frac{1-\lambda}{2}\right]$$

$$= \frac{\mu v L^2}{h_2^2} c_L \tag{8-26}$$

---

[1] Kinsbury A., On Problems in Theory of Fluid-film Lubrication With an Experimental Method of Solution, Trans. ASME, APM-53-5 1931。

[2] Needs, S. J., Effect of Side Leakage in 120-Degree Centrally Supported Journal Bearings Trans ASME 56 APM-56-16 1934 & 57, 135~138, 1935。

[3] 森美郎，润滑と轴受，油压工学ハンドブック，朝仓书店，1972 p. 123。

当 $k=2.25$，$\lambda=0.8$ 时，c_L 有最大值达 0.1925 而且在 $\lambda=0.7\sim0.9$，$k=2\sim2.3$ 范围内 $c_L>0.186$。

梯阶状轴承在无侧向泄漏时，单宽承载能力为

$$F_L=\frac{3\mu v L^2}{h_2^2}\frac{(1-\lambda)\lambda(k-1)}{(1-\lambda)k^3+\lambda}=\frac{\mu v L^2}{h_2^2}c_L \tag{8-27}$$

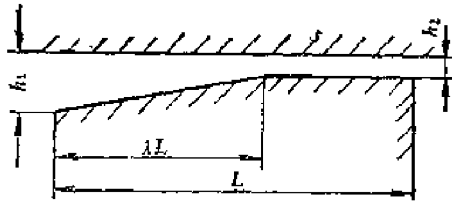


图 8-10

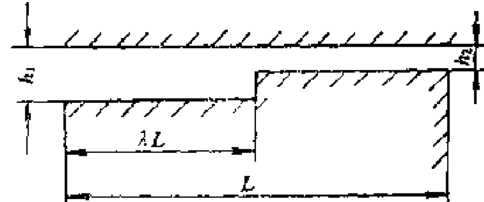


图 8-11

当 $k=1.87$，$\lambda=0.731$ 时 c_L 有最大值，可达 0.205，这种轴承加工较简单，承载能力也高，但研究得还不够充分。

*§8-3 向心滑动轴承

向心滑动轴承与平面推力轴承不同，最大的差别是润滑油膜腔的形状，推力轴承的油膜腔呈收缩形，没有扩散段，边界条件十分明确，进油处和出油处均为环境压强。向心滑动轴承的润滑油膜腔的径向厚度 h 是 θ 角的连续函数，它有收缩段，也有扩散段，而且是首尾相连。在收缩段中可形成油膜压强，压强分布有一定的规律，但扩散段中情况极为复杂，使我们在确定边界条件时带来了一定的困难。

1. 边界条件

边界条件是数学模型与实际情况的结合点，不合理的边界条件，不可能获得正确的理论结果。由于向心滑动轴承油膜腔形状的复杂性，确定合理的边界条件颇不容易，往往需要作出一定的假设，现将几种假设简介如下：

（1）Sommerfeld 边界条件：油膜腔内充满润滑油液，油膜是连续的，油膜压强是转角 θ 的一个连续周期函数，即

$$p(0)=p(2\pi)$$

这个假设与实际情况相差较大，因为在扩散段中要产生负压，必然有空气混入，因此油膜连续是不可能的。

（2）油膜不连续，油膜压强与油膜厚度 h 成反比，在 M_2 处（图 8-12）油膜厚度最

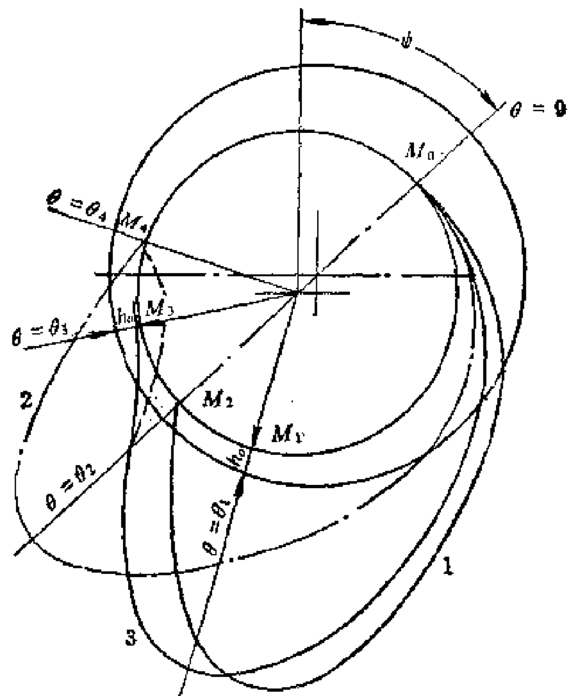


图8-12 不同边界条件时的压强分布

小，因此压强为最大，如图 8-12 中曲线 2 所示，即 $\theta=\theta_2$ 时 $\frac{\partial p}{\partial\theta}=0$，$\theta=0$ 及 $\theta=\theta_4$ 时 $p=p_a$。实测证明这种假设并不符合实际。

（3）油膜不连续，但油膜压强连续分布[1][2]，并设 $\frac{dp}{d\theta}=0$ 时 $h=h_0$，即最大压强时（M_2 点）和最小压强时（M_3 点）的 h 均等于 h_0，也就是说 M_2 与 M_3 对称地位于偏心连线的两边。由于汽穴和空气混入，负的油膜压强（图 8-12 中曲线 3 的虚线部分）是不现实的，所以认为 M_3 点的压强只能是环境压强 p_a，但仍保持 $\frac{dp}{d\theta}=0$，即边界条件为[3]

$$\left.\begin{aligned}&\theta=0,\quad p=p_a\\&\theta=\theta_3,\quad p=p_a\quad 且\ \frac{dp}{d\theta}=0\\&\theta_3\leqslant\theta<2\pi,\quad p=p_a,\ \frac{dp}{d\theta}=0\end{aligned}\right\}\tag{8-28}$$

这个边界条件称为雷诺边界条件，与实际比较接近，但计算比较复杂，M_3 点的确定要用逐步逼近法，用电子计算机算得一系列曲线以供设计向心轴承之用，可参阅有关轴承设计的手册资料。

（4）认为油膜不连续，压强分布也不连续，即当 $\theta=0$（M_0 点）及 $\theta=\theta_2$（M_2 点）时 $p=p_a$，$\theta_2<\theta<2\pi$ 时 $p=p_a$，$\frac{dp}{d\theta}=0$，这种假设称为 Gümbel 边界条件[4]，虽然与客观实际尚有差异，但却十分便于处理问题，因此理论计算时常采用这个边界条件。

2. 全周向心轴承压强分布和承载能力

轴颈半径为 R，轴承体（轴瓦）内半径为 R'，轴承半径间隙 $c=R'-R$，偏心距 $O_1O=e=c\varepsilon$，式中 ε 为偏心率（图 8-13），由于偏心距 e 与 R 及 R' 比较起来是很小的，所以如果作 O_2N 垂直于 O_1P，则 $NP\approx O_2P=R'$，由此可得

$$\begin{aligned}h&=O_1P-O_1M=NP+O_1N-O_1M=R'+e\cos\theta-R\\&=c+e\cos\theta=c(1+\varepsilon\cos\theta)\end{aligned}\tag{8-29}$$

因为 $x=R\theta$，$dx=Rd\theta$，考虑到粘度变化以 $\mu=\mu_1\left(\frac{h}{h_1}\right)^m$ 代入（8-10）式得

$$\frac{dp}{d\theta}=\frac{6\mu_1vR}{(1+\varepsilon)^m c^2}\left[\frac{1}{(1+\varepsilon\cos\theta)^{2-m}}-\frac{h_0}{c}\frac{1}{(1+\varepsilon\cos\theta)^{3-m}}\right]$$

积分之可求得油膜压强分布，但这个积分比较困难，引入 Sommerfeld 代换式 $1+\varepsilon\cos\theta=\frac{1-\varepsilon^2}{1-\varepsilon\cos\phi}$，然后将被积函数展成级数并代入 Gümbel 边界条件求得压强分布为

$$\left.\begin{aligned}&当\ m=0\ 时,\quad p=p_a+\frac{12\mu_1vR\varepsilon}{c^2(2+\varepsilon^2)}\frac{\sin\theta+\varepsilon/4\sin2\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2}\\&当\ m=1\ 时,\quad p=p_a+\frac{6\mu_1vR\varepsilon}{c^2(1+\varepsilon)}\frac{\sin\theta}{1+\varepsilon\cos\theta}\end{aligned}\right\}\tag{8-30}$$

---

[1] Vogelpohl G., Beiträge zur Kenntnis der Gleitlagerreibung Z. VDI.
[2] Turnbull D. E., Fluid Power Engineering, Newnes-Butterworth 1976, p. 50.
[3] Tipei N, Theory of Lubrication, Stanford University Press, 1962, p. 87.
[4] Gümbel L & Everling E, Reibung und Schmierung in Maschinenbau M. Krayn 1925.

轴承的单宽承载能力 F_L 由下列积分求得

$$F_L\cos\psi = \int_0^{\pi} p\cos\theta R d\theta$$

$$F_L\sin\psi = \int_0^{\pi} p\sin\theta R d\theta$$

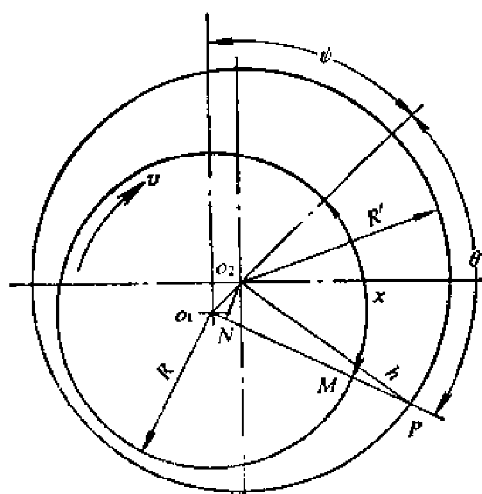


图8-13　全周轴承

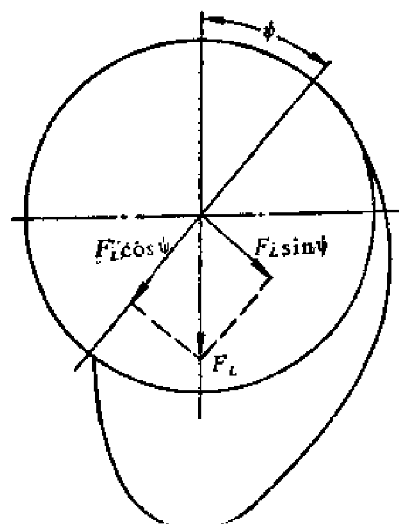


图　8-14

同样，经过变换后积分，可求得

$$F_L = \frac{\mu v R^2}{c^2}\zeta_L \tag{8-31}$$

以 $p_{ave} = \frac{F_L}{2R}$ 及 $v = 2\pi R n$ 代入得

$$S = \frac{\mu n}{p_{ave}}\left(\frac{R}{c}\right)^2 = \frac{1}{\pi\zeta_L} \tag{8-32}$$

式中　$S = \frac{\mu n}{p_{ave}}\left(\frac{R}{c}\right)^2$ 称为 Sommerfeld 数，是轴承的一个重要准数。不同边界条件下的偏心率 ε 与 S 的关系如图 8-15 所示。

承载系数 ζ_L 为：当 $m = 0$ 时

$$\zeta_L = \frac{6\varepsilon[\pi^2-(\pi^2-4)\varepsilon^2]^{\frac{1}{2}}}{(1-\varepsilon^2)(2+\varepsilon^2)} \tag{8-33 a}$$

当 $m = 1$ 时，

$$\zeta_L = \frac{6\left[\left(\frac{1}{\varepsilon}\ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}-2\right)^2+\frac{\pi^2}{\varepsilon^2}(1-\sqrt{1-\varepsilon^2})^2\right]^{\frac{1}{2}}}{1+\varepsilon} \tag{8-33 b}$$

偏心角 ψ 为：

当 $m = 0$ 时，$\mathrm{tg}\,\psi = \frac{\pi(1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}}{2\varepsilon}$

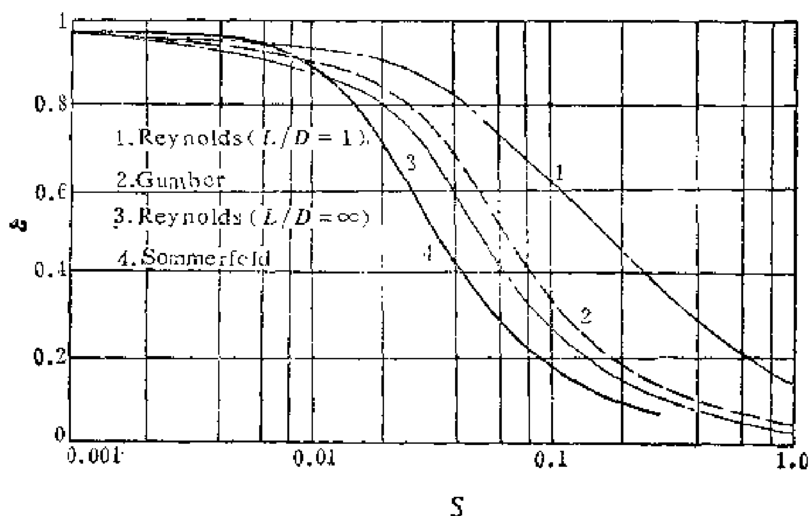


图8-15　不同边界条件下S与ε的关系

当$m=1$时，

$$\operatorname{tg}\psi=\frac{\pi\left(1-\sqrt{1-\varepsilon^2}\right)}{\ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}-2\varepsilon}$$

3. 全周向心轴承的摩擦力矩

在轴颈上的剪切应力为

$$\tau_0=\mu\left|\frac{du}{dz}\right|_{z=0}$$

油膜内流速分布为

$$u=\frac{1}{2\mu R}\frac{dp}{d\theta}z(z-h)+\frac{v}{h}(h-z)$$

所以

$$\tau_0=-\left(\frac{h}{2R}\frac{dp}{d\theta}+\frac{\mu v}{h}\right)$$

从$\theta=0$到θ_2（或θ_4）（图8-12）油膜是连续的，但从θ大于θ_2（或θ_4）至2π处发生汽穴和空气混入（图8-16），压强梯度为零，即$\frac{dp}{d\theta}=0$。在该段内的单宽流量$Q=\frac{vh_2}{2}$ ＝常数（或$Q=\frac{vh_0}{2}$＝常数）。但在该段内油膜腔厚度逐渐增大，润滑油必将为混入空气和汽穴所割裂，实际上宽度是减小了，用当量宽度表示为

$$b'=b\frac{h_2}{h}$$

因此单宽摩擦力矩为

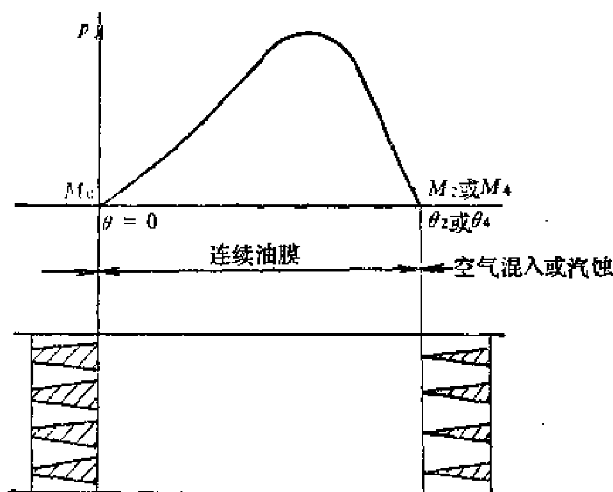


图8-16　空气混入或汽蚀时油膜被割裂

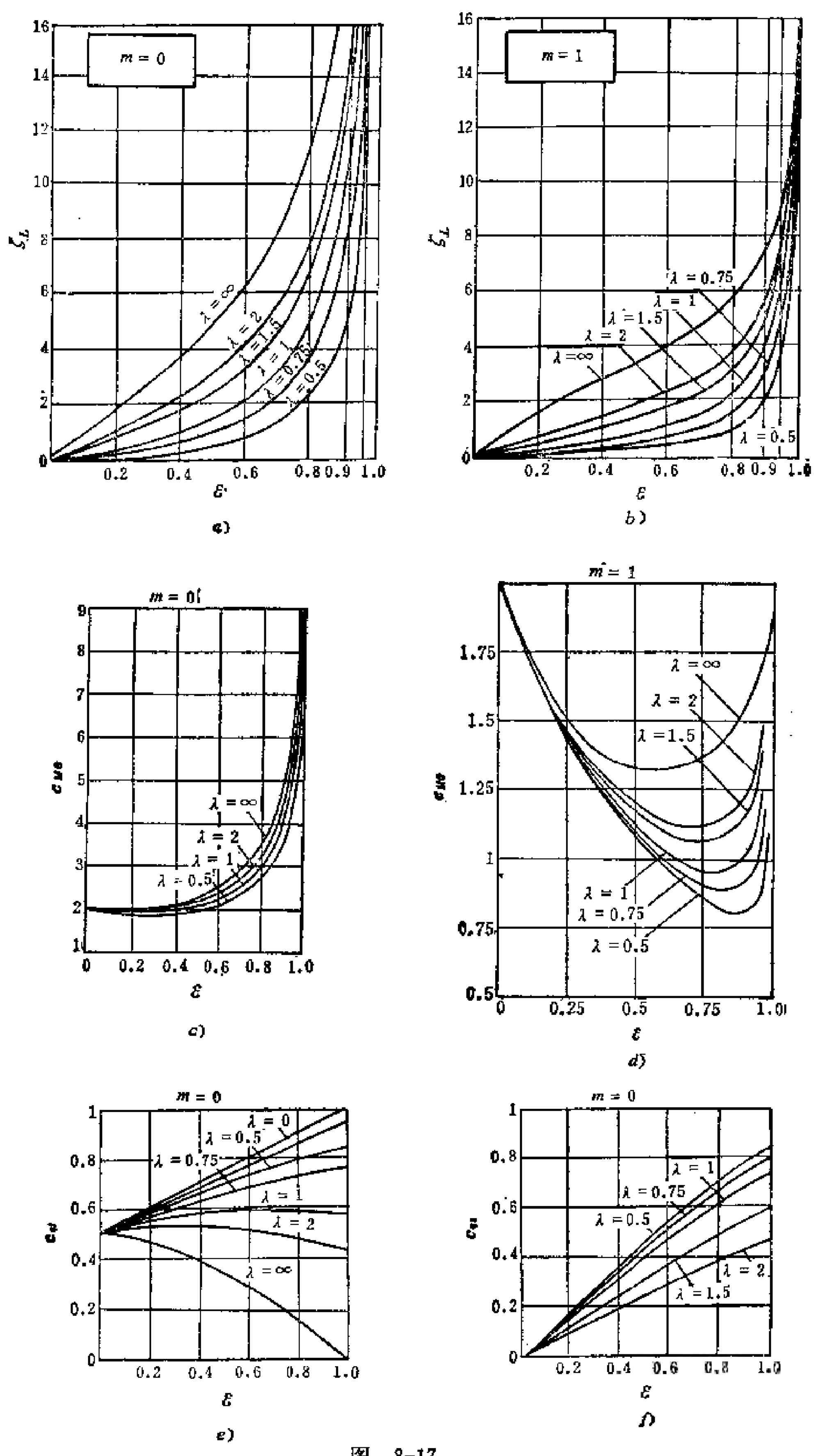

m = 0
λ = ∞
λ = 2
λ = 1.5
λ = 1
λ = 0.75
λ = 0.5
ε
a)
m = 1
λ = 0.75
λ = 1
λ = 1.5
λ = 2
λ = ∞
λ = 0.5
ε
b)
m = 0
λ = ∞
λ = 2
λ = 1
λ = 0.5
ε
c)
m = 1
λ = ∞
λ = 2
λ = 1.5
λ = 1
λ = 0.75
λ = 0.5
ε
d)
m = 0
λ = 0
λ = 0.5
λ = 0.75
λ = 1
λ = 2
λ = ∞
ε
e)
m = 0
λ = 1
λ = 0.75
λ = 0.5
λ = 2
λ = 1.5
ε
f)

图 8-17

$$M_{f0}=R^2\left[\int_0^{\theta_2}-\left(\frac{h}{2R}\ \frac{dp}{d\theta}+\frac{\mu v}{h}\right)d\theta+\int_{\theta_2}^{2\pi}\frac{\mu v h_2}{h^2}d\theta\right]$$

以（8-10），（8-11）及（8-29）代入得

$$M_{f0}=vR^2\frac{\mu_1}{h_1^m}\int_0^{\theta_2}\left(-\frac{4}{h^{1-m}}+\frac{3h_0}{h^{2-m}}\right)d\theta+vR^2\frac{\mu_1 h_2}{h_1^m}\int_{\theta_2}^{2\pi}\frac{1}{h^{2-m}}d\theta$$

$$=vR^2\frac{\mu_1}{h_1^m}\left\{\int_0^{\theta_2}\left[\frac{3h_0 d\theta}{(1-\varepsilon\cos\theta)^{2-m}}-\frac{4d\theta}{(1-\varepsilon\cos\theta)^{1-m}}\right]+\int_{\theta_2}^{2\pi}\frac{h_2 d\theta}{(1-\varepsilon\cos\theta)^{2-m}}\right\}$$

$$=\frac{\pi\mu_1 vR^2}{c}c_{M0}$$

$$\left.\begin{aligned}&\text{当}\ m=0,\quad c_{M0}=\frac{4(1+\varepsilon^2)+\varepsilon(2+5\varepsilon)}{(1+\varepsilon)(2+\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}}\\&\text{当}\ m=1,\quad c_{M0}=\frac{1}{1+\varepsilon}\left[4-(2+3\varepsilon)\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\right]\end{aligned}\right\}\quad(8\text{-}34)$$

4．有限宽度的修正

以上是假设轴承宽度为无限大，没有侧向流动的二元问题理论解，实际上轴承宽度B一般约为$\left(\frac{1}{4}\sim1\frac{1}{2}\right)D$，因此侧向流动是不可避免的；由于存在侧向流动就成为三元问题，不少人致力于这方面的研究，大都是采用数值计算法求解，这里介绍的是 N. Tipei 的计算结果，如图 8-17 所示，图中的λ即为宽度比，即$\lambda=b/D$。N. Tipei 的计算结果与A. Kinsbury 的电模拟试验结果基本相符。

由于有了侧向泄漏，因此润滑油量的平衡式为

$$Q_i\approx Q_s+Q_e$$

式中　Q_i为润滑油供给量，$Q_i=bvcc_{qi}$

Q_s为侧向泄漏量，$Q_s=bvcc_{qs}$

Q_e为主运动的排油量。

§8-4　密封润滑的基本概念

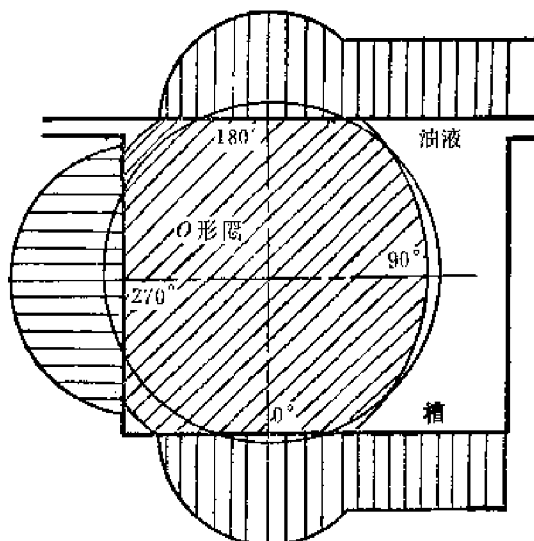
防止或限止机器耦合零件之间的泄漏的措施、结构或作用均称为密封，如果耦合的零件并无相对运动，该密封称为静密封，如果耦合零件有相对运动则称为动密封，在密封结构中防止或限止泄漏的元件称为密封件，在静密封中密封件与耦合零件紧密接触，只要接触面间的接触压强大于被封流体的压强，即能保持密封。在动密封中，密封件与耦合零件可接触，也可不接触，两者均不可能获得完全无泄漏，只能减小泄漏。在液压技术领域中，大量使用接触型动密封，所以我们针对接触型动密封进行讨论。接触型动密封存在着摩擦磨损和功率损失问题，也就是寿命与能源消耗问题。例如动密封上的摩阻功率损失似乎微不足道，但仔细计算却不容忽视。以液压缸为例，如果液压缸直径$D=50$mm，活塞杆直径$d=25$mm，活塞速度$v=3$m/min，油液压强$p=100$ bar，摩擦阻力以5%计，则每只液压缸损失功率为

$$N=\frac{0.05Apv}{1000}=\frac{0.05\left(\frac{\pi}{4}\right)(5)^2\times100\times10\times3}{(1000)(60)}=0.049\text{kW}$$

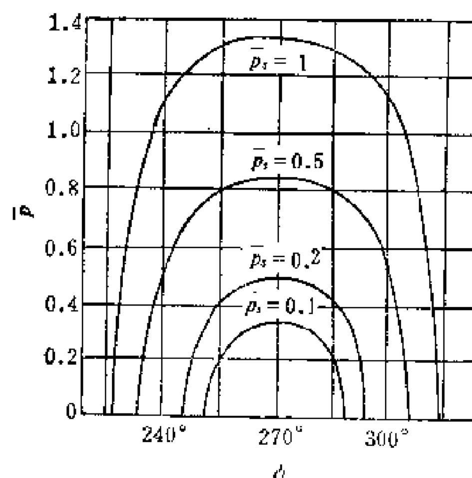
使用时间以15%计，则1万只液压缸年耗能量将达 $10000\times0.049\times8760\times0.15=6.44\times10^5$ kW-hr，如果每千瓦小时需燃油0.2 kg，则每年耗油达 1.288×10^5kg，这确是值得我们加以重视。摩擦磨损和功率损失又与减小泄漏（环境污染问题）互相矛盾，因此我们的任务是在泄漏与磨损及功率损失等方面，根据具体要求，权衡轻重，协调矛盾。

往复运动和回转运动的动密封一般要求有几千小时的工作寿命，因此要考虑使滑动的密封面有液体（一般是被封液体）润滑，以减小摩擦损失，但仍能获得极小的泄漏。实测指出，动密封面间可存在流体动力润滑作用，一般可形成不超过1～2μ的油膜厚度，密封面间产生流体动力润滑的机理，目前尚不清楚，但在结构上与轴承的润滑有相似之处。在轴承润滑理论中，给定油膜分布规律 $h=h(x)$ 下求解压强分布和承载能力，而在密封润滑理论中正好与轴承相反，油膜厚度却是需要求解的未知数，所以通常称为润滑逆问题。

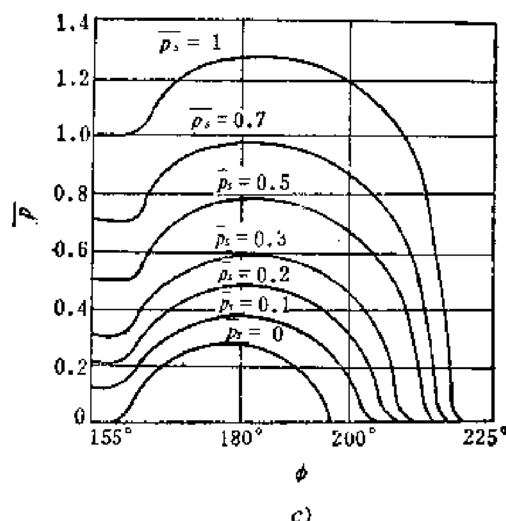
目前液压技术领域中应用最广的密封件是弹性和柔性较好的橡胶制品的O形圈、X形圈、U形圈和Y形圈以及它们的一些变形。O形圈不仅结构简单，而且由于它具有圆形断面，与其他形状密封圈相比，可以允许有较大的尺寸偏差，因此密封圈和密封槽的尺寸公差较大，便于制造，这是O形圈被广泛采用的原因。将弹性和柔性较好的密封圈安置于密封槽中，在滑动的耦合面间受到一定的预压缩力和流体压强，而使密封件变形，在耦合面间产生一定的压强分布。由于密封件的变形量极大地大于油膜厚度，因此可以认为耦合面间的压强分布主要决定于变形情况，这是弹性力学的典型问题，C. J. Hooke 等[1] 用 Milne-Thompson[2] 提供



a）



b）



c)

图8-18　O形圈压强分布

a）槽中的O形圈

b）O形圈压强分布（$\phi=225°\sim315°$）

c）O形圈压强分布（$\phi=155°\sim225°$）

[1] Hooke C.J., Lines D.J.& O'Donoghue J.P., Elastohydrodynamic Lubrication of O-ring Seals Proceeding of IME V181 pt.1 N9, pp. 205～223。

[2] Milne-Thompson L.M., Plane Elastic Systems 1960, 117 Springer Verlag, Berlin.

的方法，求得O形圈的压强分布理论曲线如图 8-18 所示。图中纵座标为无量纲压强 $\bar{p}=\frac{p}{2G}$，p 为压强，G 为切变弹性模量；$\bar{p}_s=\frac{p_s}{2G}$，p_s 为被封油液压强。图 8-19 为河原·石渡·市川[1] 等测得的Y形圈的压强分布，图 8-20 则为河原等测得Y形圈压强分布与 Müller 按静变形求得的压强分布的比较，由图 8-20 可见，压强分布的图形在性质上是相似的，但数值上稍有差别，而且在运动时，由于有摩擦力的影响，使泵行程和马达行程的压强分布也有不同，按静变形求得的压强分布，由于没有摩擦力的存在而没有泵行程和马达行程之分。

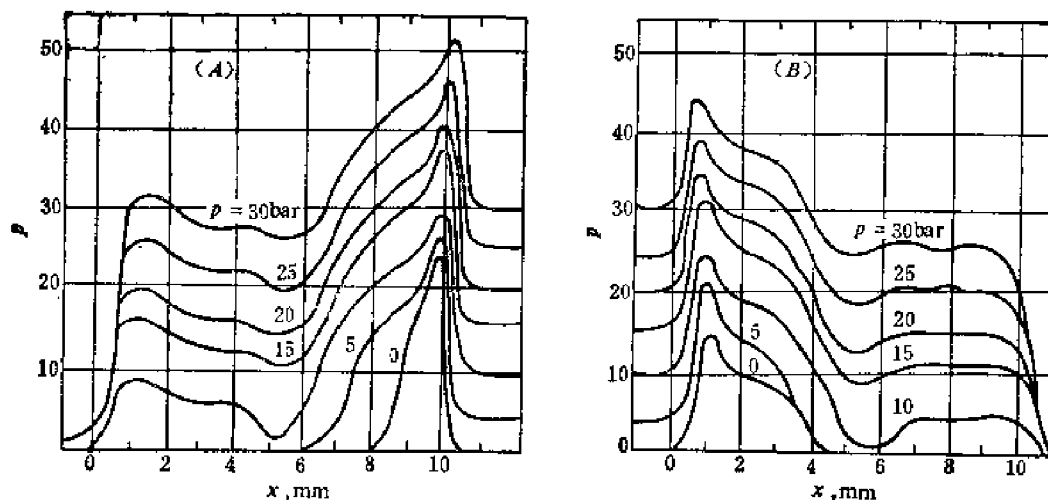


图8-19　Y形密封圈压强分布

行程 $s=202$mm，$d_i=78.4$mm，$d_0=101.6$mm，$d=80$mm，A—泵行程，B—马达行程

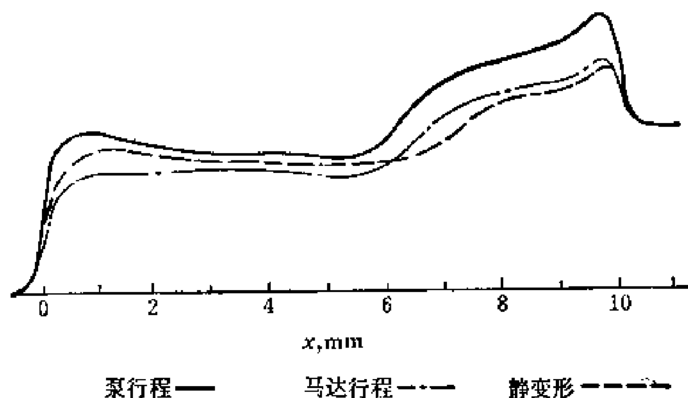


图8-20　Y形圈压强分布比较

§8-5　往复运动密封润滑理论

由于动密封面间的油膜极薄，雷诺数极低，因此油膜中主要受到粘性剪切应力和液体压强的作用。沿油膜厚度方向（z 向）的流速 u_z 可忽略，因此 $\frac{\partial p}{\partial z}=0$。一般密封件均为环状，因此 y 向尺寸可以看成无穷大，可以认为压强不随 y 而异，由此，雷诺方程为

[1] Kawahara Y, Ishiwata H. & Ichikawa Y., An Experimental Investigation of Dynamic Characteristics of U-Seal in Reciprocating Motion, Proceeding of 6th ICFS(Munich) pp. c4-33～c4 43, BHRA.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{h^3}{12\mu}\ \frac{\partial p}{\partial x}\right]=\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{v}{2}\ \frac{\partial h}{\partial x}$$

恒定流动时$\frac{\partial h}{\partial t}=0$，则雷诺方程为

$$\frac{d}{dx}\left(h^3\frac{dp}{dx}\right)=6\mu v\frac{dh}{dx} \qquad (8\text{-}35)$$

积分之得

$$h^3\frac{dp}{dx}=6\mu vh+C \qquad (8\text{-}36)$$

设最大压强处的油膜厚度为 h_0，即 $h=h_0$ 时$\frac{dp}{dx}=0$，由(8-5)式可知 Poiseuille 项为零，仅有纯 Couette 项，单宽泄漏量 $q=\frac{vh_0}{2}$，因此 h_0 是控制泄漏的关键尺寸，将上述条件代入（8-36）式得积分常数 $C=-6\mu vh_0$，因此

$$\frac{dp}{dx}=6\mu v\frac{h-h_0}{h^3} \qquad (8\text{-}37)$$

我们设 $J=\frac{h_0^2}{\mu v}\frac{dp}{dx}$，并以无量纲值 $H=\frac{h}{h_0}$ 代入（8-37）式得

$$JH^3-6H+6=0 \qquad (8\text{-}38)$$

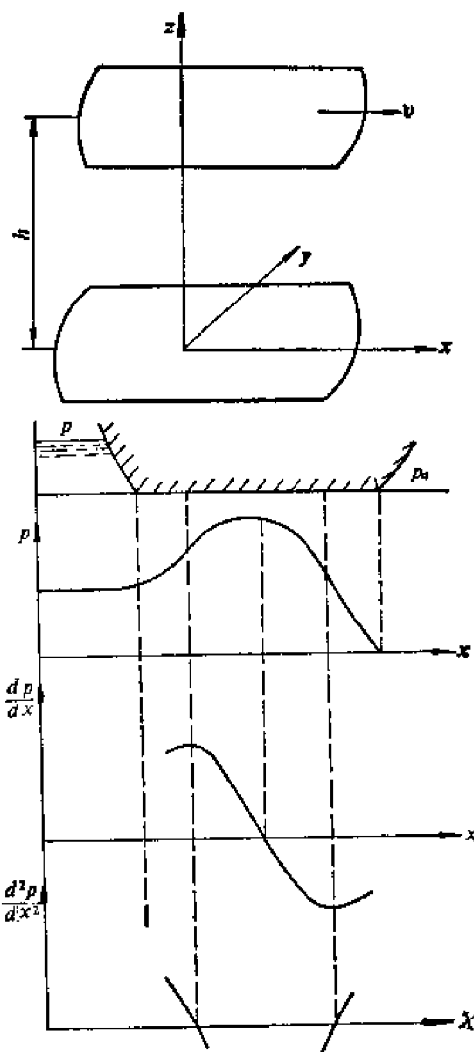


图8-21　密封润滑原理

（8-38）式作成曲线如图 8-22 所示，当 $H=1$ 时 $J=0$；当 $H>1$ 时 $J>0$；当 $H<1$ 时，$J<0$。J 的极大值在 $\frac{dJ}{dH}=0$ 处，即 $H^3\frac{dJ}{dH}+3H^2J-6=0$，或 $\frac{dJ}{dH}=\frac{6-3H^2J}{H^3}=0$，由此可得 $J=\frac{2}{H^2}$，代入（8-38）式得 $H=\frac{3}{2}$，因此

$$J_{max}=\frac{2}{H^2}=\frac{8}{9}$$

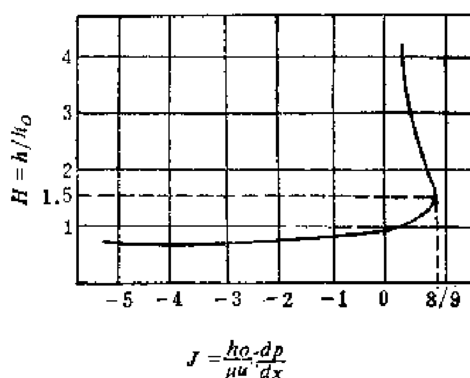


图8-22　H 与 J 的关系

因为 $\frac{dJ}{dH}=\frac{dJ}{dx}\ \frac{dx}{dH}=0$ 的条件为 $\frac{dJ}{dx}=0$，或 $\frac{dx}{dH}=0$，而 $\frac{dx}{dH}=0$ 即为 $\frac{dH}{dx}=\frac{1}{h_0}\ \frac{dh}{dx}=\infty$，而在密封处$\frac{dh}{dx}$不可能为无穷大，所以 $\frac{dJ}{dH}=0$ 的唯一条件是 $\frac{dJ}{dx}=0$。因为

$$J=\frac{h_0^2}{\mu v}\ \frac{dp}{dx} \qquad (8\text{-}39)$$

所以
$$\frac{dJ}{dx}=\frac{h_0^2}{\mu v}\ \frac{d^2p}{dx^2}$$

由此可见，当$\frac{d^2p}{dx^2}=0$时$\frac{dJ}{dx}=0$，就能满足$\frac{dJ}{dH}=0$，即J为极大值，也就是J的极大值在$\frac{d^2p}{dx^2}=0$处，而$\frac{d^2p}{dx^2}=0$处是压强分布曲线的变曲点（图 8-21），也是$\frac{dp}{dx}$具有最大值时

$$J_{max}=\frac{h_0^2}{\mu v}\left(\frac{dp}{dx}\right)_{max}=\frac{8}{9}$$

由此可以求得h_0为

$$h_0=\sqrt{\frac{8\mu v}{9\left(\frac{dp}{dx}\right)_{max}}} \tag{8-40}$$

由于$\left(\frac{dp}{dx}\right)_{max}$有正负值（上升变曲点的$\frac{dp}{dx}$为正，下降变曲点的$\frac{dp}{dx}$为负），往复运动速度$v$也有正负值，设伸出行程，也就是泵行程$v$为正值（图 8-23），则收缩行程也就是马达行程$v$为负值。由于$h_0$不可能为负值，所以泵行程时$\left(\frac{dp}{dx}\right)_{max}$取上升变曲点的$\left(\frac{dp}{dx}\right)$，记作$\left(\frac{dp}{dx}\right)_{Pmax}$，而马达行程时取下降变曲点的$\frac{dp}{dx}$，并记作$\left(\frac{dp}{dx}\right)_{Mmax}$。

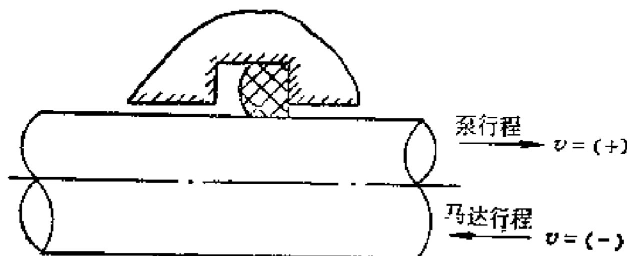


图8-23 泵行程和马达行程

§8-6 往复运动密封的泄漏量

根据上述理论，求出最大压强时的油膜厚度h_0后，由于该处的$\frac{dp}{dx}=0$，所以通过该处的流量只有 Couette 项，如果密封周长为$B=\pi D$，则泵行程时的泄漏量q_P及马达行程时的泄漏量q_M为

$$q_P=\frac{v_Ph_0}{2}B=\frac{1}{2}v_PB\sqrt{\frac{8\mu v_P}{9\left(\frac{dp}{dx}\right)_{Pmax}}}=\frac{\sqrt{2}}{3}Bv_P\sqrt{\frac{\mu v_P}{\left(\frac{dp}{dx}\right)_{Pmax}}}$$

$$q_M=\frac{v_Mh_0}{2}B=\frac{\sqrt{2}}{3}Bv_M\sqrt{\frac{\mu v_M}{\left(\frac{dp}{dx}\right)_{Mmax}}}$$

通常v_P和v_M在数值上是相等的，如果采用绝对值来计算，即$|v_P|=|v_M|=|v|$，则泄漏量公式可写成

$$q_P = \frac{\sqrt{2}}{3} B |v|^{3/2} \sqrt{\frac{\mu}{\left|\frac{dp}{dx}\right|_{P\max}}} \tag{8-41}$$

$$q_M = \frac{\sqrt{2}}{3} B |v|^{3/2} \sqrt{\frac{\mu}{\left|\frac{dp}{dx}\right|_{M\max}}} \tag{8-42}$$

往复运动通常有二种，一种是等速运动，一般液压系统的液压缸中活塞或柱塞基本上属于等速运动；另一种为简谐运动，由等速回转的曲柄连杆机构带动的活塞属这种运动。简谐运动时活塞速度呈正弦曲线变化。不同的速度规律将获得不同的泄漏量，现分别予以讨论。

1. 等速运动时的泄漏量

以 v_0 速度运动的活塞或柱塞，在一个往复周期内包括泵行程和马达行程，这两个行程的泄漏量各为 q_P 及 q_M，如果一周期所需的时间为 t，则不同的两个行程所需时间各为 $t/2$，由此，泵行程和马达行程中通过密封处的油液体积各为 $\frac{1}{2}q_P t$ 及 $\frac{1}{2}q_M t$，泵行程中油液向外流，马达行程中油液向内带入，所以一周期的净泄漏体积为二者之差，即 $(q_P - q_M)\frac{t}{2}$，则泄漏量 Q 为

$$Q = \frac{(q_P - q_M)\frac{t}{2}}{t} = \frac{1}{2}(q_P - q_M)$$

因此

$$Q = \frac{1}{3\sqrt{2}} B |v_0|^{3/2} \left(\sqrt{\frac{\mu}{\left|\frac{dp}{dx}\right|_{P\max}}} - \sqrt{\frac{\mu}{\left|\frac{dp}{dx}\right|_{M\max}}} \right) \tag{8-43}$$

2. 正弦速度往复运动的泄漏量

在一个行程中活塞速度 v 是按正弦曲线变化，设最大行程速度为 v_0，则 $v = v_0 \sin\theta$，式中 θ 是曲柄的回转角。由于 v 是变数，因此泄漏量 Q 也将随 θ 而异，但我们可以求出它的平均值（图 8-24）。首先计算 $v^{3/2}$ 的平均值 $\overline{v}^{3/2}$

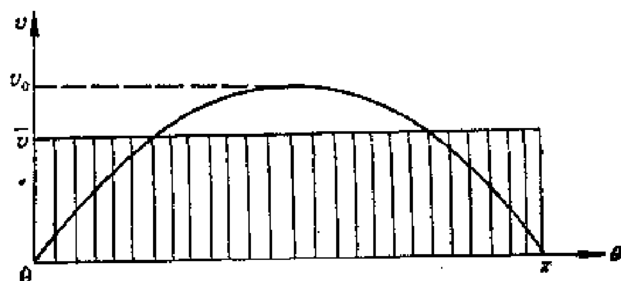


图8-24　正弦速度平均值

$$\overline{v}^{3/2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} v_0^{3/2} \sin^{3/2}\theta d\theta$$

$$= \frac{2 v_0^{3/2}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{3/2}\theta d\theta$$

$$= \frac{2}{\pi} v_0^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)} = \frac{v_0^{3/2}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(1.25)}{\Gamma(1.75)}$$

因此，正弦速度时的泄漏量 Q 为

$$Q=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}B|v_0|^{3/2}\frac{\Gamma(1.25)}{\Gamma(1.75)}\left(\sqrt{\frac{\mu}{\left|\frac{dp}{dx}\right|_{Pmax}}}-\sqrt{\frac{\mu}{\left|\frac{dp}{dx}\right|_{Mmax}}}\right) \tag{8-44}$$

将（8-43）及（8-44）式写成

$$Q=CB|v_0|^{3/2}\left(\sqrt{\frac{\mu}{\left|\frac{dp}{dx}\right|_{Pmax}}}-\sqrt{\frac{\mu}{\left|\frac{dp}{dx}\right|_{Mmax}}}\right) \tag{8-45}$$

式中系数C为：

等速运动：$C=\frac{1}{3\sqrt{2}}=0.235$

正弦运动：$C=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}\frac{\Gamma(1.25)}{\Gamma(1.75)}=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}\frac{0.9064}{0.91906}=0.131$

由（8-45）式可见密封和泄漏的条件为：

密封$Q\leqslant 0$：$\left|\frac{dp}{dx}\right|_{Pmax}>\left|\frac{dp}{dx}\right|_{Mmax}$

泄漏$Q>0$：$\left|\frac{dp}{dx}\right|_{Pmax}<\left|\frac{dp}{dx}\right|_{Mmax}$

O形圈只在低压时$\left|\frac{dp}{dx}\right|_{Pmax}>\left|\frac{dp}{dx}\right|_{Mmax}$，图 8-25 所示，而U形Y形圈在较高压强时也能保持为$\left|\frac{dp}{dx}\right|_{Pmax}>\left|\frac{dp}{dx}\right|_{Mmax}$（图 8-19）。Hooke 等的计算也表明O形圈在泵行程时的油膜厚度$H_{0P}=\left(\frac{h_0}{r}\right)_P$也较马达行程时的厚度$H_{0M}=\left(\frac{h_0}{r}\right)_M$为大，而且压强越大差值也越大，如图 8-26 所示，在等速运动时的泄漏量Q为

$$Q=\frac{\pi Dv}{4}r\left(H_{0P}-H_{0M}\right)$$

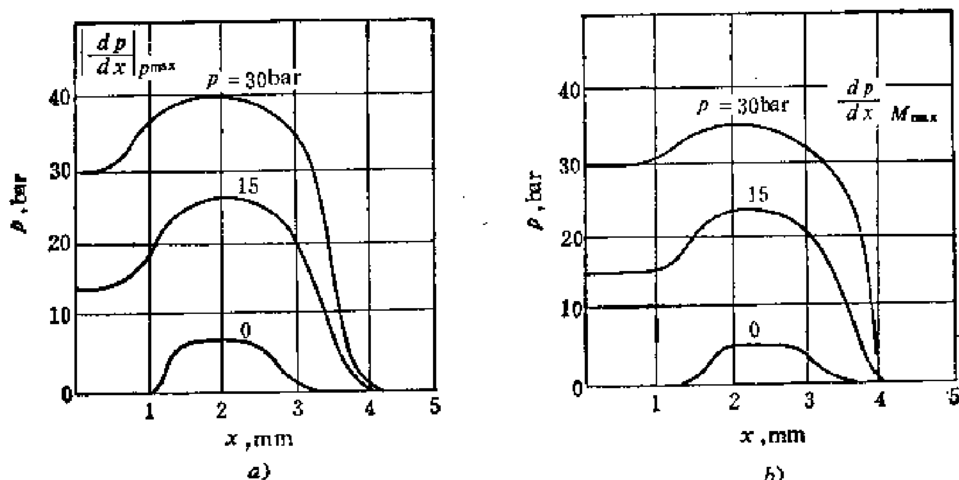


图8-25 泵行程和马达行程的$\left|\frac{dp}{dx}\right|_{max}$

a）泵行程 b）马达行程

如果将μ，v，B及F_p等数组成无量纲数G，称为密封准数[1][2]，即

$$G=\frac{\mu\bar{v}B}{2F_p} \tag{8-46}$$

式中　$F_p=\bar{p}BL$——密封压紧力；

$\bar{p}$——平均压强；

$B=\pi D$——密封周长；

L——密封宽度；

$\bar{v}=2sn$——平均滑动速度，等速运动时$\bar{v}=v_0$，在正弦速度运动时

$$\bar{v}=\frac{2v_0}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta=\frac{2v_0}{\pi}\quad 或 v_0=\frac{\pi\bar{v}}{2};$$

s——行程；

n——频率，每秒转数。

代入（8-45）式得

$$\frac{\mu Q}{F_pL}=KG^{3/2}\left[\sqrt{\frac{\bar{p}}{L\left|\frac{dp}{dx}\right|_{P\max}}}-\sqrt{\frac{\bar{p}}{L\left|\frac{dp}{dx}\right|_{M\max}}}\right] \tag{8-47}$$

等速运动时系数$K=0.235(2)^{3/2}=0.662$，正弦速度运动时$K=0.131(\pi)^{3/2}=0.73$。

由此可见，密封处的泄漏量与$G^{3/2}$成正比，平野和河原对O形及D形圈进行试验，O形及D形圈特性和密封结构尺寸如表8-4。

试验结果如图8-27所示，其规律与上述理论十分相符，即$\frac{\mu Q}{F_pL}$与$G^{3/2}$成正比。

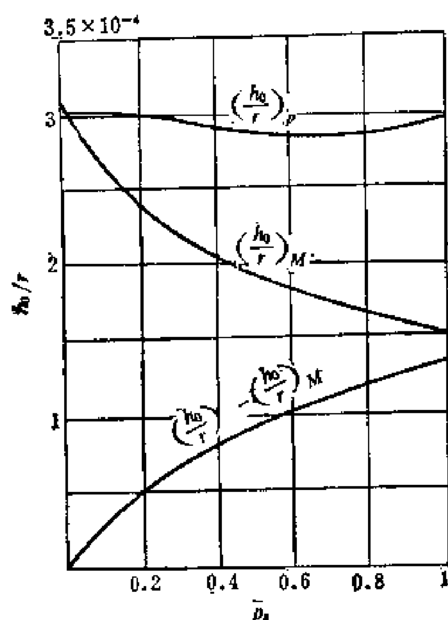


图8-26　泵行程和马达行程的油膜厚度

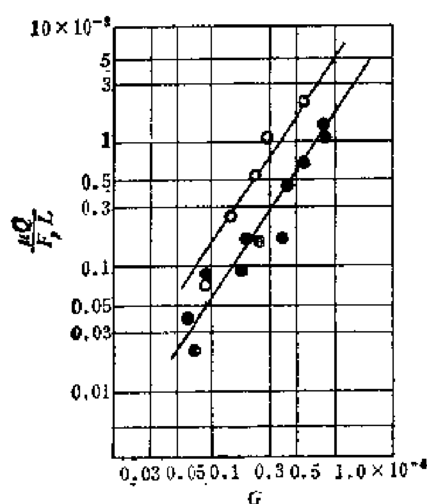


图8-27　O形圈的$G-Q$关系

[1] Hirano F., Kawahara Y. & Kaneta M., A Study on the Characteristics of "O" -ring for Reciprocating Motion, Proceeding of NCFP, V. 26, 1970 pp. 138～153.

[2] 平野・河原，往复动用Oリングに関する研究，润滑V14 N5 1969 pp. 56～62.

表 8-4

名　　称	O形圈 A	O形圈 B	D形圈
材　　料	丁腈胶	丁腈胶	丁腈胶
切变弹性模量，daN/cm^2	99.9	99.9	86
肖氏(A)硬度	72	72	60
张紧力，daN	22.5	52.3	27.6
密封宽度L，mm	1.73	2.57	2.37
内　径D，mm	29.7	79.6	29.7
断面直径d，mm	3.5	5.7	—
密封槽深，mm	2.8	4.6	3.0
密封槽宽，mm	4.6	7.5	4.0
轴　径，mm	30	80	30
行　程s，mm	1.4～70	40～150	1.4～70

§8-7　往复运动密封的摩擦阻力

摩擦阻力引起能量损失，由于密封件数量极大，总的能源损耗相当可观，应予重视。密封处油膜剪切应力为τ，则摩擦力F_f为

$$F_f = B\int_0^L \tau dx$$

式中　$B=\pi D$——密封周长；

　　　L——密封宽度。

剪切应力 $\tau=\mu\dfrac{du}{dz}=\left(\dfrac{h}{2}\dfrac{dp}{dx}+\dfrac{\mu v}{h}\right)$，以（8-37）式及 $v=\bar{v}$，$x=\xi L$ 代入得平均摩擦力F_f为

$$F_f=\frac{\mu\bar{v}B}{h_0}\int_0^L\left[4\frac{h_0}{h}-3\left(\frac{h_0}{h}\right)^2\right]dx$$

$$=\mu\bar{v}B\left(\frac{L}{h_0}\right)\int_0^1\left[4\frac{h_0}{h}-3\left(\frac{h_0}{h}\right)^2\right]d\xi=\mu\bar{v}B\left(\frac{L}{h_0}\right)R \tag{8-48}$$

式中　$R=\displaystyle\int_0^1\left[4\frac{h_0}{h}-3\left(\frac{h_0}{h}\right)^2\right]d\xi$

将（8-40）式代入（8-48）式得

$$F_f=\frac{3R}{2\sqrt{2}}BL\sqrt{\mu\bar{v}}\sqrt{\left|\frac{dp}{dx}\right|_{max}}$$

由此可见，平均摩擦力与$\bar{v}^{1/2}$成正比。

摩擦系数f为

$$f=\frac{F_f}{F_p}=\frac{3R}{2}\sqrt{\frac{\mu\bar{v}B}{2F_p}}\sqrt{\frac{L}{\bar{p}}\left|\frac{dp}{dx}\right|_{max}}=\psi G^{\frac{1}{2}} \tag{8-49}$$

由此可见，往复运动密封的油膜润滑摩擦系数与密封准数G的平方根成正比，石渡・神林[1]对U形圈的试验，平野・河原・兼田[2]对O形及D形圈的试验，均证实了上述理论。

[1] 石渡秀男・神林治雄，往复动用オイルシールに関する研究，润滑，V11 N7，1966，pp 295。

[2] Hirano F., Kawahara Y. & Kaneta M., A Study on the Characteristies of "O"-ring for Reciprocating Motion, Proc. NCFP V26 1970 pp. 138～153。

密封准数G是粘性力和压紧力之比，在一定的压紧力下，密封面间润滑油膜的建立需要有一定的速度$\bar{v}$和粘度μ，如果$\bar{v}$和μ太小，即粘性力不足，而压紧力 F_p 却较大，油膜就不易建立，也就是G值较小时油膜难以形成，G值较大时形成油膜的倾向大。形成油膜时摩擦系数与G成平方根关系。

如果密封面间油膜被挤破，或不能建立油膜润滑而存在半干摩擦，则摩擦系数将显著增高，这时密封效果好，但能量损失大且密封处易磨损，很多试验表明，当$G<10^{-5}$时，油膜不易建立。如果摩擦系数小于$\psi G^{1/2}$，则油膜厚度太大，将产生泄漏，所以$f=\psi G^{1/2}$线（图8-28）就成为密封与泄漏的分界线，线的左上方为密封区，右下方为泄漏区。平野[1]指出，

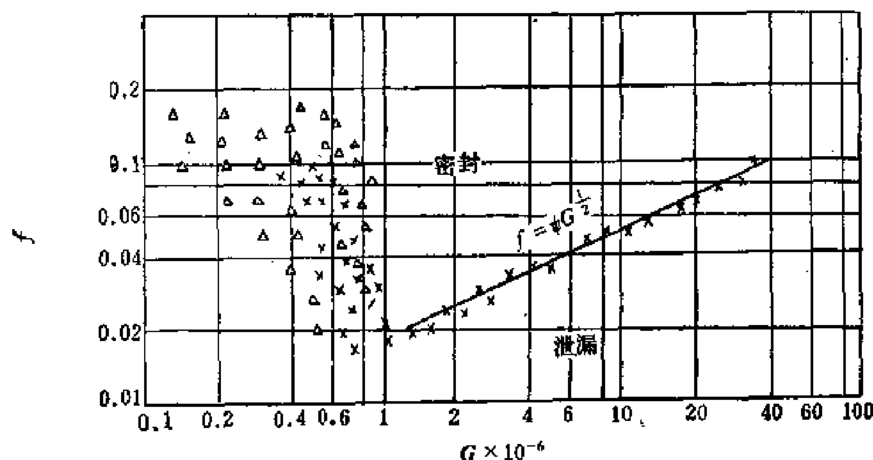


图8-28 密封特性曲线

密封处油膜的建立与往复运动行程s的大小也有关，s越小油膜越不易建立。$f=\psi G^{1/2}$线与油的性质也有关系。图 8-29 是平野·河原的试验结果。

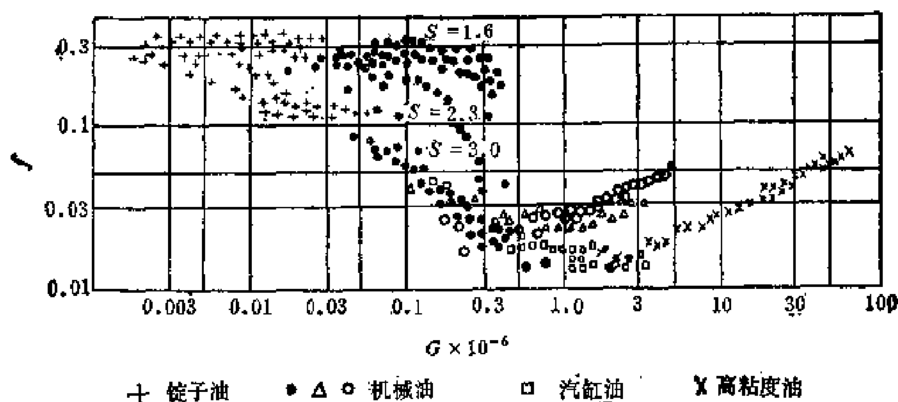


图8-29 O形圈的试验结果

对于滑动密封的要求是在极小的泄漏（基本不漏）下摩擦阻力尽可能小，所以要求密封间的工况最好是油膜刚建立而尚未完全形成的状态，也就是边界摩擦和液体摩擦的混合状态。

[1] Hirano F. & Kaneta M., Elastohydrodynamic Condition in Elliptic Contact in Reciprocating Motion, Proc. 6th ICFS C2。

第九章　静 压 支 承

液压元件中的摩擦副往往在承载能力，泄漏损失和摩擦损失等方面要求很高，例如泵和马达的缸体与配流盘，滑履（靴）与斜盘，曲轴与连杆等等。摩擦副要能承受负载，又要摩擦力小，就要在摩擦副中形成具有一定压强的油膜。油膜内压强的产生有二种方式：一种是由壁面的相对运动和楔形缝隙形成，另一种是由外加有压油液形成，前者要求有一定的相对运动速度，称为动压支承，如果速度太小，就无法承受负载，所以它受到了一定的限制，后者没有运动速度的要求，所以称为静压支承，它不仅能满足低速重载的情况，也能适应于超高转速的要求，缺点是需要外加油压源，而且泄漏量稍大，但液压元件中往往可以利用其本身所具有的有压油液，所以采用静压支承是有良好条件的。

§9-1　静压支承的概念

静压支承是在摩擦副中引入外加有压油液，在摩擦面产生一个与负载相反的力，如果这个力与负载相平衡，那末摩擦副之间可以形成油膜而使壁面完全不接触。如果液压反力小于负载，虽然不能使壁面之间形成油膜而使壁面脱离接触，但由于壁面间的粗糙度可以渗入有压油液，不仅可使压紧力大为减小，而且能起润滑作用而改善了工作条件。前者称为完全平衡型静压支承，后者则为不完全平衡型静压支承。由于形成油膜，完全平衡型静压支承摩擦力很小，可以避免磨损，工作可靠，但不可避免地要有一定的泄漏损失。不完全平衡型静压支承则基本上无泄漏，但由于壁面并不完全脱离接触，液体摩擦和固体摩擦同时并存，摩擦阻力稍大，且仍存在磨损的危险性。本章主要讨论完全平衡型静压支承。

静压支承可以做成各种形式，但不论它的形式如何，至少应有一个油腔，如图 9-1 所示，

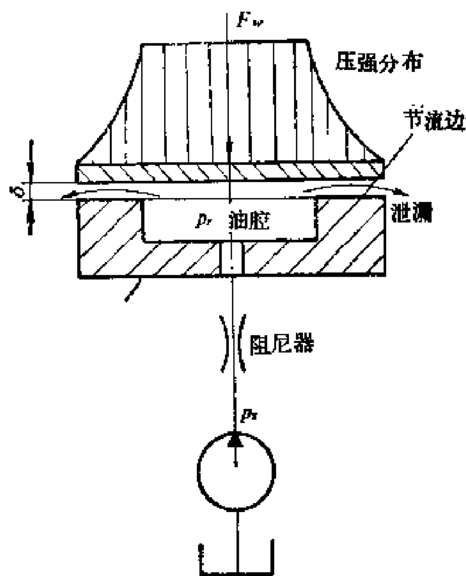


图9-1　静压支承

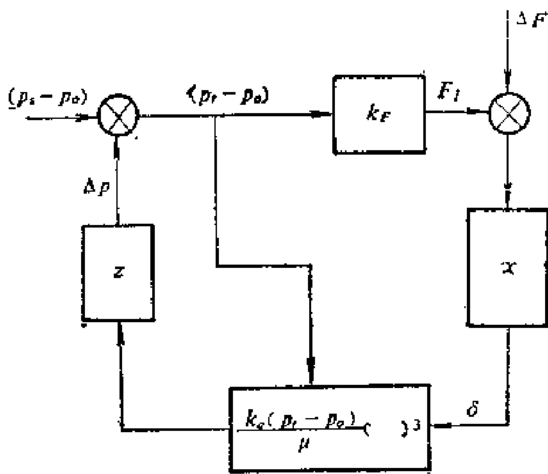


图9-2　静压支承的方块图

有压油液通入油腔使油腔内具有 p_r 的压强，油腔内的有压油液通过包围油腔的壁缝泄漏，这个壁缝称为节流边，节流边内油膜厚度为 δ，一般仅为几个微米（μm）到几十微米。节流边内油膜有一定的压强分布，油腔内压强和节流边内的压强所产生的力即为承载能力。由于节流边内的压强分布与油腔内压强 p_r 有关，对于一定几何形状的支承的承载能力决定于油腔内压强。如果油腔压强不变，承载能力也就不变，但负载却往往是变动的，这样，油腔内压强不变的支承就不能适应可变负载。为此必须采取措施，使油腔内压强在一定范围内能随外负载的增减而增减。办法是在油腔进口前装置阻尼器，使支承具有双重阻尼，即进口阻尼器和支承节流边。后者主要控制支承的泄漏量，前者则与后者协同调节油腔压强 p_r。这是因为通过阻尼器的流量与通过节流边的泄漏量 q 是相等的，当负载 F 增加时，油膜厚度减小，使泄漏量减小而降低了阻尼器上的压降，使油腔内压强 p_r 增大，与负载重新达到了平衡，也就是由于采用了双重阻尼，引起油腔内压强的反馈作用，构成一个自动调节的闭环系统（图9-2），使支承能适应负载的变化。

§9-2　静压支承的计算和抗干扰能力

油液在油腔和节流边上的总的液压力即为支承的承载能力，设静压支承的油源压强为 p_s，经过阻尼器进入油腔的压强为 p_r，环境压强为 p_0，如果压差比值 $(p_r-p_0)/(p_s-p_0)=\alpha$，则承载能力 F_l 为

$$F_l=k_F(p_r-p_0)=k_F\alpha(p_s-p_0) \tag{9-1}$$

泄漏量 q 为

$$q=k_q\frac{\delta^3}{\mu}(p_r-p_0)=k_q\frac{\delta^3}{\mu}\alpha(p_s-p_0) \tag{9-2}$$

式中 k_F 为支承承载系数，k_q 为泄漏系数，这两个系数都由支承的几何尺寸所确定。对于不同形状的支承的 k_F 及 k_q 系数，根据第七章缝隙流动中所得结果为

（1）圆形支承（图9-3 a）

$$k_F=\frac{\pi(r_2^2-r_1^2)}{2\ln r_2/r_1}$$

$$k_q=\frac{\pi}{6\ln r_2/r_1}$$

（2）环形支承（图9-3 b）

$$k_F=\frac{\pi}{2}\left[\frac{r_4^2-r_3^2}{\ln r_4/r_3}-\frac{r_2^2-r_1^2}{\ln r_2/r_1}\right]$$

$$k_q=\frac{\pi}{6}\left[\frac{1}{\ln r_4/r_3}+\frac{1}{\ln r_2/r_1}\right]$$

（3）矩形支承（图9-4）

设压强呈四面棱柱体分布，棱柱体的底面积为 x_1x_2，顶面积为 y_1y_2，高为 (p_r-p_0)，这样，承载系数为

$$k_F=\frac{1}{3}\left[x_1x_2+y_1y_2+(x_1x_2y_1y_2)^{\frac{1}{2}}\right]$$

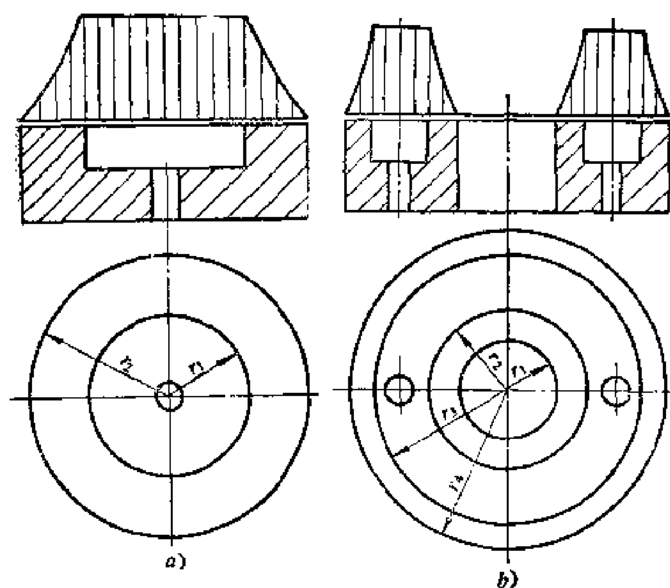


图9-3 圆形及环形支承
a) 圆形 b) 环形

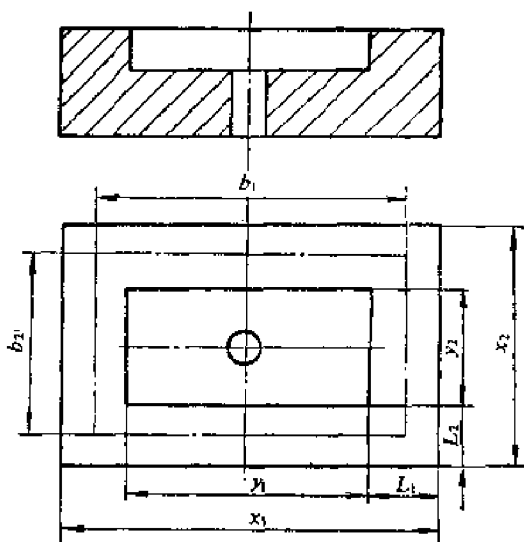


图9-4 矩形支承

此式所求得的 k_F 稍大于实际的承载系数，误差在 10% 以内。

泄漏系数近似为

$$k_q = \frac{1}{6}\left[\frac{b_2}{L_2} + \frac{b_1}{L_1}\right]$$

如果支承的滑动速度为 U，则支承滑动面上的剪切应力为 $\tau = \mu\frac{U}{\delta}$，支承的摩擦力为

$$F_f = A\tau = \mu A\frac{U}{\delta}$$

因此可以求得完全平衡型静压支承的摩擦系数 f_s 为

$$f_s = \frac{F_f}{F_l} = \frac{\mu AU}{k_F\alpha(p_s - p_0)\,\delta}$$

式中 A 为支承节流边面积。在一般情况下，静压支承的 f_s 值不超过 2×10^{-3}。

采用双重阻尼后，静压支承能适应负载的变动。我们说它具有抗干扰能力，这个能力的大小，可用刚度 S 来表示。所谓刚度就是单位油膜厚度的变化所引起支承承载能力的变化，即

$$S = -\frac{dF_l}{d\delta} \tag{9-3}$$

式中的负号表示油膜厚度的减小必引起承载能力 F_l 的增大。

F_l 与 δ 没有直接的关系，但 F_l 及 δ 都与 $(p_r - p_0) = \alpha(p_s - p_0)$ 有关，如果油源压强已定，那末 F_l 及 δ 都决定于 α。因为 $F_l = k_F\alpha(p_s - p_0)$ 所以

$$dF_l = k_F(p_s - p_0)\,d\alpha \tag{9-4}$$

δ 与 α 的关系，按进口阻尼器形式而异，进口阻尼器通过的流量 q_r 可用下式表示

$$q_r = k_r(p_s - p_r)^n = k_r(p_s - p_0)^n(1-\alpha)^n$$

不同型式阻尼器的系数 k_r 及 n 如表 9-1 所示。

表9-1 各种阻尼器的k_r值

型式 \ 系数	k_r	n
阻尼圆管	$\dfrac{\pi d^4}{128\mu l c}=\dfrac{k_c}{\mu}$	1
等边三角槽	$\dfrac{b^4}{186\mu l c}=\dfrac{k_T}{\mu}$	1
薄壁孔口	$C_q\pi\dfrac{d^2}{4}\sqrt{\dfrac{2}{\rho}}$	$\dfrac{1}{2}$
恒流量阀	k_Q	0
环缝阻尼	$\dfrac{\pi d\delta^3}{12\mu l c}=\dfrac{k_a}{\mu}$	1

流经阻尼器的流量q_r即为支承节流边的泄漏量q，因此

$$k_r(p_s-p_0)^n(1-\alpha)^n=k_q\frac{\delta^3}{\mu}\alpha(p_s-p_0)$$

由此得油膜厚度δ为

$$\delta=\left[\frac{k_r\mu(p_s-p_0)^{n-1}(1-\alpha)^n}{k_q\alpha}\right]^{\frac{1}{3}}$$

或

$$\delta=k_\delta\left(\frac{k_r}{k_q}\mu\right)^{1/3}(p_s-p_0)^{\frac{n-1}{3}}$$

油膜厚度系数$k_\delta=\left[\dfrac{(1-\alpha)^n}{\alpha}\right]^{1/3}$。

由此得

$$d\delta=-\frac{k_r^{1/3}\mu^{1/3}(p_s-p_0)^{\frac{n-1}{3}}(1-\alpha)^{\frac{n-3}{3}}[(n-1)\alpha+1]}{3k_q^{1/3}\alpha^{4/3}}d\alpha \tag{9-5}$$

将（9-5）及（9-4）式代入（9-3）式得支承刚度S为：

$$S=-\frac{dF_l}{d\delta}=\frac{3k_pk_q^{1/3}\alpha^{4/3}(p_s-p_0)}{[(n-1)\alpha+1]k_r^{1/3}\mu^{1/3}(p_s-p_0)^{\frac{n-1}{3}}(1-\alpha)^{\frac{n-3}{3}}}$$

$$=3k_p\left(\frac{k_q}{\mu k_r}\right)^{1/3}\frac{(1-\alpha)^{\frac{3-n}{n}}\alpha^{4/3}}{[(n-1)\alpha+1]}(p_s-p_0)^{\frac{4-n}{3}} \tag{9-6}$$

对于不同型式的阻尼器求得具体的刚度如表（9-2）。

表 9-2

阻尼器型式	刚度 S	刚度系数k_s	最大刚度时的α	$k_{s\max}$	k_δ
阻尼圆管	$S_c=k_s(p_s-p_0)k_p\left(\dfrac{k_q}{k_c}\right)^{1/3}$	$3(1-\alpha)^{2/3}\alpha^{4/3}$	$\alpha=\dfrac{2}{3}$	0.836	$\left(\dfrac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{1/3}$
等边三角槽	$S_T=k_s(p_s-p_0)k_p\left(\dfrac{k_q}{k_T}\right)^{1/3}$	$3(1-\alpha)^{2/3}\alpha^{4/3}$	$\alpha=\dfrac{2}{3}$	0.836	$\left(\dfrac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{1/3}$
环缝阻尼	$S_a=k_s(p_s-p_0)k_p\left(\dfrac{k_q}{k_a}\right)^{1/3}$	$3(1-\alpha)^{2/3}\alpha^{4/3}$	$\alpha=\dfrac{2}{3}$	0.836	$\left(\dfrac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{1/3}$
薄壁小孔	$S_0=k_s(p_s-p_0)^{7/6}k_p\left(\dfrac{k_q}{\mu k_r}\right)^{1/3}$	$\dfrac{6(1-\alpha)^{5/6}\alpha^{4/3}}{2-\alpha}$	$\alpha=0.691$	1.07	$\left[\left(\dfrac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{1/3}$
恒流量阀	$S_v=k_sK_r\left(\dfrac{k_q}{\mu k_Q}\right)^{1/3}(p_s-p_0)^{4/3}$	$3\alpha^{4/3}$	—	—	$\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)^{1/3}$

刚度是支承承受负载变化能力的指标，我们希望在较大的负载变化下只引起很小的油膜厚度变化，而且油膜厚度的变化越小越好，也就是要求支承的刚度越大越好。在结构参数已确定的条件下，k_Q、k_F、k_C、k_T、k_e 等均为定值，则刚度仅随 α 而变，最大刚度时的 α 值可由 $\frac{dS}{d\alpha}=0$ 解出，具体计算表明（表 9-2）阻尼圆管，等边三角槽等作为进油阻尼器的静压支承刚度最小，薄壁小孔次之，恒流量阀较大。但必须指出，薄壁小孔或恒流量阀作为进油阻尼器时，支承刚度都与粘度 μ 有关，这样，刚度就将随温度变化而改变，这是我们不希望的，如果工作介质粘温变化较大，应重视这个问题。阻尼圆管或槽的刚度与油液粘度无关，因此采用阻尼管和槽的支承对温度不敏感。此外，为了减小支承滑动块的尺寸，α 值宜取得大些，一般在 $\alpha=0.66\sim0.9$ 范围内选取，由图 9-5 可见，在 α 超过 0.66～0.691 后，阻尼管、槽和阻尼孔的刚度有所降低，但还是可以允许的。对于供油压强较高的情况下，例如高压柱塞式液机，即使取较大的 α 值，仍然要求较大的阻尼压降，这时就会要求阻尼管的长度 l 太大，直径 d 太小，不仅加工困难而且也易于堵塞。现在有一种特殊的阻尼方式，即在滑履上开螺旋阻尼槽，p_s 的高压油进入滑履后通过螺旋槽和内侧密封面（图 9-6）进入油腔。这是一种并联的组合阻尼方式，我们可以类比电学中的欧姆定律来求解。如果螺旋阻尼是等边三角形槽，则通过它的流量是

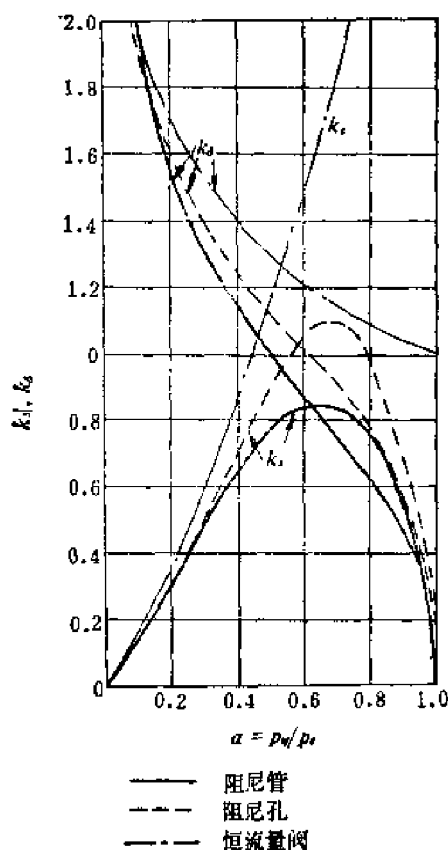


图9-5 静压支承油膜厚度系数和刚度系数

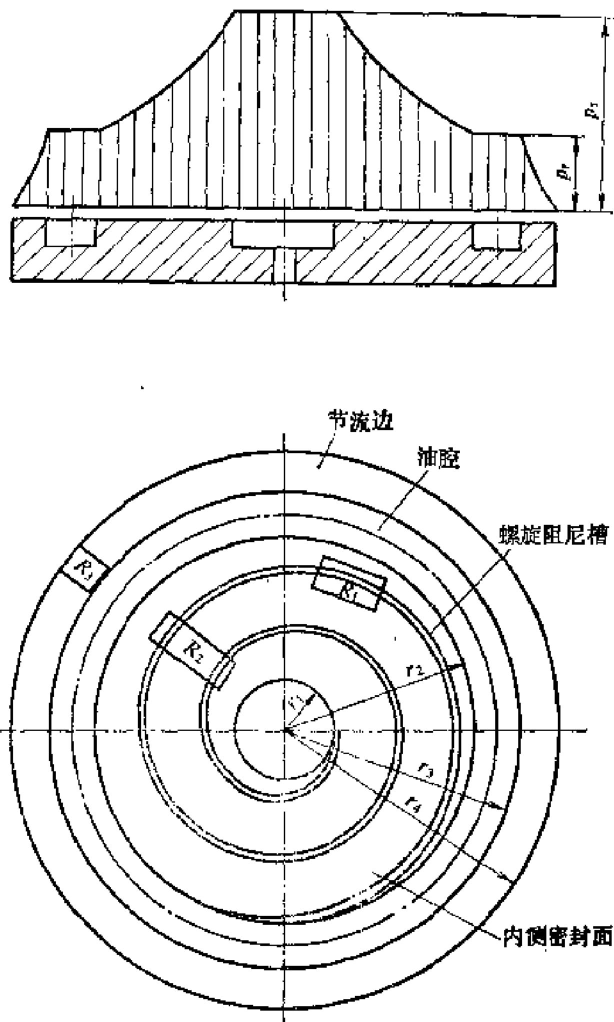


图9-6 带螺旋阻尼槽的滑履

$$q_1 = \frac{b^4}{185\mu lc}(p_s - p_r) = \frac{(p_s - p_r)}{R_1}$$

通过内侧密封面的流量是

$$q_2 = \frac{\pi\delta^3}{6\mu}\frac{p_s - p_r}{\ln\dfrac{r_2}{r_1}} = \frac{p_s - p_r}{R_2}$$

式中液阻

$$R_1 = \frac{185\mu lc}{b^4}$$

$$R_2 = \frac{6\mu}{\pi\delta^3}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

根据欧姆定律可知，并联组合液阻为$\dfrac{R_1R_2}{R_1 + R_2}$。因为通过节流边的泄漏量为

$$q = \frac{\pi\delta^3}{6\mu}\frac{p_r - p_0}{\ln r_4/r_3} = \frac{(p_r - p_0)}{R_3}$$

它与通过组合阻尼的流量 $q_1 + q_2$ 是相等的，即

$$\frac{p_r - p_0}{R_3} = \frac{p_s - p_r}{\dfrac{R_1R_2}{R_1 + R_2}} = \frac{\Delta p}{\dfrac{R_1R_2}{R_1 + R_2}}$$

由此可求出

$$\Delta p = p_s - p_r = \frac{(p_r - p_0)(R_1R_2)}{R_3(R_1 + R_2)}$$

$$p_s = \Delta p + p_r = (p_r - p_0)\left[\frac{R_1R_2}{R_3(R_1 + R_2)} + 1\right]$$

所以

$$p_r - p_0 = \frac{p_s}{1 + \dfrac{R_1R_2}{R_3(R_1 + R_2)}} \tag{9-7}$$

$$\Delta p = \frac{p_s}{1 + \dfrac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1R_2}} \tag{9-8}$$

承载能力 F_l 则为

$$F_l = \pi\left[\Delta p\frac{r_2^2 - r_1^2}{2\ln r_2/r_1} + (p_r - p_0)\frac{r_4^2 - r_3^2}{2\ln r_4/r_3}\right] \tag{9-9}$$

这种阻尼方式的特点是阻尼槽的一个面是滑动面，不易堵塞。

刚度只表示了支承抗平行升降的干扰，如果外界干扰使支承倾侧，则使节流边的油膜厚度发生变化。由于油膜的压强反馈作用，油膜压强重新分布而形成抗倾力矩 M_r(图 9-7)，但是这个抗倾力矩是很小的，在支承尺寸和节流边尺寸较大的情况下才有一定效果，为了增大抗倾力矩，可以采用多油腔的办法（图 9-8）。

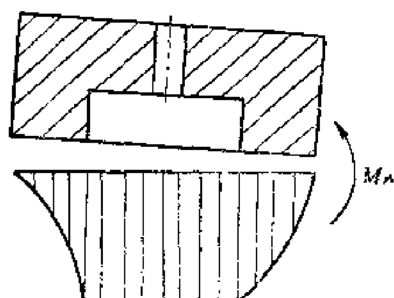


图9-7 抗倾力矩M_r

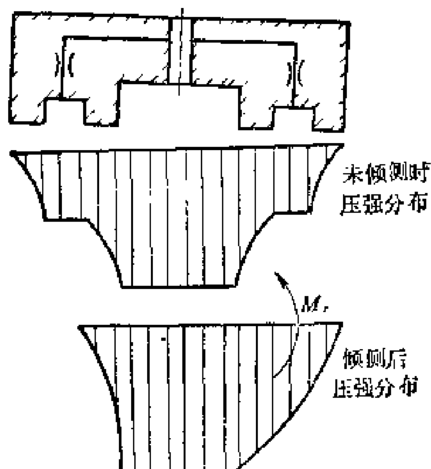


图9-8 多油腔支承，抗倾力矩增大

§9-3 关于油膜挤压

某些摩擦副相对速度很小，又承受剧烈的周期性冲击负载，按常规的想法，这些摩擦副的工作条件恶劣，将很快损坏，但事实上却并不如此，原因是它们在无载或轻载时摩擦副中具有产生油膜的条件，受冲击时油膜受到挤压而油膜厚度减小，在油膜减小的同时，油膜压强也发生变化，产生抵抗油膜减小的力。如果冲击周期较短，当油膜尚未遭到破坏，冲击过程已完成，壁面间又重新恢复一定的油膜厚度，准备承受下一个冲击。如果以$\frac{\partial\delta}{\partial t}$表示油膜厚度的时间变化率，也就是挤压速度，由雷诺方程$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\delta^3}{12\mu}r\frac{\partial p}{\partial r}\right)=r\frac{\partial\delta}{\partial t}$或$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\delta^3}{12\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\right)=\frac{\partial\delta}{\partial t}$可见，由于油膜挤压将影响油膜压强分布，因而能产生附加的承载能力来承受负载的变动。现以圆形静压支承为例加以讨论。

积分雷诺方程可求得油膜压强为

$$p=\frac{3\mu r^2}{\delta^3}\frac{\partial\delta}{\partial t}+\frac{\mu C_1}{\delta^3}\ln r+C_2 \qquad (9\text{-}10)$$

积分常数C_1及C_2可由边界条件：$r=R_i$时$p=p_r$，$r=R_0$时$p=p_0$（图9-9）求得

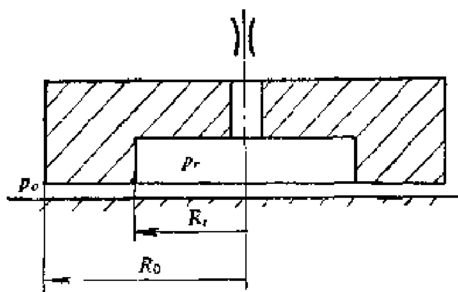


图 9-9

$$C_1=\frac{(p_0-p_r)-\frac{3\mu}{\delta^3}\frac{\partial\delta}{\partial t}(R_0^2-R_i^2)}{(\mu/\delta^3)\ln R_0/R_i}$$

$$C_2=p_r-\frac{3\mu R_i^2}{\delta^3}\frac{\partial\delta}{\partial t}-\left[\frac{(p_0-p_r)-\frac{3\mu}{\delta^3}\frac{\partial\delta}{\partial t}(R_0^2-R_i^2)}{\ln R_0/R_i}\right]\ln R_i$$

代入（9-10）式得压强分布规律为

$$p=p_r\left[1-\frac{\left(1-\frac{p_0}{p_r}\right)}{\ln R_0/R_i}\ln r/R_i\right]+\frac{3\mu}{\delta^3}\frac{\partial\delta}{\partial t}\left[(r^2-R_i^2)-(R_0^2-R_i^2)\frac{\ln r/R_i}{\ln R_0/R_i}\right] \qquad (9\text{-}11)$$

等号右边第二项即为挤压油膜所引起的压强。

承载能力 F_l 为

$$F_l=\pi p_r R_i^2-\pi p_0 R_0^2+\int_0^{2\pi}\int_{R_i}^{R_0} prdrd\theta$$

$$=\pi p_r R_i^2-\pi p_0 R_0^2+2\pi\int_{R_i}^{R_0} prdr$$

$$=\frac{\pi}{2}(R_0^2-R_i^2)\left\{\frac{p_r-p_0}{\ln R_0/R_i}-\frac{3\mu}{\delta^3}\frac{\partial\delta}{\partial t}\left[(R_0^2+R_i^2)-\frac{R_0^2-R_i^2}{\ln R_0/R_i}\right]\right\}$$

$$=\frac{\pi(R_0^2-R_i^2)(p_r-p_0)}{2\ln R_0/R_i}-\frac{3\pi\mu}{2\delta^3}\frac{\partial\delta}{\partial t}\left[(R_0^4-R_i^4)-\frac{(R_0^2-R_i^2)^2}{\ln R_0/R_i}\right]$$

$$=F_{l0}+F_{ls} \tag{9-12}$$

式中 $F_{l0}=\dfrac{\pi(R_0^2-R_i^2)(p_r-p_0)}{2\ln(R_0/R_i)}$ ——稳定负载时的承载能力；

$F_{ls}=-\dfrac{3\pi\mu}{2\delta^3}\dfrac{\partial\delta}{\partial t}\left[(R_0^4-R_i^4)-\dfrac{(R_0^2-R_i^2)^2}{\ln(R_0/R_i)}\right]$——由于负载变动，引起油膜挤压作用而产生的附加承载能力。

设 $R_0/R_i=x$ 则

$$F_{ls}=-\frac{3\pi\mu}{2\delta^3}R_0^4\frac{\partial\delta}{\partial t}\left[\left(1-\frac{1}{x^4}\right)-\frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2}{\ln x}\right]$$

$$=-K_s f(x)\frac{1}{\delta^3}\frac{\partial\delta}{\partial t} \tag{9-13}$$

式中系数 $K_s=\dfrac{3\pi\mu}{2}R_0^4$

函数 $f(x)=\left[\left(1-\dfrac{1}{x^4}\right)-\dfrac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2}{\ln x}\right]$

油膜从 δ_1 挤压至 δ_2 的时间计算如下

$$dt=-\frac{K_s f(x)}{F_{ls}}\frac{d\delta}{\delta^3}$$

积分之得

$$\Delta t=-\frac{K_s f(x)}{F_{ls}}\int_{\delta_1}^{\delta_2}\frac{d\delta}{\delta^3}=\frac{K_s f(x)}{2F_{ls}}\left(\frac{\delta_1^2-\delta_2^2}{\delta_1^2\delta_2^2}\right)$$

油膜厚度一般应大于油液中杂质颗粒尺寸的2倍，如果厚度接近于颗粒尺寸时最易磨损[1]，所以 δ_2 不应太小，一般取 $\delta_2\geqslant\frac{2}{3}\delta_1$ 则

$$\Delta t=\frac{K_s f(x)}{2F_{ls}}\left(\frac{5}{4\delta_1^2}\right) \tag{9-14}$$

[1] Thoma J., Modern Oilhydraulic Engineering, Trade & Technical press, 1970 p. 85.

如果负载变化的时间小于上述的 Δt，则油膜不会挤压至足以损坏壁面的程度，因此是安全的。

对于没有油源的平行圆盘挤压问题，由于 $R_1 = 0$，上列计算公式是不适用的，可以近似地按下列方法计算（图 9-10）：

在油液中取一环形微元 $2\pi r dr$，则

$$q = -\frac{2\pi r\delta^3}{12\mu}\frac{\partial p}{\partial r}$$

被挤压油液的流量

$$q_s = -\pi r^2\frac{\partial \delta}{\partial t}$$

挤出的流量 q_s 应该等于通过 $2\pi r$ 周长流出的流量，即

$$\pi r^2\frac{\partial \delta}{\partial t} = \frac{\pi r}{6\mu}\delta^3\frac{\partial p}{\partial r}$$

或

$$dp = \frac{6\mu}{\delta^3}\frac{\partial \delta}{\partial t}rdr$$

积分之

$$p = \frac{3\mu r^2}{\delta^3}\frac{\partial \delta}{\partial t} + C$$

积分常数由边界条件：$r = R$ 时 $p = p_0$ 求得

$$C = -\frac{3\mu R^2}{\delta^3}\frac{\partial \delta}{\partial t} + p_0$$

代入上式得

$$p = -\frac{3\mu}{\delta^3}(R^2 - r^2)\frac{\partial \delta}{\partial t} + p_0$$

挤压所引起的附加承载能力

$$F_{ls} = \int_0^R 2\pi p r dr = -\frac{6\pi\mu}{\delta^3}\frac{\partial \delta}{\partial t}\int_0^R (R^2 - r^2)\, rdr + 2\pi\int_0^R p_0 r dr - \pi R^2 p_0$$

或

$$F_{ls} = -\frac{3\pi\mu}{2\delta^3}R^4\frac{\partial \delta}{\partial t} \tag{9-15}$$

由此可得

$$dt = -\frac{3\pi\mu}{2F_{ls}}\frac{d\delta}{\delta^3}$$

油膜从 δ_1 挤压至 δ_2 所需时间为

$$\Delta t = -\frac{3\mu\pi R^4}{2F_{ls}}\int_{\delta_1}^{\delta_2}\frac{d\delta}{\delta^3} = \frac{3\pi\mu R^4}{4F_{ls}}\left(\frac{1}{\delta_2^2} - \frac{1}{\delta_1^2}\right) \tag{9-16}$$

S.J.Needs[1] 曾用两个 $d = \frac{3''}{4}$ 平板，在不同粘度的油液中进行试验，证明上述公式基本上符合实际，并且指出当油膜厚度小于 0.00125 mm时，可能是壁面对油液粘度的影响，也可能是油内杂质的影响，挤压时间要比上述公式计算所得大得多，所以按上述公式计算是偏于安全的。

对于矩形平板来说，如果长宽比 b/l 较大，可以假设油液只有 x 向流动（图 9-11），则

[1] Needs S. J., Boundary Film Investigations, Trans. ASME V62, 1940 pp. 331~345.

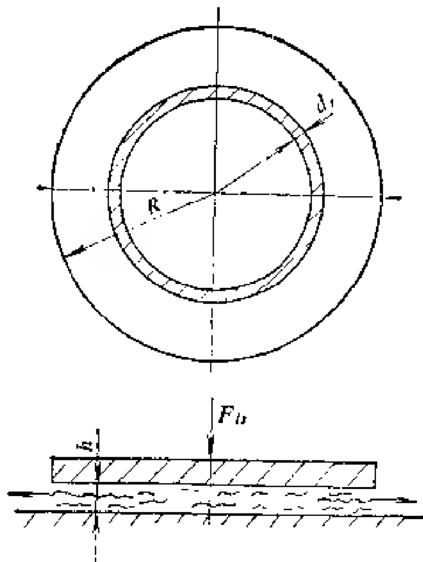


图9-10 无源平行圆盘的挤压

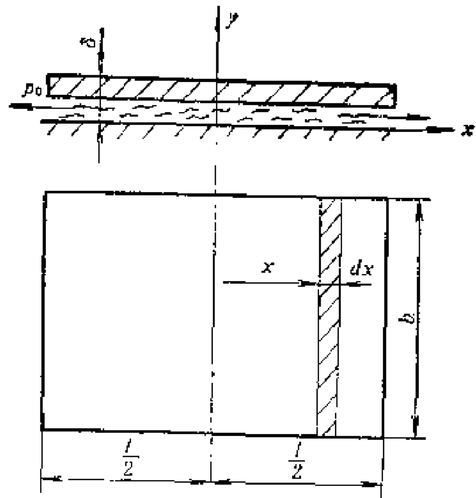


图9-11 矩形平板间油膜的挤压

可求得挤压压强，附加承载能力和挤压时间如下：

$$\left.\begin{aligned} p &= p_0 + \frac{6\mu}{\delta^3}\left(\frac{l^2}{4} - x^2\right)\frac{\partial\delta}{\partial t} \\ F_{ls} &= \frac{\mu b l^3}{\delta^3} \cdot \frac{\partial\delta}{\partial t} \\ \Delta t &= \frac{\mu b l^3}{2F_{ls}}\left(\frac{1}{\delta_2^2} - \frac{1}{\delta_1^2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{9-17}$$

如果平板接近于正方形，则挤压时油液不仅有 x 方向流动，而且也有 y 方向流动，因此它不仅在 x 方向有压降，同样在 y 方向也有压降，我们近似地认为正方形板挤压时平均压强仅为长宽比很大的矩形板的$\frac{1}{2}$，因此，附加承载能力及挤压时间近似地为

$$\left.\begin{aligned} F_{ls} &= \frac{\mu b^4}{2\delta^3}\frac{\partial\delta}{\partial t} \\ \Delta t &= \frac{\mu}{4}\frac{b^4}{F_{ls}}\left(\frac{1}{\delta_2^2} - \frac{1}{\delta_1^2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{9-18}$$

式中 b——正方形板的边长。

最后，我们将讨论轴颈压向轴承座的挤压问题，例如活塞销上的挤压。当轴颈压向轴承座时，在缝隙中的油液受到挤压，油膜建立了压强，使壁面在一定时间内不致接触。

设轴颈和轴承座的半径各为 r 及 R，当它们相互接近时，面积为 $brd\theta$ 的微元内油膜受到挤压，如果轴承的长径比 b/D 较大，轴向流速与圆周向流速比较起来可以略去，则对所取微元来说

$$q = -\frac{b\delta^3}{12\mu r}\frac{dp}{d\theta}$$

但 $\delta = c(1 - \varepsilon\cos\theta)$

最小油膜厚度 $\delta_0 = c(1 - \varepsilon)$

式中 c 为径向间隙，ε 为偏心比，即

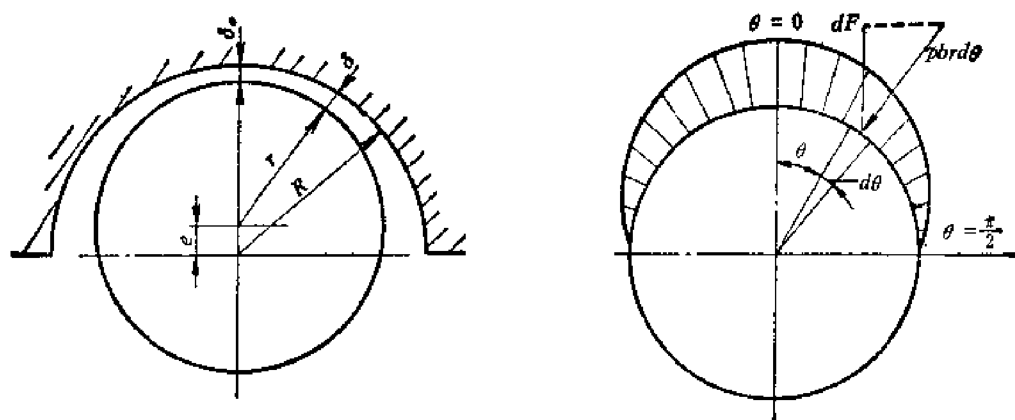


图9-12　向心轴承间油膜的挤压

$$c = R - r\,,\quad \varepsilon = \frac{e}{c}$$

因此

$$q = -\frac{bc^3(1-\varepsilon\cos\theta)^3}{12\mu r}\frac{dp}{d\theta}$$

这个流量应该等于挤压引起的流量 $q_s = -br\sin\theta\frac{\partial\delta}{\partial t}$，所以

$$br\sin\theta\frac{\partial\delta}{\partial t} = \frac{bc^3(1-\varepsilon\cos\theta)^3}{12\mu r}\frac{dp}{d\theta}$$

或

$$dp = \frac{12\mu r^2\sin\theta}{c^3(1-\varepsilon\cos\theta)^3}\frac{\partial\delta}{\partial t}d\theta$$

积分之得

$$p = -\frac{12\mu r^2}{c^3}\left[\frac{1}{2\varepsilon(1-\varepsilon\cos\theta)^2} + C_1\right]\frac{\partial\delta}{\partial t}$$

由边界条件：当 $\theta = \frac{\pi}{2}$时，$p = 0$ 得积分常数 $C_1 = -\frac{1}{2\varepsilon}$，所以压强分布为

$$p = -\frac{6\mu r^2}{c^3\varepsilon}\left[\frac{1}{(1-\varepsilon\cos\theta)^2} - 1\right]\frac{\partial\delta}{\partial t}$$

在微元上的挤压承载能力为

$$dF_{ls} = pbr\cos\theta d\theta$$

积分之得挤压承载能力为

$$F_{ls} = -2\int_0^{\pi/2}\frac{6\mu r^2}{c^3\varepsilon}\left[\frac{1}{(1-\varepsilon\cos\theta)^2} - 1\right]\frac{\partial\delta}{\partial t}br\cos\theta d\theta$$

$$= -\frac{12\mu^2 r^3}{c^3\varepsilon}b\frac{\partial\delta}{\partial t}\left[\frac{\sin\theta}{(1-\varepsilon^2)(1-\varepsilon\cos\theta)} + \frac{2\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{1-\varepsilon^2}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right) - \sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\frac{\mu b r^3}{c^3}\frac{\partial\delta}{\partial t}K \tag{9-19}$$

式中系数K为

$$K = 12\left[\frac{2}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}}\ \mathrm{arc\ tg}\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{1-\varepsilon^2}+\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2}\right]$$

K值与（$1-\varepsilon$）的关系如图 9-13 所示。

由于 ε 是油膜厚度 δ 的函数，因此油膜从 δ_1 减小至 δ_2 的挤压时间只能用数值计算法解决。上述推导是按 180° 轴承进行的，也可近似地用于全周轴承。

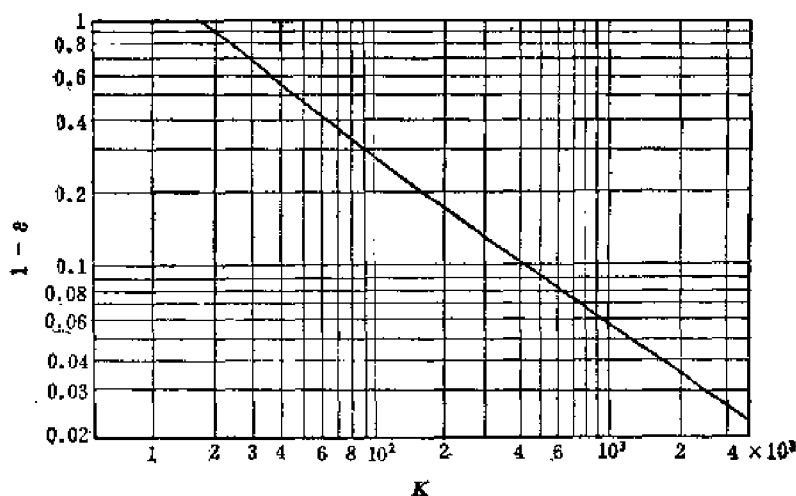


图9-13　K与（$1-\varepsilon$）的关系

§9-4　不完全平衡型静压支承

静压支承的液压反力只抵消部分负载力，剩余的负载力由金属壁面接触来承载，称为不完全平衡型静压支承。虽然这种支承的性能不大恒定，但仍广泛地在液压技术中采用，我们将作简略的介绍。

由于负载 F_w 大于液压反推力 F_l，因此，在支承节流边内不可能形成油膜，节流边发生固体接触而成为密封面，虽然由于壁面的粗糙度，油液仍能渗入壁面间，但泄漏基本上为零。因此，油腔内压强 p_r 基本上等于供油压强 p_s。由于油液的渗入，支承密封面上仍然有压强降落，这个压降规律目前还不清楚，粗略地可假设为直线分布。如果设液压反推力 F_l 与负载 F_w 的比为 B，称为平衡系数，即

$$B = F_l/F_w \tag{9-20}$$

则剩余的负载，也就是压紧力 F'_w 为

$$F'_w = F_w - F_l = F_w(1-B) \tag{9-21}$$

一般情况下，B 约取为 0.9 左右。

支承的摩擦力 F'_f 为

$$F'_f = fF'_w = fF_w(1-B) = f(1-B)F_w \tag{9-22}$$

摩擦系数 f 约为 0.05～0.17[1][2]，对液机中的滑履等来讲，可取 $f\approx 0.1$[3]，如果 B 取 0.9 则不完全平衡静压支承的摩擦力约为 $0.01F_w$，也就是说采用静压支承方式，即使并不

〔1〕 Wüsthoff P., Hydrostatische Flügelpumpen, thesis TH Eindhoven 1969.
〔2〕 Vogelpohl G., Betriebssichere Gleitlager, Springer 1956.
〔3〕 Thoma J. U., Modern Oilhydraulic Engineering, Trade & Technical press 1970, p. 87.

完全平衡，摩擦力也大为降低，或者说它使摩擦系数从 f 降为 $f(1-B)$。

由于不完全平衡静压支承壁面间是固体接触，磨损是不可避免的，为了减小磨损应使壁面间呈边界润滑状态，即应有一定的油液能渗入，因此壁面光洁度不应过高，一般▽10已足够，并且要注意支承面的比压 $p_c=F_w'/A_c$ 和运动速度 U，使 p_cU 值不超过材料的许用值。这里 A_c 是接触面积。常用材料的 p_c，U 和 p_cU 许用值如表 9-3 所示。

表9-3 常用材料的 p_c，v 及 p_cv 值

材料	牌号	许用值			硬度 HB	
		p_c, bar	v, m/s	p_cU	金属模	砂模
铸造磷青铜	ZQSn10-1	150	10	150	90～180	80～100
压力加工磷青铜	QSn6.5-0.1					
锡青铜	ZQSn5-5-5	80	3	12	60	60
	ZQSn4-4-17	100	4	100		60
铝青铜	QAl10-3-15	200	5	150	25	140
铸造铝青铜	ZQAl10-3-15	200	5	150	120	110
铸造铝青铜	ZQAl17-1.5-1.5	250	8	200		
金属模铸铅青铜	ZQPb30	250	12	300	25	
9-4铝铁青铜	ZQAl9-4	300	10	600		

由于密封面间的压强分布目前还不清楚，计算时虽可假设为直线分布，但实际并不如此，为了减小它的影响，密封面不宜太大，J.Thoma 建议密封面的面积 A_c 应为

$$A_c<2(1-B)\frac{F_w}{p_s} \tag{9-23}$$

这样即使密封面内的压强完全等于 p_s 也不会使支承推开。如果由于 A_c 面积太小而使支承比压 p_c 过大，则可以在密封面内外采用辅助支承面（图 9-14）。

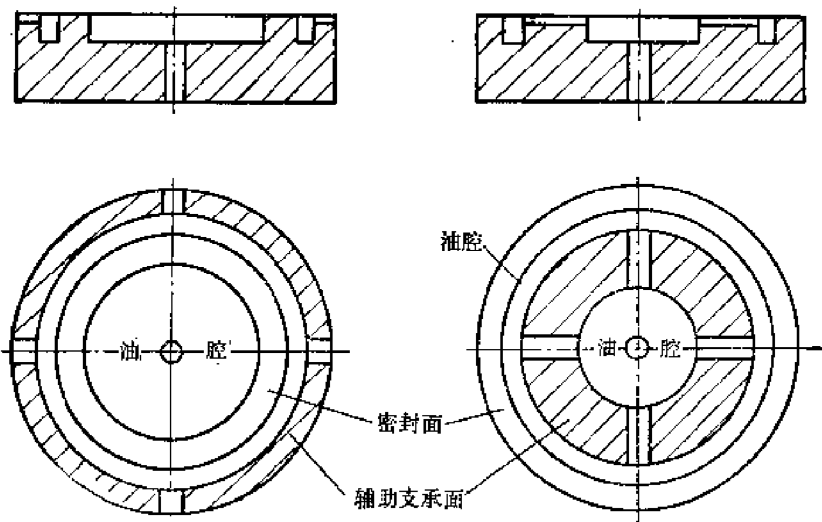


图9-14 带辅助支承面的支承

§9-5 柱塞式液机完全平衡型滑履(靴)的能量分析和最佳尺寸

高压或高速柱塞式泵或柱塞式马达，为了避免柱塞与斜盘间过高的接触应力，采用了滑履（靴）结构（图9-15)，为了解决斜盘与滑履的摩擦磨损问题，从液压缸引高压油通入滑履底部，使滑履上产生液压反推力而成为静压支承的形式、由于滑履在斜盘上运动，它的液压反推力 F_l 垂直于斜盘，所以抵抗柱塞传递过来的压紧力（负载）的只是它的分量 $F_l\cos\theta$，如果这个力与负载平衡，这种滑履就称为完全平衡型。当然，滑履也可设计成不完全平衡型，不完全平衡型滑履已如上节所述，不再多赘，下面我们将对完全平衡型滑履进行讨论。

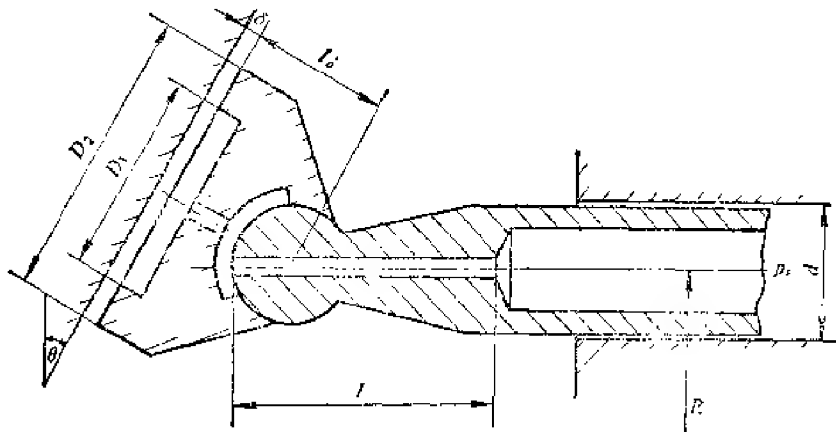


图9-15 滑履（靴）和柱塞

完全平衡型滑履上所产生的液压反推力 F_l 的轴向分量 $F_l\cos\theta$ 能与活塞传递过来的负载相平衡，而使滑履能微微抬起，与斜盘间产生间隙形成油膜，使滑履与斜盘间成为液体摩擦。我们知道，由柱塞传递过来的负载有：液压缸内的液压力 $\frac{\pi}{4}d^2p$，柱塞与缸壁间的摩擦力，柱塞的惯性力以及吸油时避免滑履脱离斜盘的回程弹簧力，总的负载以 $K_f\frac{\pi}{4}d^2p_s$ 表示。因为除了液压缸内液压力外，其他的负载均随柱塞所处的位置而异，也就是说滑履在不同位置时负载是不同的，即系数 K_f 是随柱塞位置不同而异的，在额定工况下 K_f 的平均值约为1.03～1.15。由于滑履与斜盘间存在间隙 δ，因此不可避免地要产生泄漏 q

$$q=\frac{\pi\delta^3}{6\mu}\frac{p_c}{\ln D_2/D_1}\frac{1}{c_e}$$

式中 c_e——考虑层流起始段影响的系数。

有压油液的泄漏是一种能量损失，显然在一定的滑履尺寸（D_1，D_2）下 δ 太大，泄漏损失增大，液机效率就要降低，但是 δ 太小，则摩擦损失增大，效率也要降低，因此在一定的滑履尺寸的条件下，存在着一个损失最小的 δ 值。或者反过来说，如果 δ 一定，滑履尺寸(滑履底部油膜面积与油缸断面的比，即 $(D_2^2-D_1^2)/d^2$)太大，则摩擦损失增大，但如尺寸太小，泄漏损失就要增大，也存在着损失最小的滑履尺寸。

在滑履上作用着二个力，一个是柱塞传递来的负载 $K_f p_s \frac{\pi}{4} d^2$，这个力与斜盘的垂线成 θ 角，另一个是滑履底部的油膜及油腔内的作用力，这个力为 $\pi (D_2^2 - D_1^2) p_r / 8 \ln \frac{D_2}{D_1}$，它垂直于斜盘，这两个力的平衡为

$$\frac{\pi p_r (D_2^2 - D_1^2)}{8 \ln D_2 / D_1} \cos\theta = \frac{K_f \pi p_s d^2}{4}$$

由此可得

$$p_r = \frac{2 K_f p_s d^2}{(D_2^2 - D_1^2)} \frac{\ln D_2 / D_1}{\cos\theta} \tag{9-24}$$

代入上述泄漏量 q 公式得

$$q = \frac{\pi \delta^3 K_f d^2}{3 \mu c_e (D_2^2 - D_1^2) \cos\theta} p_s \tag{9-25}$$

由于液压缸内的压强是按排油压强和吸油压强交变的（图 9-16），如果吸油压强为大气压，则时间平均压强为 $p_s/2$，由此泄漏功率损失为

$$\frac{p_s}{2} q = \frac{\pi \delta^3 p_s^2 K_f d^2}{6 \mu c_e (D_2^2 - D_1^2) \cos\theta}$$

如果缸的分布圆半径为 R，则滑履的分布圆半径也是 R，但滑履是在具有倾角 θ 的斜盘上运动的，它的运动轨迹是个椭圆（图 9-17）。因此计算滑履在斜盘上的运动速度就比较复

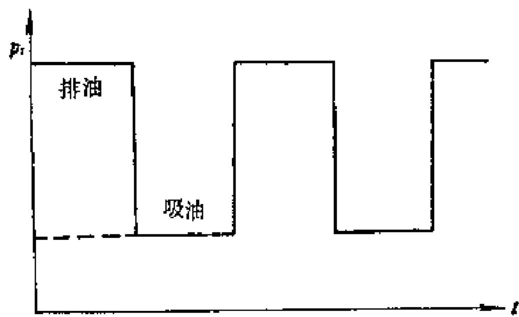


图9-16　液压缸内的压强

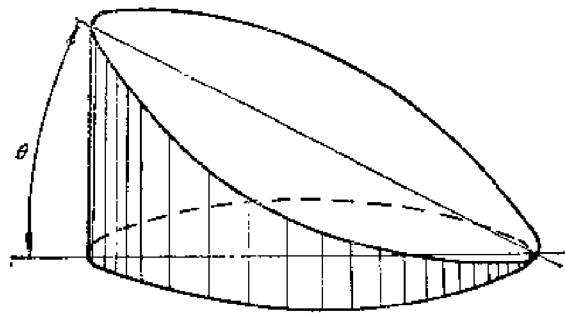


图9-17　斜　盘

杂。我们采用等效的办法，认为滑履在斜盘上的等效半径为 $R\sqrt{1 + f(\theta)}$，这里函数 $f(\theta)$[1]为

$$f(\theta) = \frac{(\sec\theta - 1)^2}{2} + \frac{l_0^2 \mathrm{tg}^2\theta}{2R^2} + \frac{4(\sec\theta - 1)}{\pi}$$

如果液机的转速为每分 n 转，则角速度为 $\omega = \frac{\pi n}{30}$，滑履相对于斜盘间的间隙 δ 很小，沿间隙高度的速度呈直线变化，所以 $\frac{du}{dz} = \frac{U}{\delta}$，因此，液体摩擦力为

$$A \mu \frac{du}{dz} = \frac{\pi}{4} (D_2^2 - D_1^2) \mu \frac{\pi n R}{30 \delta} \sqrt{1 + f(\theta)}$$

摩擦力矩 T 则为摩擦力与旋转等效半径的乘积

〔1〕 市川常雄，油圧要素の最近における进步，第331回讲习会，1970 p. 8 .

$$T=\frac{\pi^2\mu R^2 n(D_2^2-D_1^2)[1+f(\theta)]}{120\,\delta}$$

因此液体摩擦功率损失为

$$T\omega=\frac{\pi^3\mu R^2 n^2(D_2^2-D_1^2)[1+f(\theta)]}{3600\,\delta}$$

由此，总的功率损失为

$$E_L=\frac{1}{2}p_s q+T\omega$$

$$=\frac{\pi\delta^3 K_f p_s^2 d^2}{6c_e\mu(D_2^2-D_1^2)\cos\theta}+\frac{\pi^3\mu R^2 n^2(D_2^2-D_1^2)[1+f(\theta)]}{3600\,\delta}$$

液机一个缸的理论功率为缸的每秒排量与压强的乘积，因为柱塞行程为 $2R\text{tg}\,\theta$，所以一个缸每秒排量为 $\left[\left(\frac{n}{60}\right)\frac{\pi}{4}d^2\right](2R\text{tg}\,\theta)=\frac{\pi n}{120}Rd^2\text{tg}\,\theta$，则理论功率 E_{cyl} 为

$$E_{cyl}=\frac{\pi n}{120}p_s R d^2\text{tg}\,\theta$$

由此可知，采用滑履结构，在滑履上损失的效率 $\Delta\eta=E_L/E_{cyl}$，如果以 $\overline{D}=D_1/D_2$，$\overline{D}_2=D_2/d$，$\overline{R}=R/d$ 及 $\overline{\delta}=\delta/d$ 代入之，则

$$\Delta\eta=\frac{20}{\sin\theta}\left(\frac{p_s}{\mu n}\right)\frac{K_f\overline{\delta}^3}{\overline{R}\,\overline{D}_2^2(1-\overline{D}^2)c_e}+\frac{\pi^2[1+f(\theta)]}{30\text{tg}\,\theta}\left(\frac{\mu n}{p_s}\right)\frac{\overline{R}\,\overline{D}_2^2(1-\overline{D}^2)}{\overline{\delta}}$$

设滑履几何特性参数 β 为

$$\beta=\left(\frac{p_s}{\mu n}\right)\frac{1}{\overline{R}\,\overline{D}_2^2(1-\overline{D}^2)} \tag{9-26}$$

则

$$\Delta\eta=\frac{20K_f}{c_e\sin\theta}\beta\overline{\delta}^3+\frac{\pi^2[1+f(\theta)]}{30\beta\,\overline{\delta}\,\text{tg}\,\theta} \tag{9-27}$$

由此可见，滑履上的损失与 $\overline{\delta}$ 及 β 有关。一般情况下 $\overline{\delta}$ 尽可能取得小些，但受到加工条件的限制，即表面光洁度，热膨胀变形等的限制，也受到油液的滤清条件的限制（至少应为污染颗粒尺度的二倍），所以 δ 值可根据加工条件和滤清条件选定。这样就给定了 $\overline{\delta}$ 值，在给定 $\overline{\delta}$ 的条件下，可按 $\frac{d\Delta\eta}{d\beta}=0$ 求出损失最小的几何特性参数 β，求出 β 后即可确定滑履尺寸

$$\frac{d\Delta\eta}{d\beta}=\frac{20K_f}{c_e\sin\theta}\overline{\delta}^3-\frac{\pi^2[1+f(\theta)]}{30\beta^2\overline{\delta}\,\text{tg}\,\theta}=0$$

解上式得

$$\beta=\frac{\pi}{\overline{\delta}^2\sqrt{600K_f}}\sqrt{[1+f(\theta)]c_e\cos\theta}$$

$$=\frac{0.122}{\overline{\delta}^2}\sqrt{c_e[1+f(\theta)]\cos\theta}$$

一般轴向柱塞式液机斜盘的倾角 θ 不超过 20°，在 $\theta=0°\sim20°$ 范围内 $\sqrt{[1+f(\theta)]\cos\theta}=1\sim1.017$，如果取平均值计算，则

$$\beta=0.123(c_e)^{\frac{1}{2}}/\overline{\delta}^2 \tag{9-28}$$

如果滑履尺寸已定，则β值就可确定，按$\frac{d\Delta\eta}{d\bar{\delta}}=0$可求出损失最小的$\bar{\delta}$值

$$\frac{d\Delta\eta}{d\bar{\delta}}=\frac{60K_f}{c_e\sin\theta}\cdot\beta\bar{\delta}^2-\frac{\pi^2[1+f(\theta)]}{30\beta\bar{\delta}^2\mathrm{tg}\,\theta}=0$$

解上式得

$$\bar{\delta}=0.266(c_e)^{\frac{1}{4}}/\beta^{\frac{1}{2}}$$

或

$$\beta=0.0708c_e^{\frac{1}{2}}/\bar{\delta}^2 \tag{9-29}$$

如果将β与$\bar{\delta}$的关系作成对数图，如图9-18所示为$c_e=1$时的关系曲线，图中上面的直线表示（9-28）式，下面的直线则表示（9-29）式。

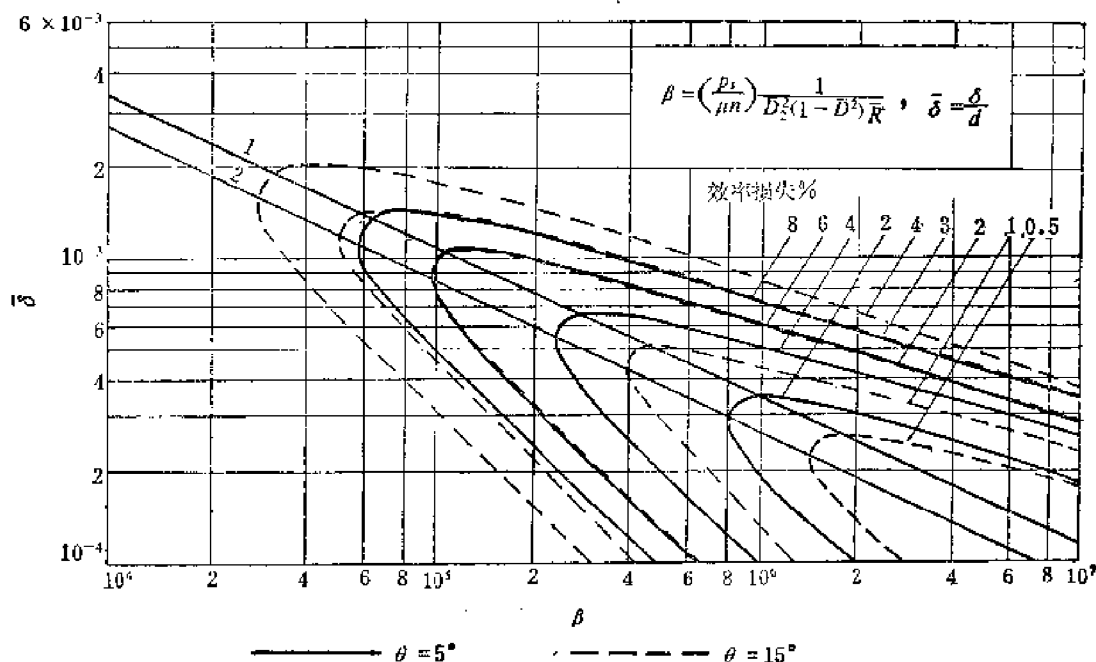


图9-18 滑履的效率损失

1—给定$\bar{\delta}$时的最小损失 2—给定β时的最小损失

•§9-6 变工况时滑履的最佳尺寸

以上讨论的是转速n，压强p_s和倾角θ不变的情况，实际上有时要求设计上述参数在一定范围内变化的液机，例如液压泵的使用压强可能变化，液压马达的斜盘倾角变化以便获得转速变化等等。这些参数的变化将影响功率损失。如果液机没有明显的主要操作条件，这就应使它在整个变化范围内平均损失最小。下面我们按转速变化，压强变化，倾角变化等情况分别进行讨论。

1. 转速变化

如果转速范围由n_1至n_2，则由（9-26）式可见滑履几何特性参数β也将变化。设$\beta=\beta_1\frac{n_1}{n}$，式中$\beta_1$是转速为$n_1$的特性参数值。在$n_1$至$n_2$范围内的平均效率损失可将效率损失$\Delta\eta$对$n$积分然后再以转速范围除之，即$\Delta\eta_n=\frac{1}{n_2-n_1}\int_{n_1}^{n_2}\Delta\eta dn$，则

$$\Delta\eta_n = \frac{1}{n_2 - n_1}\int_{n_1}^{n_2}\left\{\frac{20K_f\beta_1 n_1\bar{\delta}^3}{nc_e\sin\theta} + \frac{\pi^2[1+f(\theta)]n}{30\beta_1 n_1\bar{\delta}\,\mathrm{tg}\,\theta}\right\}dn$$

$$= \frac{1}{n_2 - n_1}\left[\frac{20K_f\beta_1 n_1\bar{\delta}^3}{c_e\sin\theta}\ln n + \frac{\pi^2[1+f(\theta)]n^2}{60\beta_1 n_1\bar{\delta}\,\mathrm{tg}\,\theta}\right]_{n_1}^{n_2}$$

设 $n_2/n_1 = K_n$，则

$$\Delta\eta_n = \frac{20K_f\beta_1\bar{\delta}^3}{c_e(K_n - 1)\sin\theta}\ln K_n + \frac{\pi^2[1+f(\theta)](K_n+1)}{60\beta_1\bar{\delta}\,\mathrm{tg}\,\theta}$$

在选定最小允许 $\bar{\delta}$ 情况下，按 $\frac{d\Delta\eta_n}{d\beta_1} = 0$ 求得损失最小的β_1为

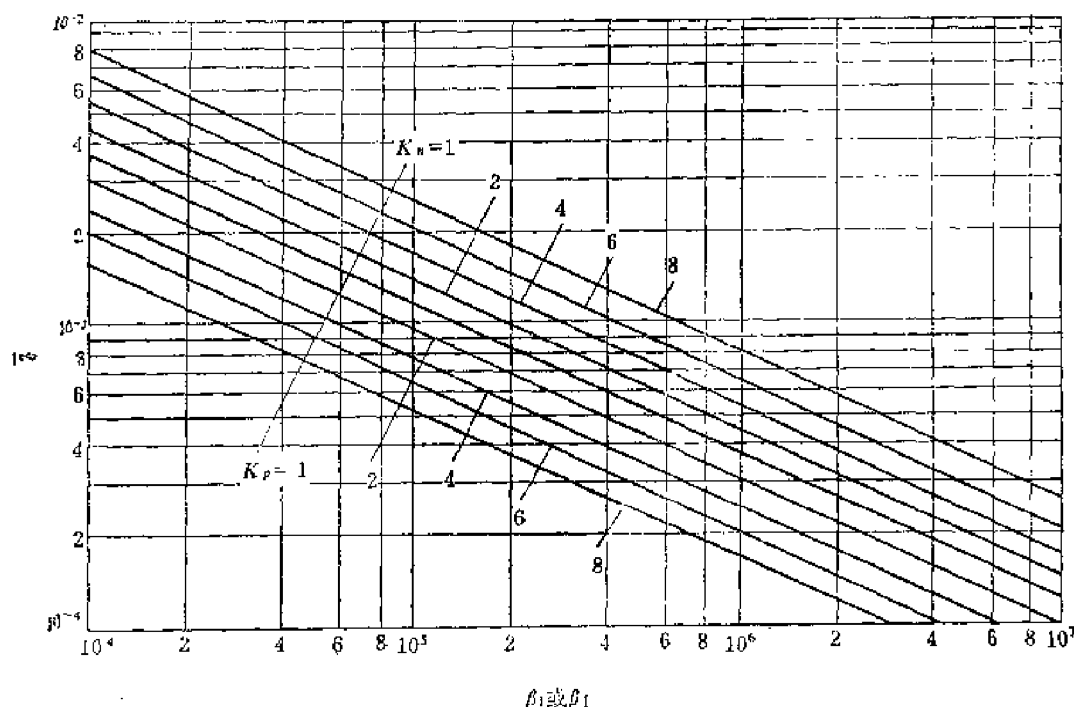
$$\beta_1 = \frac{0.087}{\bar{\delta}^2}\sqrt{\frac{(K_n^2 - 1)c_e}{\ln K_n}} \qquad (9\text{-}30)$$

在给定滑履的条件下，按 $\frac{d\Delta\eta_n}{d\bar{\delta}} = 0$，求得损失最小的 $\bar{\delta}$ 为：

$$\bar{\delta} = \frac{0.224}{\sqrt{\beta_1}}\left[\frac{c_e(K_n^2 - 1)}{\ln K_n}\right]^{\frac{1}{4}}$$

$$\beta_1 = \frac{0.05}{\bar{\delta}^2}\sqrt{\frac{(K_n^2 - 1)c_e}{\ln K_n}} \qquad (9\text{-}31)$$

图9-19示出了$c_e = 1$时，不同K_n值时β_1与 $\bar{\delta}$ 的关系。



$$\beta_1 = \left(\frac{p_s}{\mu n_1}\right)\frac{1}{\bar{D}_2^2(1 - \bar{D}^2)\bar{R}}$$

$$\beta_1 = \left(\frac{p_1}{\mu n_1}\right)\frac{1}{\bar{D}_2^2(1 - \bar{D}^2)\bar{R}}$$

$\bar{\delta} = \frac{\delta}{d}$，$K_n = \frac{n_2}{n_1}$，$K_p = \frac{p_2}{p_1}$

图9-19　不同K_n和K_p时β_1和β_2与 $\bar{\delta}$ 的关系

2. 压强变化

如果液机使用压强范围为 p_{I} 至 p_{II}，则滑履几何特性参数按（9-26）式为 $\beta=\beta_{\mathrm{I}}\frac{p_r}{p_{\mathrm{I}}}$，式中 β_{I} 为压强 p_{I} 时的特性参数值。用同样方法求得在 p_{I} 至 p_{II} 压强范围内的平均效率损失为

$$\Delta\eta_p=\frac{1}{p_{\mathrm{II}}-p_{\mathrm{I}}}\int_{p_{\mathrm{I}}}^{p_{\mathrm{II}}}\Delta\eta dp=\frac{1}{p_{\mathrm{II}}-p_{\mathrm{I}}}\int_{p_{\mathrm{I}}}^{p_{\mathrm{II}}}\left\{\frac{20K_f\beta_{\mathrm{I}}p}{p_{\mathrm{I}}c_e\sin\theta}\bar{\delta}^3+\frac{\pi^2[1+f(\theta)]p_{\mathrm{I}}}{30p\beta_{\mathrm{I}}\bar{\delta}\operatorname{tg}\theta}\right\}dp$$

$$=\frac{10K_f\beta_{\mathrm{I}}(p_{\mathrm{II}}+p_{\mathrm{I}})\bar{\delta}^3}{c_e p_{\mathrm{I}}\sin\theta}+\frac{\pi^2[1+f(\theta)]p_{\mathrm{I}}}{30\beta_{\mathrm{I}}\bar{\delta}(p_{\mathrm{II}}-p_{\mathrm{I}})}\ln\frac{p_{\mathrm{II}}}{p_{\mathrm{I}}}$$

以 $p_{\mathrm{II}}/p_{\mathrm{I}}=K_p$ 代入则

$$\Delta\eta_p=\frac{10\beta_{\mathrm{I}}K_f(K_p+1)\bar{\delta}^3}{c_e\sin\theta}+\frac{\pi^2[1+f(\theta)]}{30\beta_{\mathrm{I}}\bar{\delta}(K_p-1)}\ln K_p$$

如果最小允许 $\bar{\delta}$ 值已选定，则按 $\frac{d\Delta\eta_p}{d\beta_{\mathrm{I}}}=0$ 可求出损失最小的 β_{I} 为

$$\frac{d\Delta\eta_p}{d\beta_{\mathrm{I}}}=\frac{10K_f\bar{\delta}^3(K_p+1)}{c_e\sin\theta}-\frac{\pi^2[1+f(\theta)]}{30\beta_{\mathrm{I}}^2\bar{\delta}(K_p-1)}\ln K_p=0$$

则

$$\beta_{\mathrm{I}}=\frac{0.1735}{\bar{\delta}^2}\sqrt{\frac{c_e\ln K_p}{(K_p^2-1)}}\tag{9-32}$$

在给定 β_{I} 时的最佳 $\bar{\delta}$ 值为

$$\bar{\delta}=\frac{0.317}{\sqrt{\beta_{\mathrm{I}}}}\left(\frac{c_e\ln K_p}{K_p^2-1}\right)^{1/4}$$

或

$$\beta_{\mathrm{I}}=\frac{0.101}{\bar{\delta}^2}\left(\frac{c_e\ln K_p}{K_p^2-1}\right)^{1/2}\tag{9-33}$$

图 9-19 示出了不同 K_p 值时 β_{I} 与 $\bar{\delta}$ 的关系。

3、转速和压强变化

如果液机的使用转速范围为 n_1 至 n_2，压强范围为 p_{I} 至 p_{II}，则几何特性参数为：$\beta=\beta_{1\mathrm{I}}\frac{n_1 p}{n p_{\mathrm{I}}}$，式中 $\beta_{1\mathrm{I}}$ 为 n_1 及 p_{I} 时的特性参数值，在两个参数变化范围内的平均效率损失为

$$\Delta\eta_{np}=\frac{1}{(n_2-n_1)(p_{\mathrm{II}}-p_{\mathrm{I}})}\iint\Delta\eta dp dn$$

$$=\frac{1}{(n_2-n_1)(p_{\mathrm{II}}-p_{\mathrm{I}})}\iint\left\{\frac{20K_f}{c_e\sin\theta}\beta_{1\mathrm{I}}\frac{n_1 p}{p_{\mathrm{I}}n}\bar{\delta}^3+\frac{\pi^2[1+f(\theta)]p_{\mathrm{I}}n^2}{30\beta_{1\mathrm{I}}n_1 p\bar{\delta}\operatorname{tg}\theta}\right\}dp dn$$

$$=\frac{1}{(n_2-n_1)(p_{\mathrm{II}}-p_{\mathrm{I}})}\left\{\frac{10K_f}{c_e\sin\theta}\beta_{1\mathrm{I}}\frac{n_1 p^2\bar{\delta}^3}{p_{\mathrm{I}}}\ln n+\frac{\pi^2[1+f(\theta)]p_{\mathrm{I}}n^2}{60\beta_{1\mathrm{I}}n_1\bar{\delta}\operatorname{tg}\theta}\ln p\right\}_{p_{\mathrm{I}},\ n_1}^{p_{\mathrm{II}},\ n_2}$$

$$=\frac{10K_f\beta_{1\mathrm{I}}\bar{\delta}^3(K_p+1)\ln K_n}{c_e\sin\theta(K_n-1)}+\frac{\pi^2[1+f(\theta)](K_n+1)\ln K_p}{60\beta_{1\mathrm{I}}\bar{\delta}(K_p-1)\operatorname{tg}\theta}$$

由此求得在给定最小允许$\bar{\delta}$值时的最佳β_{1I}值为

$$\beta_{1I}=\frac{0.123}{\bar{\delta}^2}\sqrt{\frac{c_e(K_n^2-1)\ln K_p}{(K_p^2-1)\ln K_n}} \tag{9-34}$$

同样，可求得给定β_{1I}值时的最佳$\bar{\delta}$值

$$\bar{\delta}=\frac{0.273}{\sqrt{\beta_{1I}}}\left[\frac{c_e(K_n^2-1)\ln K_p}{(K_p^2-1)\ln K_n}\right]^{\frac{1}{4}}$$

或

$$\beta_{1I}=\frac{0.0708}{\bar{\delta}^2}\sqrt{\frac{c_e(K_n^2-1)\ln K_p}{(K_p^2-1)\ln K_n}} \tag{9-35}$$

4. 斜盘倾角变化

前面已经指出，在$\theta=0°\sim20°$范围内$\sqrt{[1+f(\theta)]\cos\theta}$值约为1～1.017，如果平均以1.009计算，则$[1+f(\theta)]=\frac{1.018}{\cos\theta}$，由此$\frac{[1+f(\theta)]}{\text{tg}\,\theta}=\frac{1.018}{\sin\theta}\approx\frac{1}{\sin\theta}$，代入(9-27)式我们得效率损失的简化式为

$$\Delta\eta=\frac{1}{\sin\theta}\left[\frac{20K_f\beta\bar{\delta}^3}{c_e}+\frac{\pi}{30\beta\bar{\delta}}\right] \tag{9-36}$$

对泵来讲，θ的改变只使流量发生变化，对压强和转速都没有影响，所以也不影响β值，由（9-36）式可见损失将随着θ的增大而减小。

对于液压马达来讲，一个缸的排量为

$$2R\frac{\pi}{4}d^2\text{tg}\,\theta=\frac{\pi R}{2}d^2\text{tg}\,\theta$$

如果转速为每分n转，马达具有z个缸，设进入马达的流量恒定，也就是每秒排量不变，即$\frac{\pi nzR}{120}d^2\text{tg}\,\theta=$常数，由于$R$、$z$及$d$均为定值，所以

$$n\,\text{tg}\,\theta=\text{常数}=K \tag{9-37}$$

因为θ角一般不超过20°，我们可以近似地认为$\sin\theta\approx\text{tg}\,\theta$，则$\sin\theta\approx K/n$，代入(9-36)式，我们得效率损失的近似式为

$$\Delta\eta\approx\frac{n}{K}\left(\frac{20K_f\beta\bar{\delta}^3}{c_e}+\frac{\pi}{30\beta\bar{\delta}}\right) \tag{9-38}$$

当倾角在θ_1及θ_2范围变化时，转速将在n_1至n_2内变化，这时滑履的几何特性参数也将随转速而变即$\beta=\beta_1\frac{n_1}{n}$，式中$\beta_1$为$n_1$时的特性参数。在$\theta_1$至$\theta_2$范围内的平均效率损失为

$$\Delta\eta_\theta=\frac{1}{n_2-n_1}\int_{n_1}^{n_2}\Delta\eta\,dn$$

以（9-38）式及$\beta=\beta_1\frac{n_1}{n}$代入则

$$\Delta\eta_\theta\approx\frac{1}{K(n_2-n_1)}\int_{n_1}^{n_2}\left(\frac{20K_f\beta_1n_1\bar{\delta}^3}{c_e}+\frac{\pi n^2}{30\beta_1n_1\bar{\delta}}\right)dn$$

积分之，并以$\frac{n_2}{n_1}=K_n$代入得

$$\Delta\eta_n\approx\frac{1}{K}\left[\frac{20K_f\beta_1 n_1\bar{\delta}^4}{c_e}+\frac{\pi n_1(K_n^3-1)}{90\beta_1\bar{\delta}(K_n-1)}\right]$$

在给定最小允许$\bar{\delta}$的条件下，按$\frac{d\Delta\eta_\theta}{d\beta_1}=0$求得最佳$\beta_1$值为

$$\beta_1=\frac{\pi}{30\sqrt{2}\,\bar{\delta}^2}\sqrt{\frac{(K_n^3-1)c_e}{(K_n-1)K_f}} \tag{9-39}$$

如果液压马达不仅要求有不同工作转速，而且使用压强也不同，则用同样方法可求得在选定$\bar{\delta}$值下的滑履最佳几何特性参数β_{1I}

$$\beta_{1I}=\frac{\pi}{30\bar{\delta}^2}\sqrt{\frac{c_e(K_n^3-1)\ln K_p}{(K_n-1)(K_p^2-1)K_f}} \tag{9-40}$$

式中　β_{1I}为转速为n_1压强为p_1时的特性参数。

我们将上述各式列如表 9-4。

表　9-4

工作条件	$\bar{\delta}$给定下的β值	β给定下的$\bar{\delta}$值
转速和压强不变	$\beta=\frac{0.123\sqrt{c_e}}{\bar{\delta}^2}$	$\bar{\delta}^2=\frac{0.0708\sqrt{c_e}}{\beta}$
压强固定，转速变化，倾角变化不影响转速	$\beta_1=\frac{0.087}{\bar{\delta}^2}\sqrt{\frac{(K_n^2-1)c_e}{\ln K_n}}$	$\bar{\delta}^2=\frac{0.05}{\beta_1}\sqrt{\frac{(K_n^2-1)c_e}{\ln K_n}}$
转速固定，压强变化，倾角不影响压强	$\beta_I=\frac{0.1735}{\bar{\delta}^2}\sqrt{\frac{c_e\ln K_p}{(K_p^2-1)}}$	$\bar{\delta}^2=\frac{0.1}{\beta_I}\sqrt{\frac{c_e\ln K_p}{(K_p^2-1)}}$
压强转速变化，倾角变化不影响压强和转速	$\beta_{1I}=\frac{0.123}{\bar{\delta}^2}\sqrt{\frac{(K_n^2-1)c_e\ln K_p}{(K_p^2-1)\ln K_n}}$	$\bar{\delta}^2=\frac{0.0708}{\beta_{1I}}\sqrt{\frac{(K_n^2-1)c_e\ln K_p}{(K_p^2-1)\ln K_n}}$
压强流量固定，倾角调节转速	$\beta_1=\frac{0.0705}{\bar{\delta}^2}\sqrt{\frac{(K_n^3-1)c_e}{(K_n-1)}}$	$\bar{\delta}^2=\frac{0.0419}{\beta_1}\sqrt{\frac{(K_n^3-1)c_e}{(K_n-1)}}$
流量一定，压强变化，倾角调节转速	$\beta_{1I}=\frac{0.1}{\bar{\delta}^2}\sqrt{\frac{(K_n^3-1)c_e\ln K_p}{(K_n-1)(K_p^2-1)}}$	$\bar{\delta}^2=\frac{0.059}{\beta_{1I}}\sqrt{\frac{(K_n^3-1)c_e\ln K_p}{(K_n-1)(K_p^2-1)}}$

§ 9-7　滑履的轴向刚度

滑履上的负载F_w包括液压缸内的液压力$\frac{\pi}{4}p_s d^2$，柱塞与缸之间的摩擦力，柱塞的惯性力以及回程弹簧力，我们曾以系数K_f来考虑液压力以外的力，即负载$F_w=K_f\frac{\pi}{4}p_s d^2$，实际上除了液压缸内压强产生的力以外，其他的力均因柱塞所处的位置而异，也就是说滑履上受到的负载是变动的。由于滑履采用了具有进口阻尼的双重阻尼系统，完全平衡型滑履具有一

定的刚度是能够适应负载变动的。

滑履在斜盘上工作，滑履抵抗负载的只是它所产生的液压反力的分量，也就是滑履的实际承载能力 F_l 为

$$F_l=\frac{\pi(D_2^2-D_1^2)}{8\ln D_2/D_1}p_r\cos\theta$$

由此可见，滑履的承载能力 F_l 与滑履的尺寸和油腔压强 p_r 有关，对于一定的滑履，承载能力将随油腔压强而变，将上式微分得

$$dF_l=\frac{\pi(D_2^2-D_1^2)}{8\ln D_2/D_1}\cos\theta\, dp_r$$

即任何微小的油腔压强变化将引起承载能力的变化，如果我们把 $\lambda=\left|\frac{dF}{F}\right|$ 称为承载变动系数，则 $\lambda=\left|\frac{dF_l}{F_l}\right|=\left|\frac{dp_r}{p_r}\right|$，油腔压强 p_r 可由连续性方程确定

$$\frac{\pi d_0^4}{128c\mu l}(p_s-p_r)=\frac{\pi\delta^3}{6\mu\ln\frac{D_2}{D_1}}\frac{p_r}{c_e}$$

式中 d_0——进口阻尼管直径；

l——进口阻尼管长度；

c——阻尼管中层流起始段影响的系数。

由此得

$$p_r=\frac{p_s}{1+\frac{64}{3\ln D_2/D_1}\frac{c}{c_e}\frac{l}{d_0^4}\delta^3}=\frac{p_s}{1+k\delta^3} \tag{9-41}$$

式中

$$k=\frac{64}{3\ln\frac{D_2}{D_1}}\frac{c}{c_e}\frac{l}{d_0^4}$$

所以

$$\frac{dF_l}{F_l}=\frac{dp_r}{p_r}=-\frac{3k\delta^2}{1+k\delta^3}d\delta \tag{9-42}$$

式中等号右边的负号说明油膜厚度 δ 的减小将使承载能力 F_l 增大。$d\delta$ 的理论最大值为 δ，即油膜完全被破坏，为了使油膜厚度能大于杂质颗粒尺度，取 $d\delta=-\frac{1}{3}\delta$，则在此特定条件下的承载变动系数 λ_0 为

$$\lambda_0=\frac{dF_l}{F_l}=\frac{k\delta^3}{1+k\delta^3} \tag{9-43}$$

由此可见，在一定的油膜厚度 δ 下，k 值越大允许承载变动系数也越大，也就是滑履承受变动负载的能力也越大。由 $k=64cl/3c_e d_0^4\ln\frac{D_2}{D_1}$ 可见，增大 k 值的途径有二：

1. 增大 l/d_0^4，即增大阻尼管长度 l 或减小阻尼管直径 d_0，这两个措施都受到加工工艺的限止；

2. 减小 D_2/D_1，但 D_2/D_1 的值也有一定的制约，D_2/D_1 的减小将使滑履的抗倾能力降低，这将在以后讨论。

总之，从定性来说，为了增大滑履承受变载能力，应尽可能增加进口阻尼，适当减小D_2/D_1。下面我们将进一步加以探讨。

我们知道，支承的刚度$S=-\frac{dF_t}{d\delta}$,如果我们以$\bar{S}=S\Big/\frac{F_t}{\delta}=-\delta dF_t/F_t d\delta$为滑履的相对刚度，或称为滑履的轴向刚度系数，则由（9-42）式得

$$\bar{S}=-\frac{\delta dF_t}{F_t d\delta}=\frac{3k\delta^3}{1+k\delta^3}=3\lambda_0 \tag{9-44}$$

如果设 $\alpha=p_r/p_s$，则$\alpha=\frac{1}{1+k\delta^3}$代入上式得

$$\bar{S}=3\lambda_0=\frac{3k\delta^3}{1+k\delta^3}=3\left(1-\frac{1}{1+k\delta^3}\right)=3(1-\alpha) \tag{9-45}$$

由滑履上力的平衡得

$$\frac{\pi p_r(D_2^2-D_1^2)\cos\theta}{8\ln D_2/D_1}=K_f\frac{\pi}{4}p_s d^2$$

则
$$\alpha=\frac{p_r}{p_s}=-\frac{2K_f\ln\bar{D}}{\bar{D}_2^2(1-\bar{D}^2)\cos\theta}$$

代入（9-45）式得

$$\bar{S}=3\lambda_0=3\left[1+\frac{2K_f\ln\bar{D}}{\bar{D}_2^2(1-\bar{D}^2)\cos\theta}\right] \tag{9-46}$$

式中 $\bar{D}=\frac{D_1}{D_2}$，$\bar{D}_2=D_2/d$。

(9-46)式将刚度系数$\bar{S}$或承载变动系数λ_0与滑履尺寸联系起来，如果把它画成曲线如图 9-20 所示。图中也示出了α与滑履尺寸的关系由图可见，不论D_1或D_2的改变均将引起p_r的改变，如果要保持油膜厚度δ不变，必需调整进口阻尼尺寸。

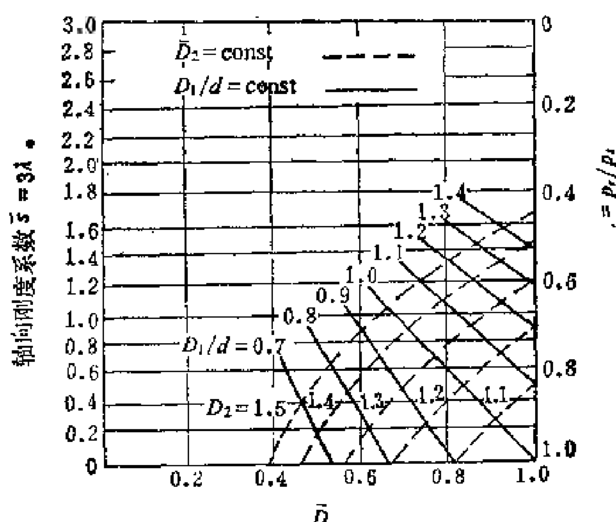


图9-20　滑履尺寸与α及λ_0的关系

上节中曾求得给定δ时滑履能量损失最小的几何特性参数β为

$$\beta=0.123\,(c_e)^{\frac{1}{3}}\,/\bar{\delta}^2$$

如果压强p_s，转速n，粘度μ，油缸节圆半径R及活塞直径d均已选定，则

$$\delta=k_e\sqrt{\bar{D}_2^2(1-\bar{D}^2)} \tag{9-47}$$

式中
$$k_e=d\sqrt{0.123(c_e)^{\frac{1}{3}}\frac{\mu nR}{p_s}}$$

因为相对刚度 $\bar{S}=-\frac{\delta dF_l}{F_l d\delta}=\frac{\delta}{F_l}S=3\lambda_0$，所以刚度 S 为

$$S=\frac{3F_l\lambda_0}{\delta}=\frac{3\pi K_f p_s d^2}{4\delta}\lambda_0 \tag{9-48}$$

设 $K_f=1.1$，并以（9-47)式代入（9-48）式，我们得在给定油膜厚度下能量损失最小的滑履刚度 S_e 为

$$S_e=\frac{(3\pi)(1.1)p_s d^2}{4k_e\sqrt{\bar{D}_2^2(1-\bar{D}^2)}}\lambda_0=\frac{\pi d p_s^{3/2}}{1.27\,(\mu n\bar{R})^{\frac{1}{2}}\,(c_e)^{\frac{1}{4}}}\cdot\frac{3\lambda_0}{[\bar{D}_2^2(1-\bar{D}^2)]^{\frac{1}{2}}}$$

上式中 $\frac{3\lambda_0}{[\bar{D}_2^2(1-\bar{D}^2)]^{\frac{1}{2}}}$ 是决定于滑履尺寸的值，我们把它称为能量损失最小时的刚度系数，并以符号 $\bar{S}_e$ 表示之，即

$$\begin{aligned}\bar{S}_e&=\frac{3\lambda_0}{[\bar{D}_2^2(1-\bar{D}^2)]^{\frac{1}{2}}}\\&=\frac{3}{[\bar{D}_2^2(1-\bar{D}^2)]^{\frac{1}{2}}}\left\{1+\frac{2\ln\bar{D}}{\bar{D}_2^2(1-\bar{D}^2)\cos\theta}\right\}\end{aligned} \tag{9-49}$$

图（9-21）示出了 $\bar{S}_e$ 与滑履尺寸的关系，图中的纵座标 $\bar{M}_r$ 为抗倾力矩系数，将在下节中说明。

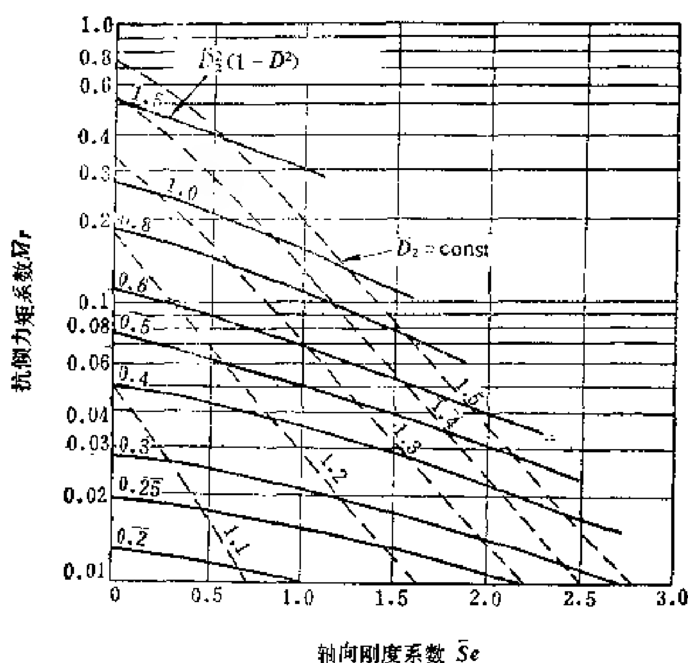


图9-21　滑履尺寸与 $\bar{S}_e$ 及 $\bar{M}_r$ 的关系

§9-8　滑履的抗倾能力

滑履在工作时将受到一些侧向力，例如作用在滑履重心处的离心力等等。这些力的作用将使滑履发生倾侧，当滑履倾侧时，滑履节流边油膜的压强分布将发生变化而产生抗倾力矩，

这在前面已有定性的说明。根据 M.J.Fisher[1]的分析，滑履倾侧时的抗倾力矩 M_r 为

$$M_r=\pi p_r D_2^2[f_1(\overline{D})\varepsilon_p+f_2(\overline{D})\varepsilon_p^3+\cdots\cdots]$$

式中 ε_p 为滑履倾侧角与滑履最大倾角（滑履一端与斜盘接触时的倾角，其值为 $\operatorname{arctg}\dfrac{2\delta}{D_2}$）的比值，抗倾刚度系数 $\overline{M}_r$ 为

$$\overline{M}_r=\left.\frac{\partial M_r}{\partial\varepsilon_p}\right|_{\varepsilon_p=0}\times\left(\frac{128\cos\theta}{3\pi p_s d^3}\right)$$

因为 $f_1(\overline{D})=3\left\{\left[(1+\overline{D}^2)(1-\overline{D}^2)/\ln\dfrac{1}{\overline{D}}\right]-4\overline{D}^2\right\}\Big/256$，并以 $p_r=-2p_s\ln\overline{D}\ /\overline{D}_2^2\ (1-\overline{D}^2)\cos\theta$ 代入则

$$\overline{M}_r=\overline{D}_2\left[(1+\overline{D}^2)+\frac{4\overline{D}^2\ln\overline{D}}{(1-\overline{D}^2)}\right]\tag{9-50}$$

上式示出了抗倾力矩系数$\overline{M}_r$与滑履尺寸的关系，如图 9-22 所示，图中横座标为$\overline{S}$，由图可见，在一定的 D_2 尺寸下，$\overline{D}$值越大，即 D_2/D_1 越小则刚度系数$\overline{S}$，或者说承载变动系数 λ_0 越大，但抗倾力矩系数$\overline{M}_r$则越小。也就是说，增大了承受轴向变载能力，必然要降低抗倾能力，因此必须两者兼顾，妥善解决。

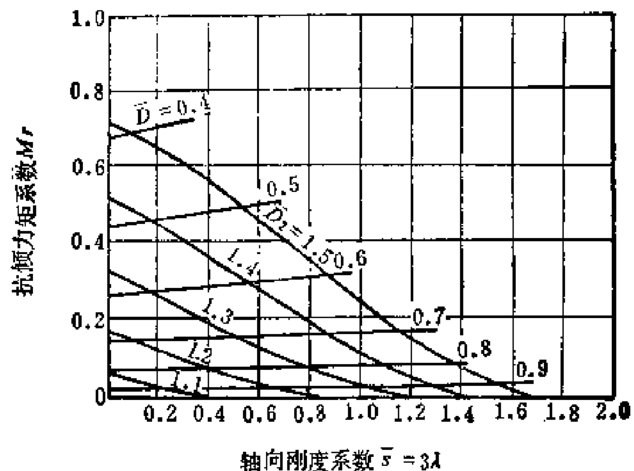


图9-22　滑履尺寸与λ_0及$\overline{M}_r$的关系

图 9-21 为给定油膜厚度时能量损失最小的条件下抗倾力矩系数$\overline{M}_r$，刚度系数$\overline{S}_s$和滑履尺寸的关系。根据给定油膜厚度 δ，求出滑履几何特性系数 β，则$\overline{D}_2^2(1-\overline{D}^2)$ 也就确定了，就可以在图上选出兼顾$\overline{M}_r$和 $\overline{S}_s$的滑履尺寸。

§9-9　进口阻尼尺寸的决定

滑履泄漏油是由液压缸内高压油通过进口阻尼管（在柱塞中心）供应的（图 9-15），油液通过进口阻尼管产生了压降，使滑履油腔压强 p_r 小于液压缸内压强 p_s。进口阻尼的压降对滑履刚度有较大影响。对于完全平衡型滑履来讲，滑履的尺寸一经选定，油腔压强 p_r 也就确定了，我们只能根据阻尼压降来选择适合于该滑履的阻尼尺寸。决定阻尼管尺寸的原则有二条：

（1）保持一定的 δ 下使滑履上受力平衡；

（2）通过阻尼管的流量应该等于滑履的泄漏量。

---

[1] Fisher M. I., A Theoretical Determination of Some characteristics of a Tilted Hydrostatic Slipper Bearing, BHRA R. R. 728 April 1962.

根据滑履上力的平衡条件，可得滑履油腔压强 p_r 如（9-24）式所示：

$$p_r = \frac{2p_s K_f d^2}{D_2^2 - D_1^2} \frac{\ln D_2/D_1}{\cos\theta}$$

滑履泄漏量 q 则由（9-25）式得

$$q = \frac{\pi\delta^3 p_r}{6\mu c_e \ln D_2/D_1} = \frac{\pi\delta^3 p_s d^2 K_f}{3\mu c_e (D_2^2 - D_1^2)\cos\theta}$$

通过进口阻尼管的流量为

$$Q = \frac{1}{c} \frac{\pi d_0^4}{128\mu l}(p_s - p_r)$$

式中 d_0——进口阻尼管直径；

l——进口阻尼管长度；

$c = 1 + \frac{\xi}{64} Re \frac{d_0}{l}$——层流起始段影响的系数。

根据流量 Q 与泄漏量 q 相等的原则得

$$\frac{1}{c} \frac{\pi d_0^4}{128\mu l}(p_s - p_r) = \frac{\pi K_f \delta^3 p_s d^2}{3c_e \mu (D_2^2 - D_1^2)\cos\theta}$$

或

$$\frac{p_r}{p_s} = 1 - \frac{128 K_f c d^2}{3c_e (D_2^2 - D_1^2)\cos\theta} \frac{l\delta^3}{d_0^4} \tag{9-51}$$

以（9-24）代入（9-51）式得

$$\frac{2K_f d^2 \ln D_2/D_1}{(D_2^2 - D_1^2)\cos\theta} = 1 - \frac{128 K_f c d^2}{3c_e (D_2^2 - D_1^2)\cos\theta} \frac{l\delta^3}{d_0^4}$$

整理之并以 $\bar{D} = \frac{D_1}{D_2}$，$\bar{D}_2 = \frac{D_2}{d}$ 代入则

$$\frac{l\delta^3}{d_0^4} = \frac{3c_e}{128 c K_f} [\bar{D}_2^2 (1 - \bar{D}^2)\cos\theta + 2K_f \ln \bar{D}] \tag{9-52}$$

公式（9-52）给出出阻尼管尺寸 l 及 d_0 和油膜厚度 δ 的关系，而且它说明了 l、d_0 和 δ 之间的关系并不因压强和粘度而变，即当滑履和进口阻尼管尺寸确定后，油膜厚度 δ 原则上不会随液压缸内压强的变化而改变，也不会随着油液粘度不同而改变。但实际上如果液压缸内压强增高，泄漏量就增大，引起雷诺数 Re 的增大而使系数 c 和 c_e 增大。由于系数 c 和 c_e 同时都增大，而且（9-52）式中等号左边的 δ 是三次方，因此系数 c 和 c_e 的改变对 δ 的影响极小，即采用进口阻尼管结构的滑履，当滑履及阻尼管尺寸确定后，液压缸压强和粘度（主要是温度变化所引起）对 δ 的影响很微小。当然采用阻尼管型式，由于 l/d_0 较大，加工比较困难些，但这也是能够克服的。

第十章　管道的非恒定流

本章讨论管道系统中油液的非恒定流或称不稳定流。管道系统中油液的不稳定流是由于组成系统的某一元件的工作状态变更（例如阀的开度变化，泵的脉动，泵的开启和停机等等）或受到外界干扰（例如负载的变化）等所引起的，在这种情况下，油液原来的运动状态遭到破坏，呈现重新调整的不稳定状态。一般来说，一个合理的系统，这个不稳定状态是暂时的，它终将过渡到另一新的稳定状态。但这个暂时的过渡过程却对系统和组成系统的元件都有极大影响。在过渡过程中，运动参数例如速度要发生改变以适应新的情况，但油液是有质量的，它具有惯性，就有阻止速度变化的倾向，这个倾向就引起了压强的变化，另一方面，油液虽然是属不可压缩性流体，但实际上它还是有一定的（虽然是极小的）压缩性，由于压强的变化，油液就将有如弹簧那样贮存或释放能量。这些变化必然引起一系列不正常现象，例如冲击，振动，噪声和汽穴，因此这是一个比恒定流动复杂得多的过程。

§10-1　机电液模拟的概念

系统从稳定状态到不稳定状态，再由不稳定状态到新的稳定状态是一个动态过程，研究这个过程首先要找出描述这个过程的数学模型——动态方程式，在建立数学模型的过程中，人们发现不同质的系统，不管是机械的，流体的和电的，数学模型有惊人的相似之处，使得我们可以相互借鉴。例如机械系统中的力F，速度v，摩阻系数f，质量M，柔度$\frac{1}{k}$（刚度的倒数）与电路中的电压U，电流i，电阻R，电感L和电容C具有相似的数学性质，在数学模型中完全可以相互更换，如表（10-1）。

同样，油液系统与电路之间也是如此，例如油液在管路中的运动，压降与流量之间的关系为

$$\left.\begin{aligned} &\text{层流：} && \Delta p=\frac{128\mu l Q}{\pi d^4}=R_h Q \\ &\text{紊流：} && \Delta p=\lambda\rho\frac{l}{d}\frac{Q}{2}\frac{1}{A^2}Q=R_h Q \end{aligned}\right\} \tag{10-1}$$

上述方程与电学中的欧姆定律$U=Ri$有完全相类似的形式，如果将压降比拟为电位差U，流量比拟为电流i，则R_h就相当于电阻R，现在我们可以把R_h称为液阻，并把$R_{hI}=\frac{R_h}{l}$称为单位液阻，层流时单位液阻$R_{hI}=\frac{128\mu}{\pi d^4}$，它只决定于油液性质和管道尺寸，但紊流时单位液阻$R_{hI}=\frac{\lambda\rho}{A^2 d}\frac{Q}{2}$，它却与运动参数$Q$有关，因此它的模拟就不精确。必须指出，上述的层流或紊流液阻R_{hI}是在稳态条件下的值，在动态情况下将有所不同。

油液以流速v流经长为l，断面积为A的管道时，如果要它改变运动状态，则必须施加外力F，按牛顿定律

表 10-1

机械系统		电路	对应参数
	$T=f\omega$	$U=Ri$	T或$F\longrightarrow U$
	$F=fv$		$f\longrightarrow R$
			ω或$v\longrightarrow i$
	$T=J\dfrac{d\omega}{dt}$	$U=L\dfrac{di}{dt}$	T或$F\longrightarrow U$
	$F=m\dfrac{dv}{dt}$		ω或$v\longrightarrow i$
			J或$M\longrightarrow L$
	$T=k_s\theta=k_s\int\omega dt$	$U=\dfrac{1}{C}\int idt$	T或$F\longrightarrow U$
	$F=k_s x=k_s\int vdt$		ω或$v\longrightarrow i$
			$\dfrac{1}{k_s}\longrightarrow C$

$$F=ma=m\frac{dv}{dt}=\rho Al\frac{dv}{dt}$$

等号两边均除以管道断面积A，则$\frac{F}{A}$为管道两端的附加压降Δp，再将$Q=vA$代入则

$$\Delta p=\frac{F}{A}=\frac{\rho l}{A}\frac{dQ}{dt} \tag{10-2}$$

这个方程与电流通过电感元件，由于电流变化所感生的电压公式$U=L\frac{di}{dt}$结构全同。由此，我们可以把$\frac{\rho l}{A}=L_h$称为液感，并把$L_{h1}=\frac{L_h}{l}=\frac{\rho}{A}$称为单位液感。

由于油液实际上具有压缩性，设油液体积弹性模量为K_l，则

$$K_l=-\frac{dp}{\frac{dV_l}{V_0}} \tag{10-3}$$

式中dV_l为压强改变dp时油液体积的改变；V_0为压强改变前的油液总体积。

因为管壁也有弹性，如果材料的弹性模量为E，则当管中受到dp压强改变时，管壁中将在纵向和横向产生二个相互正交的附加应力σ_l和σ_t，如果管道内径为D_0，壁厚为t则

$$\sigma_t = \frac{D_0 dp}{2t} = \frac{R_0 dp}{t}$$

$$\sigma_l = \frac{\pi D_0^2}{4\pi D_0 t} dp = \frac{D_0}{4t} dp = \frac{R_0 dp}{2t}$$

管道周长的单位伸长ε为

$$\varepsilon = \frac{2\pi R - 2\pi R_0}{2\pi R_0} = \frac{\sigma_t}{E} - \mu \frac{\sigma_l}{E} = \frac{R_0}{Et} dp - \mu \frac{R_0}{2t} dp$$

$$= \frac{R_0}{Et}\left(1 - \frac{\mu}{2}\right) dp$$

由此可得

$$R - R_0 = \frac{R_0^2}{Et}\left(1 - \frac{\mu}{2}\right) dp$$

式中R为管道受到dp压强改变后，半径由原来的R_0改变为R，μ则为材料的泊桑比。由此可得管道断面积的改变为$dA_r = 2\pi R_0(R - R_0) = \frac{2\pi R_0^3}{Et}\left(1 - \frac{\mu}{2}\right) dp$，整个管道的体积改变率为

$$\frac{dV_r}{V_0} = \frac{dA_r}{A_0} = \frac{2\pi R_0^3}{\pi R_0^2 Et}\left(1 - \frac{\mu}{2}\right) dp = \frac{2R_0}{Et}\left(1 - \frac{\mu}{2}\right) dp$$

则管道的体积弹性模量K_t为

$$K_t = \frac{dp}{\frac{dV_r}{V_0}} = \frac{Et}{2R_0\left(1 - \frac{\mu}{2}\right)} = \frac{Et}{D_0\left(1 - \frac{\mu}{2}\right)} \tag{10-4}$$

如果无纵向应力则

$$K_t = \frac{Et}{D_0}$$

由（10-3）及(10-4）式得

$$dV_l = -\frac{V_0 dp}{K_l}; \quad dV_r = \frac{V_0 dp}{K_t}$$

总的体积变化为$dV = dV_l - dV_r = -\frac{V_0 dp}{K_l} - \frac{V_0 dp}{K_t} = -V_0 dp\left(\frac{1}{K_l} + \frac{1}{K_t}\right)$，综合考虑油液的压缩和管道的膨胀，设等效体积模量为K_e，则

$$K_e = -\frac{dp}{\frac{dV}{V_0}} \text{ 或 } dV = -\frac{V_0 dp}{K_e} \tag{10-5}$$

由此可得：

$$\frac{1}{K_e} = \frac{1}{K_l} + \frac{1}{K_t}$$

或

$$K_e = \frac{K_l K_t}{K_l + K_t} \tag{10-6}$$

由（10-5）式得
$$\frac{dV}{dt}=-\frac{V_0}{K_e}\frac{dp}{dt}$$

因为 $-\frac{dV}{dt}=Q$，$V_0=A_0l$，所以

$$Q=\frac{A_0l}{K_e}\frac{dp}{dt}$$

或
$$p=\frac{K_e}{A_0l}\int Qdt \tag{10-7}$$

方程（10-7）与交流电路中电容的方程$U=\frac{1}{C}\int idt$有相同的结构，我们把管道的$\frac{A_0l}{K_e}=C_h$，称为液容，并把$\frac{C_h}{l}=C_{h1}=\frac{A_0}{K_e}$称为单位液容。由此我们把液电机的比拟列如表10-2。

表 10-2

液	电	机
压强$\Delta p=R_hQ$	电压U	力F或力矩T
流量$Q=\frac{\Delta p}{R_h}$	电流i	速度v或角速度ω
液阻$R_h=\frac{\Delta p}{Q}$	电阻R	摩阻系数f
液感$L_h=\frac{\Delta p}{\frac{dQ}{dt}}$	电感L	质量m或转动惯量J
液容$C_h=\frac{Q}{dp/dt}$	电容C	柔度$C_s=\frac{1}{k_s}$

§10-2 液电、机电的等效回路

机液电系统中的元件可以相互比拟，则由这些元件组成的系统也可相互模拟，例如，下列机械系统与它左边的电路系统是相模拟的：

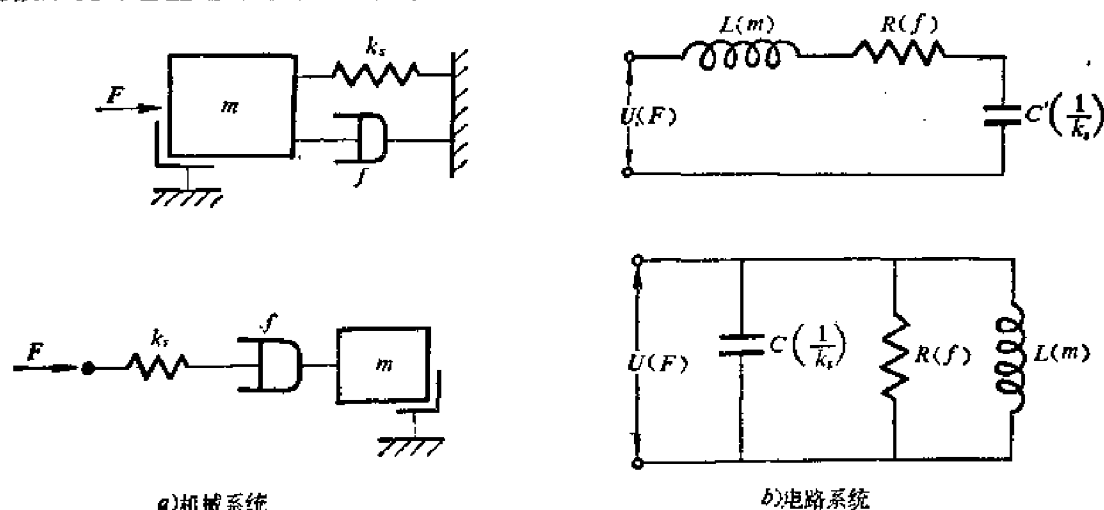


图10-1 机电比拟

在并联的机械系统中运动速度是相等的，而力F则由各元件分担，由于我们是采用$F-U$（力-电压）的模拟方式，电路就是串联；而串联的机械系统电路呈并联。

再如图10-2的流体系统，定量油源向一油箱供油，进出油量Q_1及Q_2用阀调节，油箱内油位H将与进出油量有关

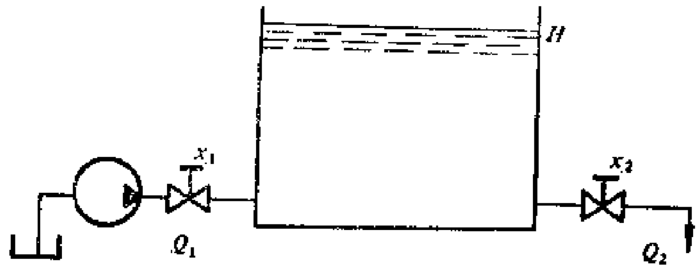


图10-2 流体系统

$$Q_1 = C_{q1}a(x_1)\sqrt{2g(H_p - H)}$$

$$Q_2 = C_{q2}a(x_2)\sqrt{2gH}$$

式中H_p是油泵输油扬程，$H_p = \frac{p}{\rho g}$。可以画出在不同的阀门开度x_1及x_2下的流量Q与油位H的关系，如图10-3所示。图中开度x_1及x_2曲线的交点为流量平衡点。如果阀门开度在x_1及x_2，油面位置为H_1时则放油量Q_2图10-4大于进油量Q_1，油箱中油位逐渐降落至H_0而达到平衡，此时如果将x_2增大至x_2'，则原来的平衡状态被打破而将过渡到油位为H_2的新的平衡位置。那末阀门开度的改变Δx与油位的改变关系怎样呢？

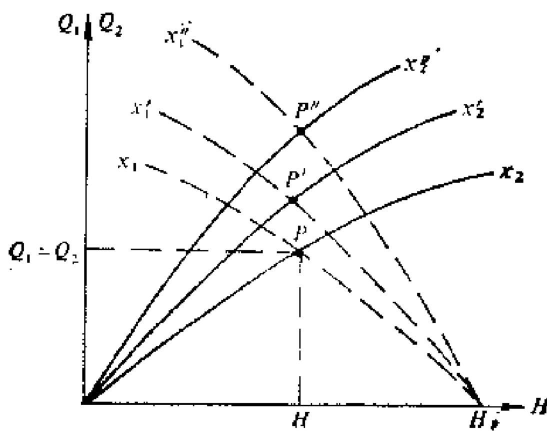


图10-3 流体系统的调节特性

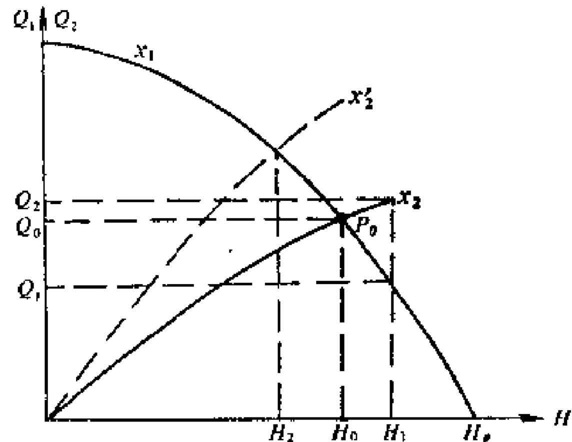


图10-4 调节特性的说明

我们设在x_1及x_2开度时的平衡点为P_0，这时的油位为H_0，流量为$Q_1 = Q_2 = Q_0$，当阀门开度改变Δx_1及Δx_2时，流量各为

$$Q_1 = Q_0 + \Delta Q_1, \quad x_1 = x_{10} + \Delta x_1$$

$$Q_2 = Q_0 + \Delta Q_2, \quad x_2 = x_{20} + \Delta x_2$$

因为Q_1和Q_2均为H和x的函数，所以在平衡点处的微小扰动使流量改变为

$$\Delta Q_1 = \frac{\partial Q_1}{\partial H}\Delta H + \frac{\partial Q_1}{\partial x_1}\Delta x_1 = -M_1\Delta H + N_1\Delta x_1$$

同样，

$$\Delta Q_2 = \frac{\partial Q_2}{\partial H}\Delta H + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2}\Delta x_2 = M_2\Delta H + N_2\Delta x_2$$

式中 $-M_1 = \frac{\partial Q_1}{\partial H}$（负号是因为$H$的增大将引起$Q_1$的减小）及$M_2 = \frac{\partial Q_2}{\partial H}$为在$P_0$点开度

曲线的斜率，$N_1=\frac{\partial Q_1}{\partial x_1}$ 及 $N_2=\frac{\partial Q_2}{\partial x_2}$ 为开度曲线族的流量梯度，一般称为流量增益，如果我们将 ΔQ_1 及 ΔQ_2 改写如下：

$$\Delta Q_1=\left(\frac{N_1}{M_1}\Delta x_1-\Delta H\right)M_1=\frac{\frac{N_1}{M_1}\Delta x_1-H\Delta}{\frac{1}{M_1}}$$

$$\Delta Q_2=\left(\frac{N_2}{M_2}\Delta x_2+\Delta H\right)M_2=\frac{\frac{N_2}{M_2}\Delta x_2+\Delta H}{\frac{1}{M_2}}$$

又因为油位的变动实际上就是油箱储油或放油过程，即

$$A\frac{d\Delta H}{dt}=(\Delta Q_1-\Delta Q_2)$$

上述公式与电路的欧姆定律和纯电容电路公式相似，由此可见，我们可以将 ΔQ_1，ΔQ_2 模拟为电流 i_1 及 i_2，$\left(\frac{N_1}{M_1}\Delta x_1-\Delta H\right)$ 及 $\left(\frac{N_2}{M_2}\Delta x_2-\Delta H\right)$ 模拟为电压降，$\frac{1}{M_1}$ 及 $\frac{1}{M_2}$ 模拟为电阻，A 模拟为电容则图 10-2 的流体系统的等效电路如图 10-5 所示，图 10-6 为它的方块图。

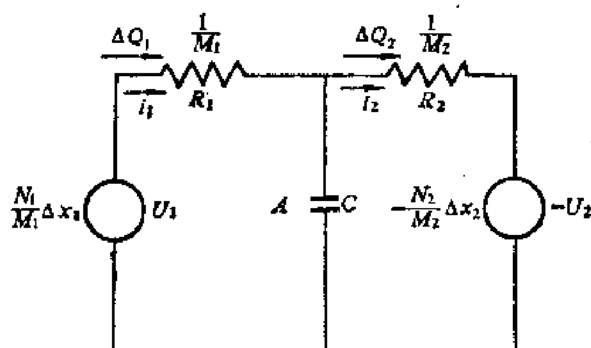


图10-5 流体系统等效回路

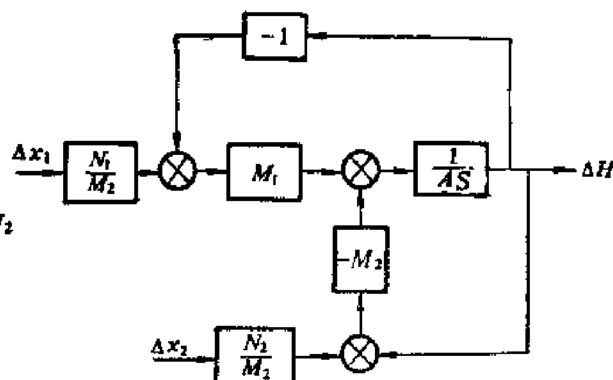


图10-6 流体系统方块图

又如一简单的液压系统，油缸上有一惯性和弹性负载，如图 10-7 所示。则液压缸上的负载力 F 为

$$F=m\frac{d^2x}{dt^2}+k_sx=m\frac{dv}{dt}+k_sx$$

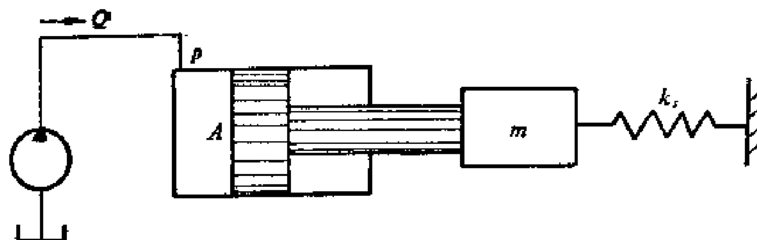


图10-7 简单液压系统

等号两边活各以塞面积A除之，并以$Q=vA$代入得

$$p=\frac{F}{A}=\frac{m}{A}\frac{dv}{dt}+\frac{k_s}{A}x=\frac{m}{A^2}\frac{dQ}{dt}+\frac{k_s}{A}\int vdt$$

$$=\frac{m}{A^2}\frac{dQ}{dt}+\frac{k_s}{A^2}\int Qdt=L_h\frac{dQ}{dt}+\frac{1}{C_h}\int Qdt$$

与它相模拟的电路为一电感电容串联回路(图10-8)

$$U=L\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}\int idt$$

必须指出，上述液压回路中惯性$L_h=\frac{m}{A^2}$，容性$C_h=\frac{A^2}{k_s}$是对液压缸负载而言的，这些并不是液压系统本身的参数，对于液压系统本身来讲，要使系统中油液改变运动状态，不仅要克服阻力和惯性力，而且还要考虑到油的压缩性和容器（例如管道、液压缸等）的弹性变形。以管道为例，管道的液阻相当于电阻，油液的惯性（液感）相当于电感。管道输送油液时，管道两端的压差必须克服液阻和液感，这两者是相互串联组合。由于油液具有压缩性，管道又可能产生弹性变形，使进出管道的流量随时间有所差异，正如电路中有线路泄漏和电晕现象，可以用一接地的电容来表示，如图 10-9 所示。

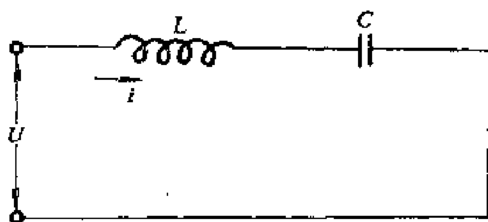


图10-8　液压缸负载的等效回路

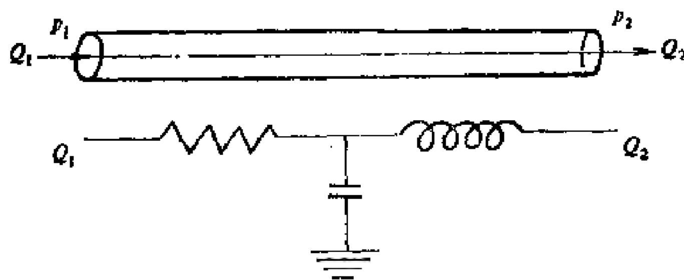


图10-9　管道及其等效回路

模拟的概念在实用上是非常有用的，一方面可以互相借鉴，便于我们深入理解，另一方面因为某些系统比其他系统易于实践，例如要对一个机械系统进行实验时，设备比较庞大，工作量十分巨大，而电的系统十分灵活，便于实现。

§10-3　管路动特性基本方程

一个液压管路系统可以看作为由液阻、液感和液容元件所组合成的网络，这些元件的特性决定了管路系统的压强流量关系。在短管的情况下，管路内的油柱可当作一集中质量，管道的摩阻，油液的压缩性和管道的弹性变形也可集中一处，作为集总参数系统处理，但是这些参数实际上是沿整个管道分布的，所以对于稍长的管道应把它作为分布参数系统处理，更为合理。

我们把长管道分成无数单元，每单元均由液阻、液容和液感组成，如图 10-10 所示。

我们取出其中的Δx段，并将Δt内的变化情况列如图 10-11，如果单位长度的液阻、液感、液容各为R_{h1}、L_{h1}及C_{h1}，则

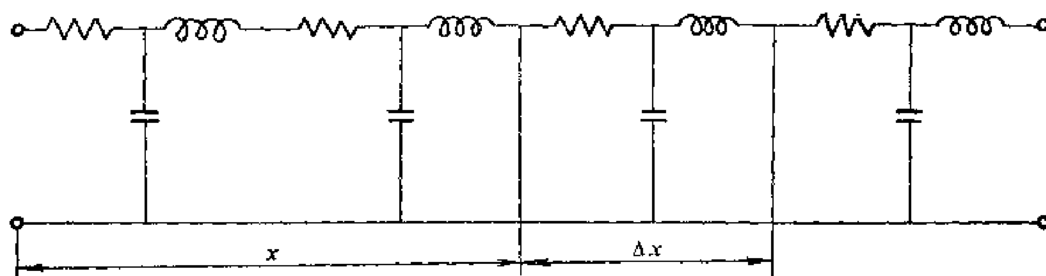


图10-10　长管的等效回路（分布参数系统）

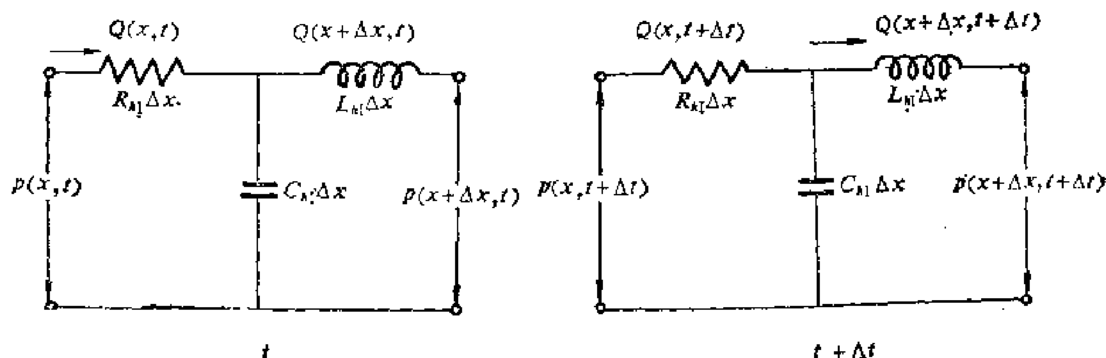


图10-11　t 和（$t+\Delta t$）时的参数变化

$$p(x,t)-p(x+\Delta x,t)$$

$$=R_{h1}\Delta xQ(x,t)+L_{h1}\Delta x\frac{Q(x+\Delta x,t+\Delta t)-Q(x+\Delta x,t)}{\Delta t}$$

及

$$Q(x,t)-Q(x+\Delta x,t)=C_{h1}\Delta x\frac{p(x,t+\Delta t)-p(x,t)}{\Delta t}$$

式中 p 及 Q 为管道内流体压强和流量的波动量，当 $\Delta t\to 0$ 和 $\Delta x\to 0$ 时上式可写成

$$\left.\begin{aligned}-\frac{\partial p(x,t)}{\partial x}&=R_{h1}Q(x,t)+L_{h1}\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t}\\-\frac{\partial Q(x,t)}{\partial x}&=C_{h1}\frac{\partial p(x,t)}{\partial t}\end{aligned}\right\}\tag{10-8}$$

上列微分方程进行拉普拉斯变换，初始值为零，得

$$\left.\begin{aligned}-\frac{\partial P(x,s)}{\partial x}&=(R_{h1}+L_{h1}s)Q(x,s)=Z(s)Q(x,s)\\-\frac{\partial Q(x,s)}{\partial x}&=C_{h1}sP(x,s)=Y(s)P(x,s)\end{aligned}\right\}\tag{10-8 a}$$

因为 $R_{h1}+L_{h1}s$ 是单位管长串联阻抗的拉普拉斯变换式，用 $Z(s)$ 表示，$C_{h1}s$ 是单位管长的并联导纳拉普拉斯变换，用 $Y(s)$ 表示，所以

$$-\frac{\partial P(s,x)}{\partial x}=Z(s)Q(s,x)\tag{10-9}$$

$$-\frac{\partial Q(s,x)}{\partial x}=Y(s)P(s,x)\tag{10-10}$$

式中 $Q(s,x)$ 为流量的拉普拉斯变换，$P(s,x)$ 是压强的拉普拉斯变换。第（10-9）式

对 x 偏导并将（10-10）式代入得

$$\frac{\partial^2 P(s,x)}{\partial x^2} = -Z(s)\frac{\partial Q(s,x)}{\partial x} = Z(s)Y(s)P(s,x) \qquad (10\text{-}11)$$

同样，（10-10）式对 x 偏导并将（10-9）式代入得

$$\frac{\partial^2 Q(s,x)}{\partial x^2} = -Y(s)\frac{\partial P(s,x)}{\partial x} = Z(s)Y(s)Q(s,x) \qquad (10\text{-}12)$$

（10-11）及（10-12）式称为波动方程，我们设传播常数 $\gamma(s)$ 为

$$\gamma(s) = \sqrt{Z(s)Y(s)} = \sqrt{(R_{h1} + L_{h1}s)(C_{h1}s)}$$

则（10-11）及（10-12）式为

$$\frac{\partial^2 P(s,x)}{\partial x^2} = [\gamma(s)]^2 P(s,x) \qquad (10\text{-}13)$$

$$\frac{\partial^2 Q(s,x)}{\partial x^2} = [\gamma(s)]^2 Q(s,x) \qquad (10\text{-}14)$$

（10-13）式的普遍解为

$$P(s,x) = A_1 e^{\gamma(s)x} + A_2 e^{-\gamma(s)x} \qquad (10\text{-}15)$$

（10-15）式求导得

$$\frac{\partial P(s,x)}{\partial x} = \gamma(s)[A_1 e^{\gamma(s)x} - A_2 e^{-\gamma(s)x}]$$

代入（10-9）式得

$$Q(s,x) = -\frac{\gamma(s)}{Z(s)}[A_1 e^{\gamma(s)x} - A_2 e^{-\gamma(s)x}]$$

$$= -\sqrt{\frac{Y(s)}{Z(s)}}[A_1 e^{\gamma(s)x} - A_2 e^{-\gamma(s)x}] \qquad (10\text{-}16)$$

积分常数 A_1 及 A_2 由边界条件求出：在输入端 $x=0$，流量压强参数是已知的，即 $P(s,x) = P_1(s)$，$Q(s) = Q_1(s)$，由（10-15）式得

$$P_1(s) = A_1 + A_2$$

由（10-16）式得

$$Q_1(s) = -\sqrt{\frac{Y(s)}{Z(s)}}[A_1 - A_2]$$

因此

$$A_1 = \frac{1}{2}\left[P_1(s) - Q_1(s)\sqrt{\frac{Z(s)}{Y(s)}}\right]$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\left[Q_1(s)\sqrt{\frac{Z(s)}{Y(s)}} + P_1(s)\right]$$

代入（10-15）及（10-16）式得

$$P(s) = P_1(s)\frac{e^{\gamma(s)x} + e^{-\gamma(s)x}}{2} - \sqrt{\frac{Z(s)}{Y(s)}}Q_1(s)\frac{e^{\gamma(s)x} - e^{-\gamma(s)x}}{2}$$

$$Q(s) = Q_1(s)\frac{e^{\gamma(s)x} + e^{-\gamma(s)x}}{2} - \sqrt{\frac{Z(s)}{Y(s)}}P_1(s)\frac{e^{\gamma(s)x} - e^{-\gamma(s)x}}{2}$$

管道终端为 $x = l$，压强和流量为 $P(s) = P_2(s)$，$Q(s) = Q_2(s)$，设 $\Gamma(s) =$

表 10-3

	$\begin{bmatrix}P_1\\Q_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\ &\ \\ \ &\ \end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_2\\Q_2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}P_1\\P_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\ &\ \\ \ &\ \end{bmatrix}\begin{bmatrix}Q_1\\Q_2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}P_1\\Q_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\ &\ \\ \ &\ \end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_2\\Q_1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}Q_1\\P_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\ &\ \\ \ &\ \end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_1\\Q_2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}Q_1\\Q_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\ &\ \\ \ &\ \end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_1\\P_2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}P_2\\Q_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\ &\ \\ \ &\ \end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_1\\Q_1\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}P_1\\Q_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A&B\\C&D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_2\\Q_2\end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix}A/C&-\Delta/C\\1/C&-D/C\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\Delta/D&B/D\\-C/D&1/D\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}C/A&\Delta/A\\1/A&-B/A\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}D/B&-\Delta/B\\1/B&-A/B\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}D/\Delta&-B/\Delta\\-C/\Delta&A/\Delta\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}P_1\\P_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A&B\\C&D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Q_1\\Q_2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}A/C&-\Delta/C\\1/C&-D/C\end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix}B/D&\Delta/D\\1/D&-C/D\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1/A&-B/A\\C/A&\Delta/A\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}D/\Delta&-B/\Delta\\-C/\Delta&A/\Delta\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}D/B&-\Delta/B\\1/B&-A/B\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}P_1\\Q_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A&B\\C&D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_2\\Q_1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\Delta/D&B/D\\-C/D&1/D\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-\Delta/C&A/C\\-D/C&1/C\end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix}-C/\Delta&A/\Delta\\D/\Delta&-B/\Delta\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1/B&-A/B\\D/B&-\Delta/B\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1/A&-B/A\\C/A&\Delta/A\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}Q_1\\P_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A&B\\C&D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_1\\Q_2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1/C&-D/C\\A/C&-\Delta/C\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1/A&-B/A\\-C/\Delta&A/\Delta\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-B/\Delta&D/\Delta\\A/\Delta&-C/\Delta\end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix}\Delta/D&B/D\\-C/D&1/D\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-\Delta/B&D/B\\-A/B&1/B\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}Q_1\\Q_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A&B\\C&D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_1\\P_2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-D/C&1/C\\-\Delta/C&A/C\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}D/\Delta&-B/\Delta\\-C/\Delta&A/\Delta\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-B/A&1/A\\\Delta/A&C/A\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\Delta/D&B/D\\C/D&1/D\end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix}-A/B&1/B\\-\Delta/B&D/B\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}P_2\\Q_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A&B\\C&D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_1\\Q_1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}D/\Delta&-B/\Delta\\-C/\Delta&A/\Delta\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-D/C&1/C\\-\Delta/C&A/C\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1/A&-B/A\\C/A&\Delta/A\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}C/D&1/D\\A/D&B/D\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-A/B&1/B\\-\Delta/B&D/B\end{bmatrix}$	
$\Delta=\begin{vmatrix}A&B\\C&D\end{vmatrix}$	$\begin{bmatrix}y_1\\x_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C&D\\A&B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}\leftarrow\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A&B\\C&D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B&A\\D&C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_2\\x_2\end{bmatrix}$					

$\gamma(s)l$ 称为传播算子，如果我们把$Z_0(s)=\sqrt{\frac{Z(s)}{Y(s)}}=\sqrt{\frac{R_{h1}+L_{h1}s}{C_{h1}s}}=\sqrt{\frac{R_h+L_hs}{C_hs}}$，称为特性阻抗，由此可得

$$\left.\begin{aligned}P_2(s)&=P_1(s)\operatorname{ch}\Gamma(s)-Z_0(s)Q_1(s)\operatorname{sh}\Gamma(s)\\Q_2(s)&=Q_1(s)\operatorname{ch}\Gamma(s)-\frac{1}{Z_0(s)}\cdot P_1(s)\operatorname{sh}\Gamma(s)\end{aligned}\right\}\tag{10-17}$$

如果我们已知终端的 $P_2(s)$ 和 $Q_2(s)$，则输入端的参数为

$$\left.\begin{aligned}P_1(s)&=P_2(s)\operatorname{ch}\Gamma(s)+Q_2(s)Z_0(s)\operatorname{sh}\Gamma(s)\\Q_1(s)&=Q_2(s)\operatorname{ch}\Gamma(s)+P_2(s)\frac{1}{Z_0(s)}\operatorname{sh}\Gamma(s)\end{aligned}\right\}\tag{10-18}$$

(10-17) 式 (10-18) 式就是管路输送的基本方程，这是一个输入$[P_1(s),Q_1(s)]$与输出$[P_2(s),Q_2(s)]$二端参数的线性变换式，以矩阵形式表示之为

$$V_1=G(s)V_2\tag{10-19}$$

式中 $V_1=\begin{bmatrix}P_1(s)\\Q_1(s)\end{bmatrix}$, $V_2=\begin{bmatrix}P_2(s)\\Q_2(s)\end{bmatrix}$

$$G(s)=\begin{bmatrix}\operatorname{ch}\Gamma(s) & Z_0(s)\operatorname{sh}\Gamma(s)\\ \frac{1}{Z_0(s)}\operatorname{sh}\Gamma(s) & \operatorname{ch}\Gamma(s)\end{bmatrix}$$

即

$$\begin{bmatrix}P_1(s)\\Q_1(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\operatorname{ch}\Gamma(s) & Z_0(s)\operatorname{sh}\Gamma(s)\\ \frac{1}{Z_0(s)}\operatorname{sh}\Gamma(s) & \operatorname{ch}\Gamma(s)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_2(s)\\Q_2(s)\end{bmatrix}\tag{10-20}$$

输入输出二端参数的关系式可有各种不同的组成形式，根据矩阵的运算，矩阵表示式如表 (10-3) 所示。

§10-4 传播常数、传播算子和特性阻抗

前面已经指出，传播常数 $\gamma(s)$，传播算子 $\Gamma(s)$ 和特性阻抗 $Z_0(s)$ 均与串联阻抗 $Z(s)$ 和并联导纳 $Y(s)$ 有关，它们的关系为

$$\gamma(s)=\sqrt{Z(s)Y(s)}\tag{10-21}$$

$$\Gamma(s)=\gamma(s)l=l\sqrt{Z(s)Y(s)}\tag{10-22}$$

$$Z_0(s)=\sqrt{Z(s)/Y(s)}\tag{10-23}$$

因为串联阻抗 $Z(s)=R_{h1}+L_{h1}s$，并联导纳 $Y(s)=C_{h1}s$，而

$$L_{h1}=\rho/A,\quad C_{h1}=A/K_e$$

在频率较高或流体粘度较小的情况下，层流单位液阻 $R_{h1}=\frac{128\mu}{\pi d^4}$ 与单位液容 C_{h1} 和单位液感 L_{h1} 比较起来是小量，可以略去不计[1]，则传播常数 $\gamma(s)$，传播算子 $\Gamma(s)$ 及特性阻

[1] Toet G. & Willekens F. A. M., Determination of the Vibration Behaviour in Simple Hydraulic Systems HPMP June 1976 p. 240。

抗 $Z_0(s)$ 各为

$$\gamma(s)=\sqrt{Z(s)Y(s)}=\sqrt{(L_{h1}s)(C_{h1}s)}=s\sqrt{\frac{\rho}{K_e}}=\frac{s}{c} \tag{10-24}$$

$$\Gamma(s)=\gamma(s)l=\frac{ls}{c}=T_l s \tag{10-25}$$

$$Z_0(s)=\sqrt{\frac{Z(s)}{Y(s)}}=\sqrt{\frac{\rho K_e}{A^2}}=\frac{1}{A}\sqrt{\rho K_e}=\frac{\rho c}{A} \tag{10-26}$$

式中 $c=\sqrt{\frac{K_e}{\rho}}$ 为压强波传递速度，也就是声速，$T_e=\frac{l}{c}$ 为压强波的传递时间，由此可见 $\gamma(s)$ 是与压强波传递速度有关的函数，$\Gamma(s)$ 则与传递时间有关的函数。

如果要考虑液阻的影响，则 $\gamma(s)$，$\Gamma(s)$ 及 $Z_0(s)$ 就比较复杂，讨论如下：

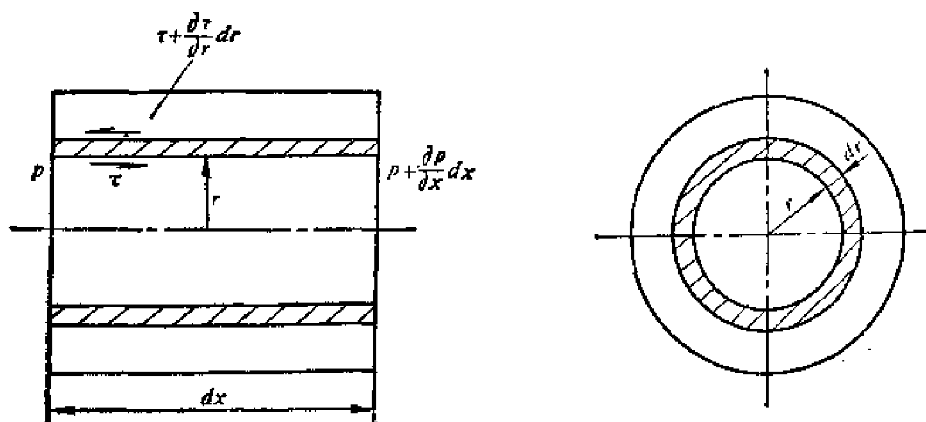


图10-12　管道内微小薄层上的应力

管道内取一微小薄层油液，这一层油液的内外二表面上作用着压强所产生的力 $2\pi r dr p$，$2\pi r dr\left(p+\frac{\partial p}{\partial x}dx\right)$ 及摩擦力 $2\pi r dx\tau$，$2\pi(r+dr)\left(\tau+\frac{\partial\tau}{\partial r}dr\right)$，由于非恒定流动时，油液具有加速度 $\frac{du}{dt}$，所以按牛顿运动定律

$$2\pi r p dr-2\pi r\left(p+\frac{\partial p}{\partial x}dx\right)dr+2\pi r\tau dx-2\pi(r+dr)\left(\tau+\frac{\partial\tau}{\partial r}dr\right)$$

$$=\rho 2\pi r dr dx\frac{du}{dt}$$

以 $\tau=-\mu\frac{\partial u}{\partial r}$ 代入上式，整理之并略去高阶无限小项，得运动方程为

$$\frac{du}{dt}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) \tag{10-27}$$

由于管道是等断面的，所以速度 u 与 x 无关，只随时间和 r 而变，即 $u=u(r,t)$，但压强 p 却与 r 无关，所以上式中压强梯度 $\frac{\partial p}{\partial x}$ 将只是时间的函数，我们设 $f(t)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$ 则

$$\frac{du}{dt}=f(t)+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\ \frac{\partial u}{\partial r}\right) \tag{10-28}$$

将上式进行拉氏变换得

$$sU(s,r)=F(s)+\nu\left[\frac{\partial^2 U(s,r)}{dr^2}+\frac{1}{r}\ \frac{dU(s,r)}{dr}\right]$$

或

$$\frac{d^2U(s,r)}{dr^2}+\frac{1}{r}\ \frac{dU(s,r)}{dr}-\frac{s}{\nu}\left\{U(s,r)-\frac{F(s)}{s}\right\}=0 \tag{10-29}$$

式中 $U(s,r)$，$F(s)$ 为 $u(t,r)$ 及 $f(t)$ 的拉氏变换式。设变数 $V(s,r)$ 为

$$V(s,r)=U(s,r)-\frac{F(s)}{s} \tag{10-30}$$

以（10-30）式代入（10-29）式得

$$\frac{d^2V(s,r)}{dr^2}+\frac{1}{r}\ \frac{dV(s,r)}{dr}-\frac{s}{\nu}V(s,r)=0 \tag{10-31}$$

把变数 r 替换为 R，它们的关系为 $R=\mathrm{j}r\sqrt{\frac{s}{\nu}}$，则 $\frac{dV(s,r)}{dr}=\mathrm{j}\sqrt{\frac{s}{\nu}}\ \frac{dV(s,R)}{dR}$，$\frac{d^2V(s,r)}{dr^2}=-\frac{s}{\nu}\ \frac{d^2V(s,R)}{dR^2}$，代入（10-31）式得

$$\frac{d^2V(s,R)}{dR^2}+\frac{1}{R}\ \frac{dV(s,R)}{dR}+V(s,R)=0 \tag{10-32}$$

因为贝塞尔方程为

$$\frac{d^2y}{dR^2}+\frac{1}{R}\ \frac{dy}{dR}+\left(1-\frac{n^2}{R^2}\right)y=0 \tag{10-33}$$

它的通解为：$y(R)=C_1J_n(R)+C_2Y_n(R)$

式中 $J_n(R)$ 称为 n 阶第一种贝塞尔函数，Y_n 称为 n 阶第二种贝塞尔函数，均为无穷级数。

$$J_n(R)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{R^{n+2m}}{2^{n+2m}m!\,\Gamma(n+m+1)}\qquad(n\neq-1,-2,\cdots) \tag{10-34}$$

$$Y_n(R)=\frac{2}{\pi}J_n(R)\left(\ln\frac{R}{2}+\gamma\right)-\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(n-m-1)!}{m!}\left(\frac{R}{2}\right)^{-n+2m}$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\left(\frac{R}{2}\right)^{n+2m}}{m!\,(n+m)!}\left(\sum_{k=1}^{n+m}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}\right) \tag{10-35}$$

式中 γ 为欧拉常数 $\gamma=0.5772$。比较（10-32）与（10-33）式可知（10-32）式是 $n=0$ 的贝塞尔方程，它的解应为

$$V(s,R)=C_1J_0(R)+C_2Y_0(R) \tag{10-36}$$

零阶的贝塞尔函数 $J_0(R)$ 和 $Y_0(R)$ 及一阶的第一种贝塞尔函数 $J_1(R)$ 为

$$J_0(R)=1-\frac{R^2}{2^2}+\frac{R^4}{2^4(2!)^2}-\frac{R^6}{2^6(3!)^2}+\cdots+(-1)^m\frac{R^{2m}}{2^{2m}(m!)^2}+\cdots$$

$$J_1(R)=\frac{R}{2}-\frac{R^3}{2^3 2!}+\frac{R^5}{2^5 2!3!}-\frac{R^7}{2^7 3!4!}+\cdots+(-1)^m\frac{R^{2m+1}}{2^{2m-1}m!(m+1)!}+\cdots$$

$$Y_0(R)=\frac{2}{\pi}\left\{J_0(R)\left[\ln\frac{R}{2}+\gamma\right]+\frac{R^2}{2^2}-\frac{\left(1+\frac{1}{2}\right)R^4}{2^4(2!)^2}+\cdots\right\}$$

因为当 $R=0$ 时 $Y_0(R)=-\infty$，但 $R=0$ 即为 $r=0$，处于管道中心，该处的流速 $U(s,R)$ 为有限值，所以根据这个物理条件，(10-36) 式中的系数 C_2 必须为零，因此

$$V(s,R)=C_1J_0(R) \tag{10-37}$$

因为
$$\frac{d}{dR}[R^nJ_n(R)]=\frac{d}{dR}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{R^{2n+2m}}{2^{n+2m}m!\Gamma(n+m+1)}$$

$$=R^n\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{R^{(n-1)+2m}}{2^{(n-1)+2m}m!\Gamma(n+m)}=R^nJ_{n-1}(R)$$

由此得

$$R^n\frac{dJ_n(R)}{dR}+nR^{n-1}J_n(R)=R^nJ_{n-1}(R)$$

或
$$\frac{dJ_n(R)}{dR}=J_{n-1}(R)-\frac{n}{R}J_n(R) \tag{10-38}$$

同样

$$\frac{d}{dR}[R^{-n}J_n(R)]=\frac{d}{dR}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{R^{2m}}{2^{n+2m}m!\Gamma(n+m+1)}$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}2m\ (-1)^m\frac{R^{2m-1}}{2^{n+2m}m!\Gamma(n+m+1)}$$

$$=\sum_{(m-1)=0}^{\infty}\frac{2m}{R^n\cdot 2m}(-1)^{m-1}\frac{R^{n+1+2(m-1)}}{2^{n+1+2(m-1)}(m-1)!\Gamma(n+m+1)}$$

$$=R^{-n}J_{n+1}(R)$$

由此可得

$$\frac{dJ_n(R)}{dR}=-J_{n+1}(R)+\frac{n}{R}J_n(R) \tag{10-39}$$

根据 (10-39) 式可得

$$\frac{dJ_0(R)}{dR}=-J_1(R)$$

$J_0(R)$ 的二次求导，根据 (10-38) 式得

$$\frac{d^2J_0(R)}{dR^2}=-\frac{dJ_1(R)}{dR}=-J_0(R)+\frac{1}{R}J_1(R)$$

(10-37) 式求导后代入 (10-32) 式是满足的，因此 (10-37) 式确是 (10-32) 式的解，由此得速度的拉氏变换式 $U(s,r)$ 为

$$U(s,r)=C_1J_0\left(jr\sqrt{\frac{s}{\nu}}\right)+\frac{F(s)}{s} \tag{10-40}$$

(10-40) 式即为 (10-29) 式的解，式中系数 C_1 可用边界条件 求得：在管壁上 $r=r_0$，流速为零，即 $U(s,r_0)=0$，所以

$$C_1=\frac{-F(s)}{sJ_0\left(\mathrm{j}r_0\sqrt{\frac{s}{\nu}}\right)}$$

由此
$$U(s,r)=\left[1-\frac{J_0\left(\mathrm{j}r\sqrt{\frac{s}{\nu}}\right)}{J_0\left(\mathrm{j}r_0\sqrt{\frac{s}{\nu}}\right)}\right]\frac{F(s)}{s} \tag{10-41}$$

求得了管道断面的流速分布 $U(s,r)$ 后，就可计算流量偏差

$$Q(s)=\int_0^{r_0}2\pi rU(s,r)dr=\frac{2\pi F(s)}{s}\int_0^{r_0}\left[1-\frac{J_0\left(\mathrm{j}r\sqrt{\frac{s}{\nu}}\right)}{J_0\left(\mathrm{j}r_0\sqrt{\frac{s}{\nu}}\right)}\right]rdr$$

上式的积分可利用 (10-38) 式

$$\frac{d}{dr}\left[J_1(\beta r)\frac{r}{\beta}\right]=\frac{1}{\beta}J_1(\beta r)+\frac{r}{\beta}\frac{dJ_1(\beta r)}{dr}=\frac{J_1(\beta r)}{\beta}+r\frac{dJ_1(\beta r)}{d\beta r}$$
$$=\frac{J_1(\beta r)}{\beta}+r\left[J_0(\beta r)-\frac{1}{\beta r}J_1(\beta r)\right]=J_0(\beta r)r$$

两边积分之可得

$$\int J_0(\beta r)rdr=J_1(\beta r)\frac{r}{\beta}$$

因此流量偏差 $Q(s)$ 为

$$Q(s)=\frac{2\pi F(s)}{s}\left[\frac{r^2}{2}-\frac{rJ_1\left(\mathrm{j}r\sqrt{\frac{s}{\nu}}\right)}{\mathrm{j}\sqrt{\frac{s}{\nu}}J_0\left(\mathrm{j}r_0\sqrt{\frac{s}{\nu}}\right)}\right]_0^{r_0}$$

当 $R=0$ 时 $J_1(0)=0$ 所以

$$Q(s)=\frac{\pi r_0^2F(s)}{s}\left[1-\frac{2J_1\left(\mathrm{j}r_0\sqrt{\frac{s}{\nu}}\right)}{\mathrm{j}r_0\sqrt{\frac{s}{\nu}}J_0\left(\mathrm{j}r_0\sqrt{\frac{s}{\nu}}\right)}\right] \tag{10-42}$$

式中 $F(s)$ 为 $f(t)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$ 的拉氏变换，即 $F(s)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P(s,x)}{\partial x}$，这里 $P(s,x)$ 是压强 $p(t,x)$ 的拉氏变换，因此

$$-\frac{\partial P(s,x)}{\partial x}=\frac{\rho s}{\pi r_0^2}\left[1-\frac{2J_1\left(\mathrm{j}r_0\sqrt{\frac{s}{\nu}}\right)}{\mathrm{j}r_0\sqrt{\frac{s}{\nu}}J_0\left(\mathrm{j}r_0\sqrt{\frac{s}{\nu}}\right)}\right]^{-1}Q(s) \tag{10-43}$$

(10-43) 式与 (10-8 a) 的第一式比较一下，即可得具有层流液阻时的单位串联阻抗

$Z(s)$，设 $r_0\sqrt{\frac{s}{\nu}}=\lambda$，则

$$Z(s)=\frac{\rho s}{\pi r_0^2}\left[1-\frac{2J_1(j\lambda)}{j\lambda J_0(j\lambda)}\right]^{-1} \tag{10-44}$$

传播常数 $\gamma(s)$ 为

$$\gamma(s)=\sqrt{Z(s)Y(s)}=\sqrt{\frac{\rho}{\pi r_0^2}\frac{A}{K_e}s^2}\left[1-\frac{2J_1(j\lambda)}{j\lambda J_0(j\lambda)}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{s}{c}\left[1-\frac{2J_1(j\lambda)}{j\lambda J_0(j\lambda)}\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{10-45}$$

直接用（10-44）及（10-45）式来计算是很困难的，对于一般液压系统中的管路来说，$\lambda>3$，这时可采用下列近似式[1][2][3]

$$\frac{2J_1(j\lambda)}{j\lambda J_0(j\lambda)}\approx\frac{2}{\lambda}-\frac{1}{\lambda^2}-\frac{1}{4\lambda^3}$$

则

$$Z(s)=\frac{\rho s}{\pi r_0^2}\left[\frac{1}{1-\frac{2}{\lambda}+\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{4\lambda^3}}\right]=\frac{\rho s}{\pi r_0}\left[\frac{4\lambda^3}{4\lambda^3-8\lambda^2+4\lambda+1}\right]$$

$$\approx\frac{\rho s}{\pi r_0^2}\left[1+\frac{2}{\lambda}+\frac{3}{\lambda^2}+\frac{15}{4\lambda^3}\right]$$

$$\gamma(s)\approx\frac{s}{c}\left[1+\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda^2}+\frac{7}{8}\frac{1}{\lambda^3}\right]$$

式中 $\lambda=r_0\sqrt{\frac{s}{\nu}}$，如果液体的运动粘度 $\nu\to0$ 或 s 较 ν 大得多的情况下，λ 将是一个很大的值，这时 $Z(s)\approx\frac{\rho s}{\pi r_0^2}$，$\gamma(s)\approx\frac{s}{c}$，$\Gamma(s)=\gamma(s)l=\frac{ls}{c}=T_e s$，这是略去管道液阻的情况。

例如 J. Donelson 及 R. Oldenburger[4]在 *TVA* 的 Appalachia 电厂的输水系统做频率特性测试，摆动水轮机导叶产生波动来测定输水系统的有关参数，这个输水系统包括一个 8 英哩长，直径为 11 呎（约 3.35 m），长 600 呎（183 m）的进水钢管，在 0.00014～2cps 即 0.00014～2Hz 的范围内不计液阻的理论计算与实测结果很好符合。另一例是J. D. Regets[5] 在 68 呎（约 21 m）长的 1 吋不锈钢管（管壁厚为 $\frac{1}{16}$ 吋）上用JP-4 燃料油进行测试，试验压强约 50psig（约 3.4bar），温度为 25℃，平均流量为 $37in^3/s$（约 36.4 l/min），雷诺数在 14,000 左右。在 0.5～90 Hz 范围内不计液阻的理论计算与实测十分符合，上述二例频率不

[1] Lyon R. E., Diffusion of Sound Waves in a Turbulent Atmosphere, NASA TN D-456 Sept. 1960。

[2] 油空压便览，I 编4.3pp. 76～89。

[3] Brown F. T., The Transient Response of Fluid Lines, Trans. ASME Series D V84 N4 1962 pp. 547～553。

[4] Oldenburger R. & Donelson J. Jr., Dynamic Response of a Hydroelectric Plant AIEE Transaction Paper No. 62～167。

[5] Regets J. D. Jr., An Experimental Determination of the Dynamic Response of a Long Hydraulic Line, NASA TN D-576 Dec. 1960。

高，但粘度较小，可以略去液阻，如果油液的粘度稍大，只要频率较高，液阻也可不计，所以在很多工程问题，在频率响应计算中可以略去液阻的影响。

§10-5 管路的谐振(不计液阻的近似解)

在频率较高或粘度很小的情况下，液阻可以忽略不计，这时管路的特性阻抗$Z_0(s)=\frac{1}{A}\sqrt{\rho K_e}$，传播常数$\gamma(s)=\frac{s}{c}$，$\Gamma(s)=\gamma(s)l=T_e s$。因为系统的干扰或讯号往往是一个波动量，它可以近似地看作为正弦变化，设这个变动量$x(t)=x_0e^{j\omega t}$，则

$$\frac{dx(t)}{dt}=j\omega x_0e^{j\omega t}=j\omega x(t)$$

拉普拉斯变换后得

$$sX(s)-x(0)=sX(s)-x_0=j\omega X(s)$$

式中x_0是干扰信号的振幅，就频率来讲，x_0的大小并不影响频率，由此可得$s=j\omega$。因此要讨论管路的频率响应，必须将有关方程中的s换为$j\omega$，然后再进行分析求解。

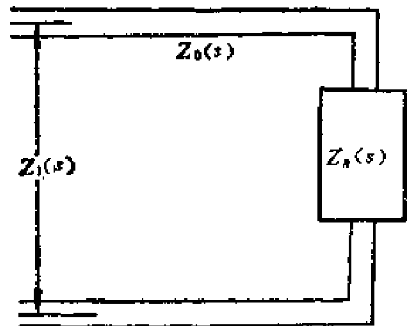


图10-13 管路系统

一特性阻抗为$Z_0(s)$的液压管路系统，如图10-13所示，负载阻抗为$Z_R(s)=\frac{P_2(s)}{Q_2(s)}$，输入端的液源阻抗为$Z_1(s)$，则

$$Z_1(s)=\frac{P_1(s)}{Q_1(s)}=\frac{P_2(s)\mathrm{ch}\Gamma(s)+Q_2(s)Z_0(s)\mathrm{sh}\Gamma(s)}{Q_2(s)\mathrm{ch}\Gamma(s)+P_2(s)\frac{1}{Z_0(s)}\mathrm{sh}\Gamma(s)}$$

$$=\frac{Z_R(s)\mathrm{ch}\Gamma(s)+Z_0(s)\mathrm{sh}\Gamma(s)}{\mathrm{ch}\Gamma(s)+\frac{Z_R(s)}{Z_0(s)}\mathrm{sh}\Gamma(s)}=Z_0(s)\frac{Z_R(s)\mathrm{ch}\Gamma(s)+Z_0(s)\mathrm{sh}\Gamma(s)}{Z_R(s)\mathrm{sh}\Gamma(s)+Z_0(s)\mathrm{ch}\Gamma(s)}$$

略去管路的液阻，并以$s=j\omega$代入，因为$\mathrm{ch}\,j\frac{l\omega}{c}=\cos\frac{\omega l}{c}$，$\mathrm{sh}\,j\frac{\omega l}{c}=j\sin\frac{\omega l}{c}$，则

$$Z_1(j\omega)=Z_0(j\omega)\frac{Z_R(j\omega)\cos\frac{\omega l}{c}+jZ_0(j\omega)\sin\frac{\omega l}{c}}{Z_0(j\omega)\cos\frac{\omega l}{c}+jZ_R(j\omega)\sin\frac{\omega l}{c}} \tag{10-46}$$

现在我们将对上述简单管路进行讨论：

1. 开端管路

如果管路负载端是通向大气，则负载阻抗$Z_R(j\omega)=0$，由(10-46)式得液源阻抗$Z_1(j\omega)$为

$$Z_1(j\omega)=jZ_0(j\omega)\mathrm{tg}\frac{\omega l}{c} \tag{10-47}$$

当$\frac{\omega l}{c}=n\pi$时 $Z_1(j\omega)=0$，这时管路发生谐振，或当管路长度 $l=\frac{n\pi c}{\omega}$，$(n=1,2,3\cdots)$时，管路将发生谐振。

2. 闭端管路

如果把油液送入封闭的管路，则负载阻抗 $Z_R(j\omega)$ 变为无穷大，将（10-46）式分子分母各除 $Z_R(j\omega)$ 则

$$Z_1(j\omega)=\lim_{Z_R(j\omega)\to\infty} Z_0(j\omega)\frac{\cos\frac{\omega l}{c}+j\frac{Z_0(j\omega)}{Z_R(j\omega)}\sin\frac{\omega l}{c}}{\frac{Z_0(j\omega)}{Z_R(j\omega)}\cos\frac{\omega l}{c}+j\sin\frac{\omega l}{c}}=-jZ_0(j\omega)\operatorname{ctg}\frac{\omega l}{c} \quad (10\text{-}48)$$

由此可见，谐振发生的条件为

$$\frac{\omega l}{c}=(2n+1)\frac{\pi}{2}, \quad (n=0,1,2,3\cdots\cdots)$$

基本频率（$n=0$时的频率）f为

$$f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{c}{4l}$$

负载压强 $P_R(j\omega)$ 与液源压强 $P_1(j\omega)$ 的比由（10-17）第一式得

$$\frac{P_R(j\omega)}{P_1(j\omega)}=\operatorname{ch}\Gamma(j\omega)-Z_0(j\omega)\frac{Q_1(j\omega)}{P_1(j\omega)}\operatorname{sh}\Gamma(j\omega)$$

$$=\cos\frac{\omega l}{c}-j\frac{Z_0(j\omega)}{Z_1(j\omega)}\sin\frac{\omega l}{c}$$

以（10-48）式代入，则

$$\frac{P_R(j\omega)}{P_1(j\omega)}=\cos\frac{\omega l}{c}-\frac{j\sin\frac{\omega l}{c}}{-j\operatorname{ctg}\frac{\omega l}{c}}=\frac{1}{\cos\frac{\omega l}{c}} \quad (10\text{-}49)$$

方程（10-49）告诉我们 $P_R(j\omega)/P_1(j\omega)$ 的比是从1（当$\frac{\omega l}{c}=0$，π，$2\pi\cdots$时）变化到无穷大（当$\frac{\omega l}{c}=\frac{\pi}{2}$，$\frac{3\pi}{2}$，$\frac{5\pi}{2}\cdots$时，即发生谐振时）。当然实际上管路具有液阻，将不允许压强 $P_R(j\omega)$ 升至无穷大，但利用这个公式倒可以计算出难以计算的管路谐振长度。例如7缸柱塞泵，转速为1000转/分，管端用控制阀封闭，在$\frac{\omega l}{c}$等于$\frac{\pi}{2}$的奇数倍时产生谐振，则

$$\omega=7\left(\frac{1000}{60}\right)(2\pi)=733\text{rad/s}$$

$$c=\sqrt{\frac{K_e}{\rho}}=\sqrt{\frac{7000\times1000}{0.88\times10^{-8}}}=8.9\times10^4\text{cm/s}=890\text{m/s}$$

$$l=\frac{\pi}{2}\frac{c}{\omega}=\frac{890\pi}{2\times733}=1.91\text{m}$$

因此应当避开1.91米的长度或它的奇数倍。

3. 管端具有容腔

管端具有容腔，如果这个容腔的容积为零，则情况与闭端管路相同，如果容腔的容积为

无穷大，就成为开端管路。如果容腔的长度远较断面为小，则液感液阻都很小，可以忽略不计。设容腔容积为 V_c，组合体积弹性模量为K_e，则 $K_e=-dp\Big/\left(\dfrac{dV}{V_c}\right)$，

或
$$K_e\frac{dV}{dt}=-V_c\frac{dp}{dt}$$

因为$\dfrac{dV}{dt}=Q$，所以$Q=-\dfrac{V_c}{K_e}\dfrac{dp}{dt}$

通过拉普拉斯变换后得$Q(s)=-\dfrac{V_c}{K_e}sP(s)$

由此得

$$Z_R(s)=Z_2(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}=-\frac{K_e}{V_cs}$$

以 $s=\mathrm{j}\omega$ 代入得阻抗 $Z_R(\mathrm{j}\omega)$

$$Z_R(\mathrm{j}\omega)=-\frac{K_e}{V_c\mathrm{j}\omega}=\mathrm{j}\frac{K_e}{\omega V_c}$$

代入（10-46）式得液源阻抗

$$Z_1(\mathrm{j}\omega)=\mathrm{j}Z_0(\mathrm{j}\omega)\frac{Z_0(\mathrm{j}\omega)\sin\dfrac{\omega l}{c}+\dfrac{K_e}{\omega V_c}\cos\dfrac{\omega l}{c}}{Z_0(\mathrm{j}\omega)\cos\dfrac{\omega l}{c}-\dfrac{K_e}{\omega V_c}\sin\dfrac{\omega l}{c}}$$

$$=\mathrm{j}Z_0(\mathrm{j}\omega)\mathrm{tg}\left(\frac{\omega l}{c}+\varphi\right) \tag{10-50}$$

式中
$$\varphi=\mathrm{arctg}\frac{K_e}{\omega V_cZ_0(\mathrm{j}\omega)}$$

如果 $V_c=\infty$，则（10-50）式变成（10-47）式，如果 $V_c=0$，则（10-50）式变成（10-48）式。

系统发生谐振的条件是$Z_1(\mathrm{j}\omega)=0$ 即$\dfrac{\omega l}{c}+\varphi=n\pi$，或 $\omega=(n\pi-\varphi)\dfrac{c}{l}$，谐振频率 f_{tc} 为

$$f_{tc}=\frac{\omega}{2\pi}=\left(\frac{n\pi-\varphi}{2\pi l}\right)c \tag{10-51}$$

如果输入该系统的干扰或讯号的波动频率 f 与 f_{tc} 相接近，那末系统就发生谐振。如果已知波动频率 f（例如液源为 7 缸柱塞泵，每分 1000 转则波动频率 $f=\dfrac{7\times1000}{60}=116\mathrm{Hz}$），则发生谐振的管路长度 l 为

$$l=\left(\frac{n\pi-\varphi}{2\pi f}\right)c \tag{10-52}$$

4. 管端具有固定节流孔的管路

通过节流孔的压强-流量关系并不是线性的，但可采用微增量的办法加以线性化。通过节流孔的流量增量 $q(l,t)$ 为

$$q(l,t)=K_1x(t)+K_2p(l,t) \tag{10-53}$$

式中 $p(l,t)$——节流孔前的压强增量；

$x(t)$——节流孔开度增量。

因为节流孔是固定的，所以 $x(t)=0$，(10-53) 式取拉普拉斯变换得

$$Q_2(s)=K_2P_2(s)$$

由此可得负载阻抗 $Z_2(s)=Z_R(s)$ 为

$$Z_2(s)=\frac{P_2(s)}{Q_2(s)}=\frac{1}{K_2}$$

代入 (10-46) 式得液源阻抗 $Z_1(j\omega)$ 为

$$Z_1(j\omega)=Z_0(j\omega)\frac{Z_2(j\omega)\cos\frac{\omega l}{c}+jZ_0(j\omega)\sin\frac{\omega l}{c}}{Z_0(j\omega)\cos\frac{\omega l}{c}+jZ_2(j\omega)\sin\frac{\omega l}{c}} \tag{10-54}$$

我们画出$\frac{\omega l}{c}$从 0 至π时矢量 $Z_1(j\omega)$ 在复平面上的轨迹：

当$\frac{\omega l}{c}=0$时， $Z_1=Z_0\frac{Z_2}{Z_0}=Z_2$

当$\frac{\omega l}{c}=\frac{\pi}{4}$时， $Z_1=Z_0\left(\frac{Z_2+jZ_0}{Z_0+jZ_2}\right)=\left(\frac{2Z_0Z_2}{Z_0^2+Z_2^2}+j\frac{Z_0^2-Z_2^2}{Z_0^2+Z_2^2}\right)Z_0$

当$\frac{\omega l}{c}=\frac{\pi}{2}$时， $Z_1=Z_0\frac{Z_0}{Z_2}=\frac{Z_0^2}{Z_2}$

当$\frac{\omega l}{c}=\frac{3\pi}{4}$时， $Z_1=\left(\frac{2Z_0^2Z_2}{Z_0^2+Z_2^2}-j\frac{Z_0^2-Z_2^2}{Z_0^2+Z_2^2}\right)Z_0$

当$\frac{\omega l}{c}=\pi$时， $Z_1=Z_2$

由此可见液源阻抗具有实数部分，它不可能为零，而只有最小值。最小值发生在$\frac{\omega l}{c}=n\pi$，$n=0,1,2,3\cdots\cdots$，如图 10-14 所示。这时的阻尼最小，易于发生谐振，因此，管路应避免 $l=\frac{n\pi c}{\omega}$这样的长度。

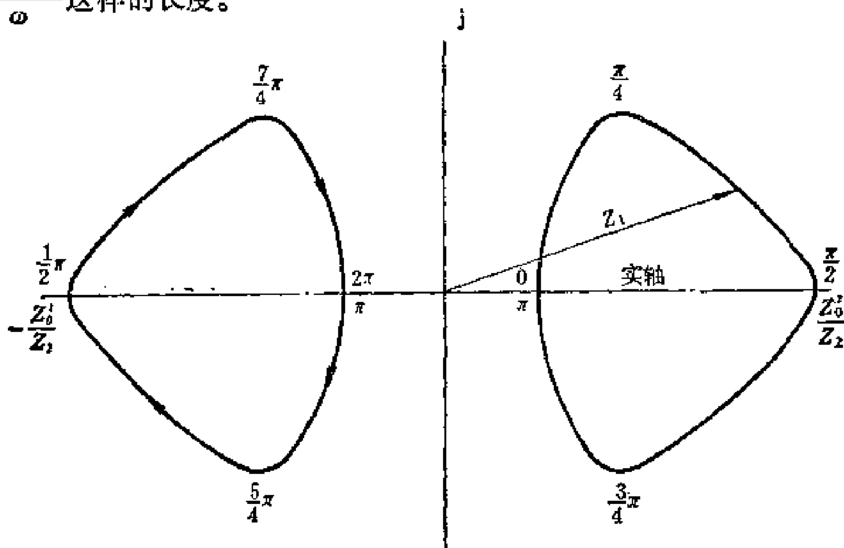


图10-14 液源阻抗Z_1在复平面上的轨迹

§10-6 消振的措施

液压系统的振动往往来源于压强和流量的波动，因此液压系统振动与下列几点有关：

（1）泵和马达的几何尺寸和形状；

（2）管道的几何尺寸和材质；

（3）油液的物理性质。

由于振动不仅影响工作质量，使元件寿命降低，而且发生噪声，污染环境。因此要重视这个问题，设法消振。实际上系统中压强和流量不可能完全没有波动，引起振动的因素是客观存在的，我们所能做到的只是：第一，不引起谐振；第二，尽可能减小系统中压强和流量波动的幅值，目前所采用的办法如下：

（1）在主管路中适当的地方接一闭端支路，如果该支路的输入阻抗为零，则全部波动将由支管引走，主管路内获得平稳的液流而消振[1]。支路的设计条件为 $Z_1 = jZ_0 \text{ctg}\dfrac{\omega l}{c} = 0$，即

$$\frac{\omega l}{c} = \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{5\pi}{2}\cdots\cdots$$

（2）采用干涉滤波器。这种滤波器有几种形式：

① 管式滤波器（即 Herschel-Quincke 管[2]）

管式滤波器如图 10-15 所示，这种管式滤波器中各管段的断面积关系为

$$面积(1) = 面积(4) = 面积(2) + 面积(3),$$

如果管 2 与管 3 的长度相差$\left(n+\dfrac{1}{2}\right)$个波长，即

$$l_3 = l_2 + \frac{(2n+1)\lambda}{2} \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

则在管 2，管 3 和管 4 接合处的压强波动能极大地减小，这里波长 $\lambda = \dfrac{c}{f} = \dfrac{2\pi c}{\omega}$。

② 筒式消声器

如图 10-16 所示，内管直径 d 必须按管内呈层流运动来决定[3]，其最小值为

$$d = 0.078Q \text{ mm}$$

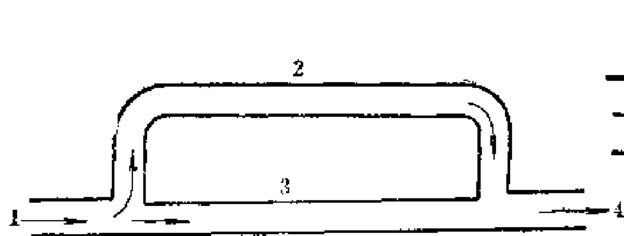


图10-15 Herschel-Quincke管

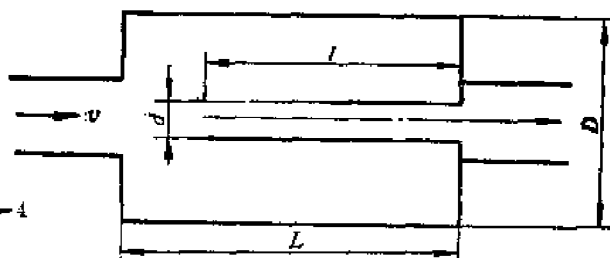


图10-16 筒式消声器

[1] Keller G. R., Hydraulic System Analysis H&P V21 N17 1968 pp152～159.

[2] Stewart G. W., The Theory of the Herschel-Quincke Tube, Physical Review April 1928.

[3] 藤井定美，油圧システムにおける騒音の減少，油圧技術，第13卷第6号1974，pp. 75～80.

式中　Q——最大流量，l/min。

大筒直径D与长度L按要求降低的频率f_c计算：

$$f_c = \frac{0.282cd}{\sqrt{lV}}$$

式中　$V=0.785D^2L$，l为内管长度，c为声速。

（3）在管路系统中装置蓄能器

液压系统中为了吸收泵的流量脉动，往往装置气-液式蓄能器，可以把蓄能器看作一充满气体介质的闭端支路，因此为了使蓄能器有较好的消振效果，应使蓄能器的输入阻抗$Z_1=0$，这就是说蓄能器的充气长度l应符合下列条件：

$$\frac{\omega l}{c}=\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{5\pi}{2},\ \cdots\cdots$$

例如一系统以9缸柱塞泵为液源，泵的旋转频率为16.6Hz（1000rpm），系统压强为210bar，温度为50℃，蓄能器充以氮气，则泵的角频率ω为

$$\omega=2\pi(16.6)(9)=938.7\text{rad/s}$$

因为氮气的气体常数$R=296.8\text{J/kg}\cdot\text{K}=296.8\dfrac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{kg}\cdot\text{K}}=296.8\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2\cdot\text{kg}\cdot\text{K}$，在绝热过程下声速$c$为

$$c=\sqrt{kRT}=\sqrt{1.4\times296.8\times(273+50)}$$
$$=\sqrt{134000}=366\text{m/s}$$

所以充气长度

$$l=\frac{\frac{\pi}{2}c}{\omega}=\frac{\pi c}{2\omega}=\frac{3.14\times366}{2\times938.7}=0.613\text{m}$$

如果蓄能器充以二氧化碳，因为二氧化碳的气体常数$R=188.9\text{J/kg}\cdot\text{K}$，则声速$c$为

$$c=\sqrt{kRT}=\sqrt{1.3\times188.9\times323}=\sqrt{79360}=281.7\text{m/s}$$

由此得蓄能器充气长度

$$l=\frac{\pi c}{2\omega}=\frac{3.14\times281.7}{2\times938.7}=0.471\text{m}$$

即充气长度为471mm

*§10-7　输送管道动态分析

上节中讨论了输送管道的谐振条件，这是输送管道分析的一个重要问题，但它只反映了管路系统的一个方面。比较全面的反映管路特性，即管路的$P_1(s)$、$Q_1(s)$、$P_2(s)$及$Q_2(s)$中任一发生波动时，其它各参变量是如何随它发生响应的，这个问题的分析综合计算是十分复杂的，因此要设法加以简化，只要在精度上能满足工程上的要求，可以采用近似计算，无穷乘积法[1][2][3]就是解决这个问题的一种有效的近似计算方法。现以输出端带

〔1〕 Jeffrey H. & Jeffrey B. S., Methods of Mathematical Physics, Cambridge Univ. Press 1950 pp. 383～386。

〔2〕 Oldenburger R. & Goodson R. E., Simplification of Hydraulic Line Dynamics by the Use of Infinitive Products, J. of Basic Engng. 1964 pp. 1～10。

〔3〕 Goodson R. E, Distributed System Simulation using Infinitive Product Expansions, Simulation V15 N6 1970 pp. 255～263。

有固定节流孔的管道为例加以说明。

节流孔出流的流量为q_2，则

$$q_2(l,t)=K_1x(t)+K_2p(l,t)$$

因为这是一个固定节流孔，所以$x(t)=0$，取拉普拉斯变换得

$$Q_2(s)=K_2P(s) \qquad (10\text{-}55)$$

由（10-18）式及（10-55）式可得管道的传递函数$G_1(s)$，$G_2(s)$及$G_3(s)$为

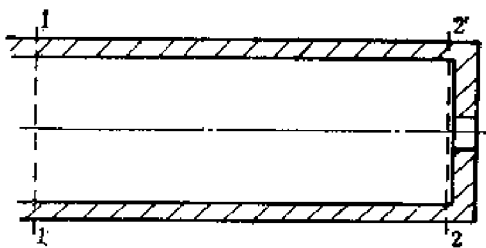


图10-17 带有固定节流孔的管道

$$\left.\begin{aligned}
G_1(s)&=K_2\frac{P_1(s)}{Q_1(s)}=\frac{\operatorname{ch}\Gamma(s)+K_2Z_0(s)\operatorname{sh}\Gamma(s)}{\operatorname{ch}\Gamma(s)+\dfrac{1}{K_2Z_0(s)}\operatorname{sh}\Gamma(s)}\\
G_2(s)&=\frac{P_2(s)}{P_1(s)}=\frac{1}{\operatorname{ch}\Gamma(s)+K_2Z_0(s)\operatorname{sh}\Gamma(s)}\\
G_3(s)&=\frac{Q_2(s)}{Q_1(s)}=\frac{1}{\operatorname{ch}\Gamma(s)+\dfrac{1}{K_2Z_0(s)}\operatorname{sh}\Gamma(s)}
\end{aligned}\right\} \qquad (10\text{-}56)$$

这些公式中分子或分母都为$F(z)=\operatorname{ch}z+B\operatorname{sh}z$的形式，如果略去液阻则$z=\Gamma(s)=T_e s$，$B=K_2Z_0=\dfrac{K_2}{A}\sqrt{\rho K_e}$＝常数。如果考虑液阻，则$z=\Gamma(s)$，$B$将不再是一常数，而是$\Gamma(s)$的函数。

按照常规的计算方法，$F(z)$可以展成无穷级数，设取前五项，并记作$F_5(z)$，则

$$F_5(z)=1+Bz+\frac{z^2}{2!}+B\left(\frac{z^3}{3!}\right)+\frac{z^4}{4!}+B\left(\frac{z^5}{5!}\right)$$

如果要用乘积形式来表示$F_5(z)$，则可设$F_5(z)=0$，然后解方程的根为α_1，α_2，α_3，α_4及α_5，则

$$F_5(z)=\left(1-\frac{z}{\alpha_1}\right)\left(1-\frac{z}{\alpha_2}\right)\left(1-\frac{z}{\alpha_3}\right)\left(1-\frac{z}{\alpha_4}\right)\left(1-\frac{z}{\alpha_5}\right)$$

但当$F_5(z)=0$，即

$$z^5+5z^4/B+20z^3+60z^2/B+120z+120/B=0$$

根据劳斯（Routh）稳定判据，上式的劳斯阵列为

$$\begin{array}{ccc}
1 & 20 & 120\\
5/B & 60/B & 120/B\\
8 & 96 & \\
0 & &
\end{array}$$

因为劳斯阵列的第一列出现零值，即上列传递函数$G_1(s)$，$G_2(s)$及$G_3(s)$的分母有±j的根，不满足系统稳定的充分和必要条件，但实际上这个物理系统却可能是稳定的。如果$F(z)$取更少的项，例如取二项或三项，则数学上可不出现不稳定，但近似计算就显得太粗略，因此只能采用其他的办法。

设 $z=x+jy$

则 $\operatorname{ch}z=\dfrac{e^z+e^{-z}}{2}=\dfrac{e^xe^{jy}+e^{-x}e^{-jy}}{2}$，$\operatorname{sh}z=\dfrac{e^z-e^{-z}}{2}=\dfrac{e^xe^{jy}-e^{-x}e^{-jy}}{2}$，

代入$F(z)=\text{ch}z+B\text{sh}z=0$得

$$e^{x}e^{jy}+e^{-x}e^{-jy}+Be^{x}e^{jy}-Be^{-x}e^{-jy}=0$$

由此得

$$e^{2x}e^{j2y}=\frac{B-1}{B+1}$$

或

$$e^{2x}\cos 2y+je^{2x}\sin 2y=\frac{B-1}{B+1}$$

因为$B=K_2Z_0$或$B=\frac{1}{K_2Z_0}$均为正实数，所以

$$e^{2x}\cos 2y=\frac{B-1}{B+1} \tag{10-57}$$

$$e^{2x}\sin 2y=0 \tag{10-58}$$

因为x不是$-\infty$，由（10-57）及（10-58）可见$B\neq 1$，由此得$\sin 2y=0$，即$2y=\pm k\pi$。

为了满足方程（10-57），当$B<1$时$\cos 2y$应为负值，即$k=2n+1$，当$B>1$时$\cos 2y$应为正值，即$k=2n$，由此可得

$$x=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{B-1}{B+1}\right|$$

$$y=\pm\frac{2n+1}{2}\pi,\quad B<1$$

$$y=\pm n\pi,\quad B>1$$

即方程的根为

$$\left.\begin{aligned} z&=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{B-1}{B+1}\right|\pm j\frac{2n+1}{2}\pi \qquad B<1\\ z&=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{B-1}{B+1}\right|\pm jn\pi \qquad B>1\end{aligned}\right\} \tag{10-59}$$

设 $x_B=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{B-1}{B+1}\right|$，则当$B<1$时

$$\text{ch}z+B\text{sh}z=\prod_{n=0}^{\infty}\left[1-\frac{z}{x_B+j\left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi}\right]\left[1-\frac{z}{x_B-j\left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi}\right]$$

$$=\prod_{n=0}^{\infty}\left[1-\frac{2x_Bz-z^2}{x_B^2+\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2\pi^2}\right] \tag{10-60}$$

当$B>1$时，则

$$\text{ch}z+B\text{sh}z=\left[1-\frac{z}{x_B}\right]\prod_{n=1}^{\infty}\left[1-\frac{z}{x_B+jn\pi}\right]\left[1-\frac{z}{x_B-jn\pi}\right]$$

$$=\left[1-\frac{z}{x_B}\right]\prod_{n=1}^{\infty}\left[1-\frac{2x_Bz-z^2}{x_B^2+n^2\pi^2}\right] \tag{10-61}$$

如果$K_2Z_0>1$，则传递函数$G_1(s)$为

$$G_1(s)=\frac{\left[1-\frac{\Gamma(s)}{x_g}\right]\prod_{n=1}^{\infty}\left\{1-\frac{2x_g\Gamma(s)-[\Gamma(s)]^2}{x_g^2+n^2\pi^2}\right\}}{\prod_{n=0}^{\infty}\left\{1-\frac{2x_g\Gamma(s)-[\Gamma(s)]^2}{x_g^2+\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2\pi^2}\right\}} \tag{10-62}$$

当频率较大时，可不计液阻，则 $\Gamma(s)=T_e s$，并设 $-\frac{x_g}{T_e}=\omega_0$，$\frac{\sqrt{x_g^2+n^2\pi^2}}{T_e}=\omega_{1n}$，$\frac{\sqrt{x_g^2+\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2\pi^2}}{T_e}=\omega_{2n}$，$\frac{-x_g}{\sqrt{x_g^2+n^2\pi^2}}=\zeta_{1n}$ 及 $-\frac{x_g}{\sqrt{x_g^2+\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2\pi^2}}=\zeta_{2n}$，则传递函数 $G_1(s)$ 为

$$G_1(s)=\frac{\left(1+\frac{s}{\omega_0}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+2\zeta_{1n}\frac{s}{\omega_{1n}}+\frac{s^2}{\omega_{1n}^2}\right)}{\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+2\zeta_{2n}\frac{s}{\omega_{2n}}+\frac{s^2}{\omega_{2n}^2}\right)} \tag{10-63}$$

式中　$n=0,1,2\cdots\cdots$

第一次近似取 $n=0$，则 $G_1(s)=G_{10}(s)$

$$G_{10}(s)=\frac{1+\frac{s}{\omega_0}}{1+2\zeta_{20}\frac{s}{\omega_{20}}+\frac{s^2}{\omega_{20}^2}} \tag{10-64}$$

不少工程问题，用 $n=0$ 的近似计算已可获得可用的精度，n 项取得越多，精度越高，例如 $n=1$，则 $G_1(s)=G_{11}(s)$

$$G_{11}(s)=\frac{\left(1+\frac{s}{\omega_0}\right)\left(1+\frac{2\zeta_{11}s}{\omega_{11}}+\frac{s^2}{\omega_{11}^2}\right)}{\left(1+2\frac{\zeta_{20}s}{\omega_{20}}+\frac{s^2}{\omega_{20}^2}\right)\left(1+2\frac{\zeta_{21}s}{\omega_{21}}+\frac{s^2}{\omega_{21}^2}\right)} \tag{10-65}$$

如果 n 取至 r 项，则

$$G_{1r}(s)=\frac{\left(1+\frac{s}{\omega_0}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+2\zeta_{1n}\frac{s}{\omega_{1n}}+\frac{s^2}{\omega_{1n}^2}\right)}{\prod_{n=0}^{r}\left(1+2\zeta_{2n}\frac{s}{\omega_{2n}}+\frac{s^2}{\omega_{2n}^2}\right)} \tag{10-66}$$

上列的 $G_1(s)$ 式中分母均有同一形式的典型二次三项式，设以 $M(s)$ 表示之，即

$$M(s)=1+\frac{2\zeta s}{\omega_n}+\frac{s^2}{\omega_n^2}$$

当 $M(s)$ 的振幅为最小时，可得 $G_1(s)$ 的最大振幅值，这就是产生谐振的点，以 $s=j\omega$ 代入上式得

$$M(j\omega)=1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}+j\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}$$

$M(j\omega)$ 的振幅为

$$|M(j\omega)|=\left[\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}=\left[1-\frac{2(1-2\zeta)^2\omega^2}{\omega_n^2}+\frac{\omega^4}{\omega_n^4}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$|M(j\omega)|$ 最小时的角频率，也就是谐振角频率 ω_k 为：

$$\frac{d|M(j\omega)|}{d\omega}=\frac{1}{2}\left[1-\frac{2(1-2\zeta^2)\omega^2}{\omega_n^2}+\frac{\omega^4}{\omega_n^4}\right]^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{-4(1-2\zeta^2)\omega}{\omega_n^2}+\frac{4\omega^3}{\omega_n^4}\right)=0$$

即
$$\frac{4\omega^3}{\omega_n^4}-\frac{4(1-2\zeta^2)\omega}{\omega_n^2}=0$$

由此得

$$\omega_k=\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2} \tag{10-67}$$

代入 $|M(j\omega)|$ 式中得 $M(j\omega)$ 的最小振幅 M_{min} 为

$$M_{min}=2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}$$

对前述 J. D. Regets 的试验装置（$l=68$ 呎，$\phi 1''$），用无穷乘积法进行计算，已知 $K_2Z_2=1.555$，$T_e=\frac{l}{c}=0.0176$ 秒，则

$$G_1(s)=\frac{\mathrm{ch}T_es+1.555\mathrm{sh}T_es}{\mathrm{ch}T_es+\frac{1}{1.555}\mathrm{sh}T_es}$$

传递函数$G_1(s)$ 的分子中 $B=1.555$，分母中 $B=\frac{1}{1.555}=0.643$。当 $B=1.555$ 时，$x_B=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{0.555}{2.555}\right|=-0.763$。当 $B=0.643$ 时，$x_B=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{0.357}{1.643}\right|=-0.763$

$$\omega_0=-\frac{x_B}{T_e}=\frac{0.763}{0.0176}=43.4\mathrm{rad/s}$$

$$\omega_{1n}=\frac{1}{T_e}\sqrt{x_B^2+(n\pi)^2}=\frac{1}{0.0176}\sqrt{(0.763)^2+(n\pi)^2}$$

$$=56.8[(0.763)^2+(n\pi)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$\omega_{2n}=\frac{1}{T_e}\sqrt{x_B^2+\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2\pi^2}=56.8\left[(0.763)^2+\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2\pi^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\zeta_{1n}=\frac{-x_B}{\sqrt{x_B^2+(n\pi)^2}}=\frac{0.763}{[(0.763)^2+(n\pi)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\zeta_{2n}=\frac{-x_B}{\sqrt{x_B^2+\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2\pi^2}}=\frac{0.763}{\left[(0.763)^2+\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2\pi^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

n 从 0 到 5 的 $G_1(s)$ 函数中各常数和谐振角频率 $\omega_k=\omega_n\sqrt{1-2\zeta_n^2}$ 的值，计算如表（10-4）。

$n=0$ 的 $G_1(s)$ 近似值为

$$G_{10}(s)=\frac{1+(s/43.3)}{1+0.874(s/99.3)+(s/99.3)^2}$$

$n=0,1$ 的 $G_1(s)$ 近似值为

$$G_{11}(s)=\frac{\left(1+\frac{s}{\omega_0}\right)\left(1+\frac{2\zeta_{11}s}{\omega_{11}}+\frac{s^2}{\omega_{11}^2}\right)}{\left(1+\frac{2\zeta_{20}s}{\omega_{20}}+\frac{s^2}{\omega_{20}^2}\right)\left(1+\frac{2\zeta_{21}s}{\omega_{21}}+\frac{s^2}{\omega_{21}^2}\right)}$$

$$=\frac{[1+(s/43.3)][1+0.47(s/184)+(s/184)^2]}{[1+0.874(s/99.3)+(s/99.3)^2][1+0.318(s/271)+(s/271)^2]}$$

以 $s=j\omega$ 代入上式，经过数学运算写成 $G_1(j\omega)=A(\omega)e^{j\phi}(\omega)$形式，取对数后可以画出以 $20\lg A(\omega)$ 为纵座标，以 ω 为横座标的对数幅频特性，和以 ϕ 角为纵座标，ω 为横座标的对数相频特性，图 (10-18)，(10-19) 及 (10-20) 为 $G_{10}(j\omega)$，$G_{11}(j\omega)$ 和 $G_{15}(j\omega)$ 的对数幅频特性和对数相频特性与 $G_1(j\omega)$ 的比较。由图可见，近似值 $G_{10}(j\omega)$ 在 15Hz 以下的频率范围内与 $G_1(j\omega)$ 完全符合，它刚好包括了第一谐振点 (14Hz)。近似值 $G_{11}(j\omega)$ 的符合范围约为 0～40Hz，差不多包括了第一和第二谐振点(14Hz 和 42.4Hz)。近似值 $G_{15}(j\omega)$

表 10-4

n	ω_{1n}	ω_{2n}	ζ_{1n}	ζ_{2n}	$\omega_{1k}=\omega_{1n}\sqrt{1-2\zeta_{1n}^2}$	$\omega_{2k}=\omega_{2n}\sqrt{1-2\zeta_{2n}^2}$	$2\zeta_{1n}\sqrt{1-\zeta_{1n}^2}$	$2\zeta_{2n}\sqrt{1-\zeta_{2n}^2}$
0	—	$2\pi(15.82)$	—	0.437	—	$2\pi(14.0)$	—	0.8000
1	$2\pi(29.3)$	$2\pi(43.2)$	0.235	0.159	$2\pi(27.7)$	$2\pi(42.41)$	0.457	0.3140
2	$2\pi(57.3)$	$2\pi(71.6)$	0.120	0.0963	$2\pi(56.1)$	$2\pi(70.4)$	0.239	0.1824
3	$2\pi(85.6)$	$2\pi(100)$	0.0806	0.069	$2\pi(85.5)$	$2\pi(94.8)$	0.161	0.1370
4	$2\pi(114)$	$2\pi(128)$	0.0605	0.0539	$2\pi(114)$	$2\pi(128)$	0.121	0.1060
5	$2\pi(142)$	$2\pi(156)$	0.0485	0.0442	$2\pi(142)$	$2\pi(156)$	0.0970	0.0883

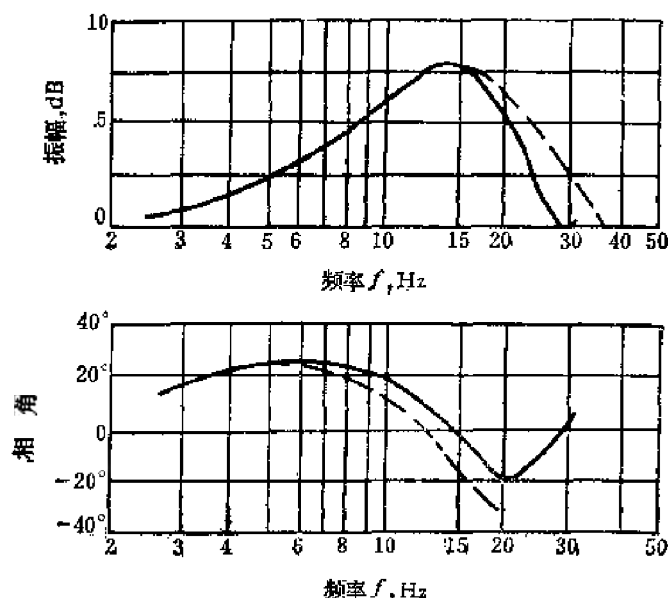


图10-18 对数幅频和相频特性（一次谐振）

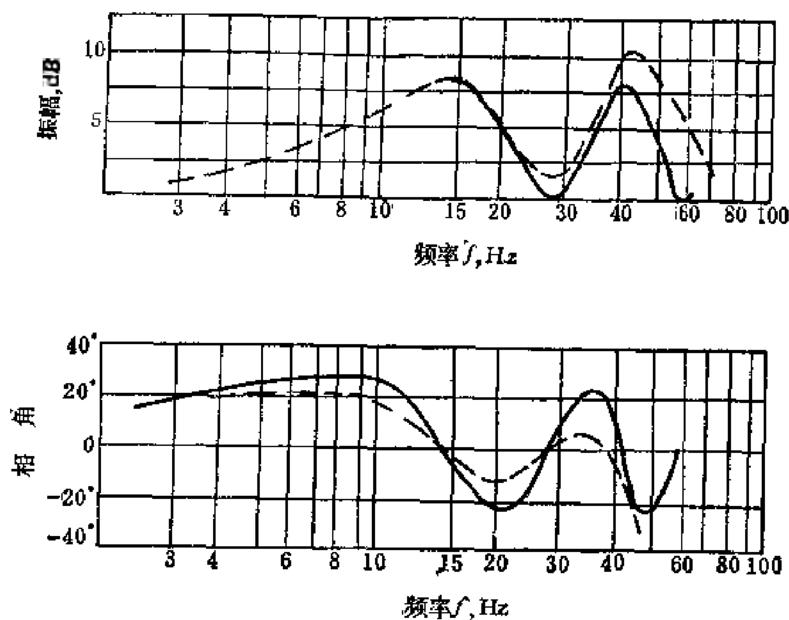


图10-19　对数幅频和相频特性（二次谐振）

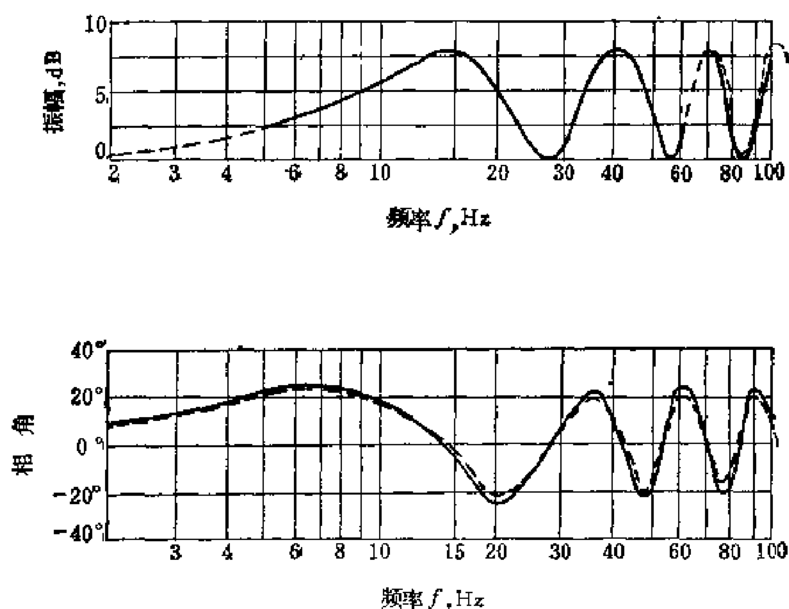


图10-20　对数幅频和相频特性（四次谐振）

精确度更高，达到0～90Hz范围，在这个范围内，幅值仅差1 db，相位角差约5°，它基本上包括了第一，第二，第三及第四个谐振点（14，42.4，70.4及94.8Hz）。由此可见，采用无穷乘积法来计算，$n=0$的近似值已有一定的精度。

*§10-8　管端带有容腔的管路

上节中我们用无穷乘积法比较详细地研究了一个简单的流动问题，现在我们进一步把这个方法用于更为普遍的情况，例如管道一端为定压源，另一端有一容积为V_c的容腔，然后

通过阀口出流。如图（10-21）所示。容腔接在管道的 2-2 端，可以认为容腔中的压强 p_c 即为 2-2 断面处的压强，即 $p_c = p_2 = p_0 + p(l, t)$，式中 $p(l, t)$ 为压强波动量，p_0为初始值。由于油液的压缩性和容腔的弹性，容腔中压强的任何变化将使容腔有如电容那样起储蓄和供油作用。如果油液和容腔的组合体积弹性模量为 K_e，则压强波动所引起的油液流量变化为

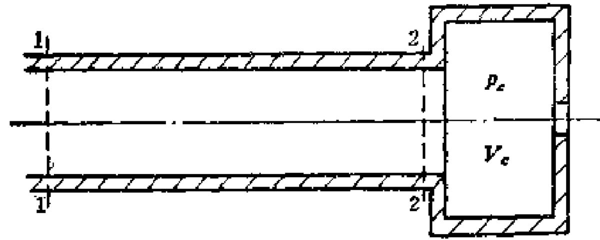


图10-21　管端带有容腔的管路

$$q_c = \frac{dV_c}{dt} = -\frac{V_c}{K_e}\frac{dp_c}{dt} = k_3\frac{dp(lt)}{dt}，\text{式中常数} k_3 = -\frac{V_c}{K_e}$$

设控制出流的阀的开度变化为 $x(t)$，则阀口出流流量变化为 q_v，则

$$q_v(x, p) = k_1 x(t) + k_2 p(l, t)$$

由此，管路 2-2 端的流量变化 $q(l, t)$ 为

$$q(l, t) = q_v + q_c = k_1 x(t) + k_2 p(l, t) + k_3\frac{dp(l, t)}{dt}$$

对上式进行拉普拉斯变换得

$$Q_2(s) = k_1 X(s) + k_2 P_2(s) + k_3 s P_2(s) \tag{10-68}$$

因为管道的 1-1 端压强恒定，即 $P_1(s) = 0$，代入(10-17) 式得

$$\left.\begin{aligned} P_2(s) &= -Z_0 Q_1(s)\operatorname{sh}\Gamma(s) \\ Q_2(s) &= Q_1(s)\operatorname{ch}\Gamma(s) \end{aligned}\right\} \tag{10-69}$$

如果不计液阻的影响，则 $\Gamma(s) = T_e s$，由 (10-68)及 (10-69) 式可得阀口开度的任何变化对管道 2-2 端的压强和流量的传递函数

$$\left.\begin{aligned} \frac{Q_2(s)}{X(s)} &= k_1\frac{\operatorname{ch}T_e s}{\operatorname{ch}T_e s + Z_0(k_2 + k_3 s)\operatorname{sh}T_e s} \\ \frac{P_2(s)}{X(s)} &= -k_1 Z_0\frac{\operatorname{sh}T_e s}{\operatorname{ch}T_e s + Z_0(k_2 + k_3 s)\operatorname{sh}T_e s} \end{aligned}\right\} \tag{10-70}$$

如果管端没有容腔则 $k_3 = 0$。

第 (10-70) 式中等号右边分子各为 $\operatorname{ch}T_e s$ 及 $\operatorname{sh}T_e s$，我们可以认为前者是 $B = 0$ 的 $F(z)$ 函数，后者是 $B = \infty$ 的 $\frac{F(z)}{B}$ 函数，即当 $B = 0$ 时，$x_s = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{B-1}{B+1}\right| = 0$，则

$$\operatorname{ch}z = F(z) = \prod_{n=0}^{\infty}\left[1 + \frac{z^2}{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2\pi^2}\right] \tag{10-71}$$

当 $B = \infty$ 时，$x_s = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{B-1}{B+1}\right| = 0$，则

$$\operatorname{sh}z = \frac{F(z)}{B} = \frac{1}{B}\left[1 - \frac{z}{x_s}\right]\prod_{n=1}^{\infty}\left[1 - \frac{2x_s z - z^2}{x_s^2 + n^2\pi^2}\right]$$

$$= \left(1 - \frac{z}{Bx_s}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left[1 + \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right]$$

因为$B=\infty$时$\frac{1}{Bx_s}$为不定式，用罗必达法则得

$$\lim_{B\to\infty}\frac{\frac{1}{B}}{x_s}=\lim_{B\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{B}\right)'}{(x_B)'}=\lim_{B\to\infty}\frac{-B^2+1}{B^2}=-1$$

因此

$$\operatorname{sh}z=z\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right] \tag{10-72}$$

（10-70）式中等号右边的分母仍为$F(z)=\operatorname{ch}z+B\operatorname{sh}z$的形式，但这里系数$B$不是常数，而是$z$的函数

$$B=Z_0(k_2+k_3s)=Z_0\left(k_2+\frac{k_3}{T_e}T_es\right)=Z_0\left(k_2+\frac{k_3z}{T_e}\right) \tag{10-73}$$

我们仍然可以解出$F(z)=0$的复数根，然后将$F(z)$展成无穷乘积。当然，计算要比B是常数的情况复杂得多。如果我们利用上面对$\operatorname{ch}z$及$\operatorname{sh}z$的展开式，则可不必解$F(z)=0$的根而直接得$F(z)$的展开式

$$F(z)=\operatorname{ch}z+B\operatorname{sh}z=\prod_{n=0}^{\infty}\left[1+\frac{z^2}{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2\pi^2}\right]+Bz\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right) \tag{10-74}$$

由此可得$n=0,1$时的传递函数

$$\frac{Q_2(s)}{X(s)}=k_1\frac{\left[1+\left(\frac{2T_es}{\pi}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{2T_es}{3\pi}\right)^2\right]}{\left[1+\left(\frac{2T_es}{\pi}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{2T_es}{3\pi}\right)^2\right]+Z_0(k_2+k_3s)T_es\left[1+\left(\frac{T_es}{\pi}\right)^2\right]}$$

$$\frac{P_2(s)}{X(s)}=-Z_0k_1\frac{T_es\left[1+\left(\frac{T_es}{\pi}\right)^2\right]}{\left[1+\left(\frac{2T_es}{\pi}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{2T_es}{3\pi}\right)^2\right]+Z_0(k_2+k_3s)T_es\left[1+\left(\frac{T_es}{\pi}\right)^2\right]}$$

当液阻不能忽略时，应将上式中T_es处改为$\Gamma(s)$，由（10-45）式及（10-44）式得

$$\left.\begin{aligned}\Gamma(s)&=\gamma(s)l=T_es\left[1-\frac{2J_1(j\lambda)}{j\lambda J_0(j\lambda)}\right]^{-\frac{1}{2}}\\ Z(s)&=\frac{\rho s}{\pi r_0^2}\left[1-\frac{2J_1(j\lambda)}{j\lambda J_0(j\lambda)}\right]^{-1}\end{aligned}\right\} \tag{10-75}$$

则

$$\begin{aligned}Z_0&=\sqrt{\frac{Z(s)}{Y(s)}}=\left(\frac{\rho}{\pi r_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{K_e}{\pi r_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[1-\frac{2J_1(j\lambda)}{j\lambda J_0(j\lambda)}\right]^{-\frac{1}{2}}\\&=\frac{\rho c}{\pi r_0^2}\frac{\Gamma(s)}{T_es}\end{aligned} \tag{10-76}$$

如果频率很低，设 $\rho\cdot\dfrac{A\omega}{\mu}<1$[1]，则可以把液阻$R_{hI}$作为常数，即$R_{hI}$ 为稳态时的液阻，则

$$\Gamma(s)=\gamma(s)l=\sqrt{Z(s)Y(s)}\,l=l\sqrt{(R_{hI}+L_{hI}s)C_{hI}s}$$

$$=l\sqrt{R_{hI}\frac{A}{K_e}s+\frac{\rho}{A}\cdot\frac{A}{K_e}s^2}=\frac{l}{c}\sqrt{R_{hI}\frac{A}{\rho}s+s^2}$$

$$=T_e\sqrt{R_{hI}\frac{A}{\rho}s+s^2}$$

$$Z_0(s)=\sqrt{\frac{Z(s)}{Y(s)}}=\sqrt{\frac{R_{hI}+L_{hI}s}{C_{hI}s}}=\sqrt{\frac{R_{hI}}{\frac{A}{K_e}s}+\frac{\frac{\rho}{A}}{\frac{A}{K_e}}}=\frac{\rho c}{As}\sqrt{\frac{A}{\rho}R_{hI}s+s^2}$$

式中 $R_{hI}\dfrac{A}{\rho}=\left(\dfrac{128\mu}{\pi d^4}\right)\left(\dfrac{\frac{\pi}{4}d^2}{\rho}\right)=\dfrac{32\nu}{d^2}$，

$c=\sqrt{\dfrac{K_e}{\rho}}$——声速。

*§10-9 油击现象

如果管路输入端为一容积较大的油箱，或为一蓄能器，这时可以认为管路输入端压强是恒定的。设在管路的输出端装有一阀门，油液经管路和输出端的阀门出流，当阀门开启而开度不变时，则输入端和输出端流量都是恒定的，即 $Q_{10}=Q_{20}=vA$，这里 v 是管道内平均流速，A是管道断面积。当阀门突然关闭，则在此瞬时输出端（仅仅是输出端）流量将首先由 Q_{20} 突然改变为零，这时在输出端（阀门前面）的油液突然失去了动能，而造成压强的突然升高，升高的压强以声速 c 向输入端传递，并使管道内的油液依次失去流速。设管路长为 l，则阀门关闭后 $t_1=\dfrac{l}{c}$时压强传递至输入端，由于输入端固有的压强小于传递来的压强，油液就向油箱或蓄能器倒流，使输入端压强下降，并以声速 c 依次向输出端传递，至 $t_2=\dfrac{2l}{c}$后到达输出端，这时由于阀门是呈关闭状态，因此油液的倒流就使阀门前输出端的压强由高压突然变为低压，这里造成的低压又将以声速 c 向输入端传递。这样循环往复，使管道内发生压强的振荡，称为水锤现象，在液压技术中称为油击，所以油击实质上是非恒定流的一个特殊状态。

当阀门突然关闭时输出端的流量将由 $Q_{02}=vA$ 突然变为零，即流量的改变为 $\Delta q_2=0-Q_{02}=-vA$。阀门的急骤关闭而造成的流量的突变相当于一个阶跃输入，所以

$$Q_2(s)=-\frac{vA}{s} \tag{10-77}$$

由于管道输入端压强恒定，即 $P_1(s)=0$，由（10-17）式可得

[1] Paynter H. M. & Brown F. T., Discussion on Simplification of Hydraulic Line Dynamic by Use of Infinitive Products, Trans. ASME Series D V. 86NJ, 1964 p. 9.

$$\frac{P_2(s)}{Q_2(s)}=-Z_0(s)\frac{\text{sh}\Gamma(s)}{\text{ch}\Gamma(s)}=-Z_0(s)\text{th}\Gamma(s) \tag{10-78}$$

如果略去液阻，则$Z_0(s)=\dfrac{\rho c}{A}$，$\Gamma(s)=T_e s$ 并以 $Q_2(s)=-\dfrac{vA}{s}$代入，则

$$P_2(s)=\frac{\rho vc}{s}\text{th}T_e s \tag{10-79}$$

上述输出端压强变化的拉普拉斯变换函数可按 Heaviside 展开定理[1][2]进行反演得傅里叶级数形式的原函数为

$$p_2(t)=\rho vc\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{(2n+1)\pi}\sin\frac{(2n+1)}{2T_e}\pi t \tag{10-80}$$

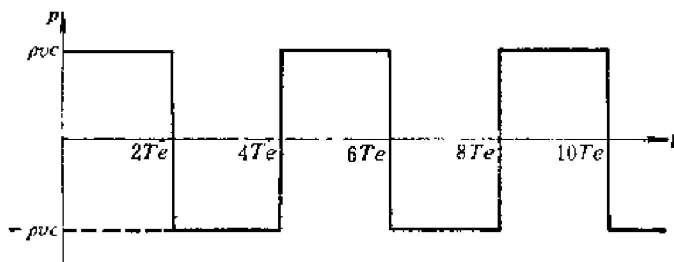


图10-22 油击压强

这是振幅为 ρvc，周期为 $4T_e$ 的方波，如图（10-22）所示。

如果采用无穷乘积来解，则

$$p_2(s)=\frac{\rho vc}{s}\,\frac{\text{sh}T_e s}{\text{ch}T_e s}=\frac{\rho vc}{s}\,\frac{T_e s\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left[1+\dfrac{T_e^2 s^2}{n^2\pi^2}\right]}{\prod\limits_{n=0}^{\infty}\left[1+\dfrac{T_e^2 s^2}{\left(\dfrac{2n+1}{2}\right)^2\pi^2}\right]} \tag{10-81}$$

将上述拉普拉斯变换函数 $P_2(s)$的无穷乘积用部分分式展成无穷级数后反演为

$$p_2(t)=\rho vc\sum_{n=0}^{N}K_n(N)\sin\frac{(2n+1)\pi}{2}\,\frac{t}{T_e} \tag{10-82}$$

式中系数 $K_n(N)$ 为

当 $N=0$　　$K_0(0)=\dfrac{\pi}{2}$

$N=1$　　$K_0(1)=\dfrac{27}{64}\pi$，$K_1(1)=\dfrac{15}{64}\pi$

$N=2$　　$K_0(2)=\dfrac{7625}{22016}\pi$，$K_1(2)=\dfrac{3625}{22016}\pi$，$K_2(2)=\dfrac{3815}{22016}\pi$。

*§10-10 异径管路和分支管路

如果管路是由直径不同的管道连接而成，如图（10-23）。油液从断面积为 A_1 的管道 a 流向断面积为 A_2 的管道 b，这里 $A_1\neq A_2$，设输入端为 1，连接端为 2，输出端为 3，并设 $V_i=\begin{bmatrix}P_i(s)\\Q_i(s)\end{bmatrix}$，下标 $i=1,2,3$，这里 P_i 及 Q_i 是压强 p_i 和流量q_i的拉普拉斯变换，

[1] Wittaker E. T. & Watson G. N., A Course in Modern Analysis, Cambridge Univ. Press 1927 pp. 134～136。

[2] Pipe L. A., Applied Mathematics for Engineers & Physicists, McGraw-Hill 2nd edition pp. 604～610。

如果以 $G_a(s)$ 及 $G_b(s)$ 表示管道 a 及 b 的矩阵传递函数，即

$$\left.\begin{aligned} V_2 &= G_a(s)V_1 \\ V_3 &= G_b(s)V_2 \end{aligned}\right\} \tag{10-83}$$

式中

$$G_a(s)=\begin{bmatrix} \mathrm{ch}\Gamma_a(s) & -Z_{0a}(s)\mathrm{sh}\Gamma_a(s) \\ -\dfrac{1}{Z_{0a}(s)}\mathrm{sh}\Gamma_a(s) & \mathrm{ch}\Gamma_a(s) \end{bmatrix}$$

$$G_b(s)=\begin{bmatrix} \mathrm{ch}\Gamma_b(s) & -Z_{0b}(s)\mathrm{sh}\Gamma_b(s) \\ -\dfrac{1}{Z_{0b}}\mathrm{sh}\Gamma_b(s) & \mathrm{ch}\Gamma_b(s) \end{bmatrix}$$

所以

$$V_3 = G_b(s)G_a(s)V_1 \tag{10-84}$$

根据矩阵的运算，得

$$G_b(s)G_a(s)=\begin{bmatrix} \mathrm{ch}\Gamma_a\mathrm{ch}\Gamma_b - Z_{0a}\mathrm{sh}\Gamma_a\mathrm{ch}\Gamma_b & -Z_{0b}\mathrm{sh}\Gamma_b\mathrm{ch}\Gamma_a - Z_{0a}\mathrm{sh}\Gamma_a\mathrm{ch}\Gamma_b \\ -\dfrac{1}{Z_{0a}}\mathrm{sh}\Gamma_a\mathrm{ch}\Gamma_b - \dfrac{1}{Z_{0b}}\mathrm{sh}\Gamma_b\mathrm{ch}\Gamma_a & \dfrac{Z_{0b}}{Z_{0a}}\mathrm{sh}\Gamma_a\mathrm{sh}\Gamma_b + \mathrm{ch}\Gamma_a\mathrm{ch}\Gamma_b \end{bmatrix}$$

式中的双曲函数可用无穷乘积法展开，取少数几项进行近似计算。

三根管道 a，b，c 组成一分支管路，如图（10-24）所示，油液自断面积 A_1 的 a 管的 1 处流向 2 处，然后分流入断面积为 A_2 的 b 管和断面积为 A_3 的 c 管，b 管的输入端为断面 3，输出端为断面 5，c 管的输入和输出端则各为断面 4 和 6。

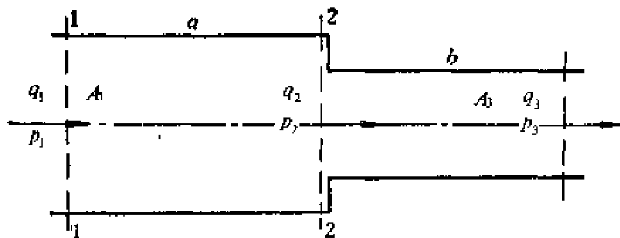


图10-23 异径管路

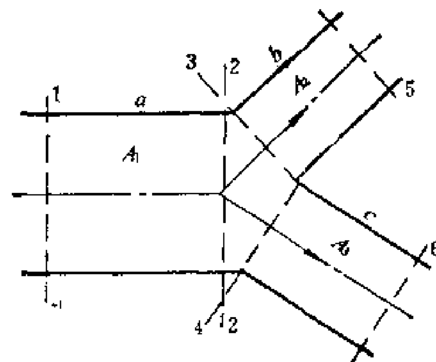


图10-24 分支管路

设 $G_a(s)$，$G_b(s)$ 及 $G_c(s)$ 各为管道 a，b 及 c 的矩阵传递函数，则

$$\left.\begin{aligned} V_2 &= G_a(s)V_1 \\ V_5 &= G_b(s)V_3 \\ V_6 &= G_c(s)V_4 \end{aligned}\right\} \tag{10-85}$$

在分支管的连接点，油液运动参数有如下关系

$$\begin{aligned} p_2 &= p_3 = p_4 \\ q_2 &= q_3 + q_4 \end{aligned} \tag{10-86}$$

拉普拉斯变换后得

$$\left.\begin{aligned} P_2(s) &= P_3(s) = P_4(s) \\ Q_2(s) &= Q_3(s) + Q_4(s) \end{aligned}\right\} \tag{10-87}$$

由（10-85）及（10-87）式可得由 $P_1(s)$，$P_2(s)$，$P_5(s)$，$P_6(s)$，$Q_1(s)$，$Q_3(s)$，$Q_4(s)$，$Q_5(s)$ 及 $Q_6(s)$ 九个参数组成的六个方程，根据具体条件，某些参数是已知的，例如通常分岔管的三个支管 a，b，c 可能是相同的，在进口的 1-1 断面处压强为常数，则

$$G_a(s)=G_b(s)=G_c(s)=G(s)=\begin{bmatrix} \operatorname{ch}\Gamma(s) & -Z_0(s)\operatorname{ch}\Gamma(s) \\ -\dfrac{1}{Z_0(s)}\operatorname{sh}\Gamma(s) & \operatorname{ch}\Gamma(s) \end{bmatrix}$$

$$P_1(s)=0$$

如果我们设 b 管的出流端 5-5 是敞开在大气中，c 管的 6-6 断面开始是封闭的，然后突然打开，通入大气，压强由原来的 P_6 突降为零，由上述的假设得

$$P_5(s)=0;\quad P_6(s)=-\frac{p_6}{s}$$

因为

$$V_1=\begin{bmatrix} P_1(s) \\ Q_1(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ Q_1(s) \end{bmatrix}$$

$$V_2=\begin{bmatrix} P_2(s) \\ Q_2(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} P_2(s) \\ Q_3(s)+Q_4(s) \end{bmatrix}$$

$$V_3=\begin{bmatrix} P_3(s) \\ Q_3(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} P_2(s) \\ Q_3(s) \end{bmatrix}$$

$$V_4=\begin{bmatrix} P_4(s) \\ Q_4(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} P_2(s) \\ Q_4(s) \end{bmatrix}$$

$$V_5=\begin{bmatrix} P_5(s) \\ Q_5(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ Q(s) \end{bmatrix}$$

$$V_6=\begin{bmatrix} P_6(s) \\ Q_6(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -p_6/s \\ Q_6(s) \end{bmatrix}$$

由此，我们得系统的方程为

$$\left.\begin{aligned} &Q_3(s)+Q_4(s)=Q(s)\operatorname{ch}\Gamma(s) \\ &P_2(s)=-Z_0(s)Q_1(s)\operatorname{sh}\Gamma(s) \\ &Q_5(s)=Q_3(s)\operatorname{ch}\Gamma(s)-\frac{P_2(s)}{Z_0(s)}\operatorname{sh}\Gamma(s) \\ &0=P_2(s)\operatorname{ch}\Gamma(s)-Z_0(s)Q_3(s)\operatorname{sh}\Gamma(s) \\ &Q_6(s)=Q_4(s)\operatorname{ch}\Gamma(s)-\frac{1}{Z_0(s)}P_2(s)\operatorname{sh}\Gamma(s) \\ &-\frac{p_6}{s}=P_2(s)\operatorname{ch}\Gamma(s)-Z_0(s)Q_4(s)\operatorname{sh}\Gamma(s) \end{aligned}\right\}\tag{10-88}$$

由上列方程组的第 2 及第 4 式得

$$Q_1(s)=\frac{P_2(s)}{Z_0(s)\operatorname{sh}\Gamma(s)}$$

$$Q_3(s)=\frac{P_2(s)\operatorname{ch}\Gamma(s)}{Z_0(s)\operatorname{sh}\Gamma(s)}$$

代入方程组的第 3 式得

$$Q_4(s) = -\frac{2P_2(s)\mathrm{ch}\Gamma(s)}{Z_0(s)\mathrm{sh}\Gamma(s)}$$

将 $Q_4(s)$ 代入方程组的第6式得

$$P_2(s) = -\frac{p_6}{3s\mathrm{ch}\Gamma(s)}$$

如果略去液阻，则 $\Gamma(s) = T_e s$，因此

$$P_2(s) = -\frac{T_e p_6}{3T_e s\mathrm{ch}T_e s}$$

将 $\mathrm{ch}T_e s$ 展成无穷乘积后得

$$P_2(s) = \frac{-T_e p_6}{3T_e s\prod_{n=0}^{\infty}\left[1 + \frac{T_e^2 s^2}{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2\pi^2}\right]}$$

如果取 $n = 1$，则

$$P_2(s) = \frac{-T_e p_6}{3T_e s\left(1 + \frac{4T_e^2 s^2}{\pi^2}\right)\left(1 + \frac{4T_e^2 s^2}{9\pi^2}\right)}$$

将上式用部分分式展开后，再将拉普拉斯变换函数反演，即可得原函数 $p_2(t)$。

习　题

1.1　为什么可以把流体看作为连续介质？为什么要把流体作为连续介质？

1.2　什么是流体的体积弹性模量，它表征了流体哪一方面的性质？

1.3　体积弹性模量$K=1.5\times10^4$bar 的纯油液，当作用压强为 210bar 时，混入1%空气，问混气油液的体积弹性模量为多少？

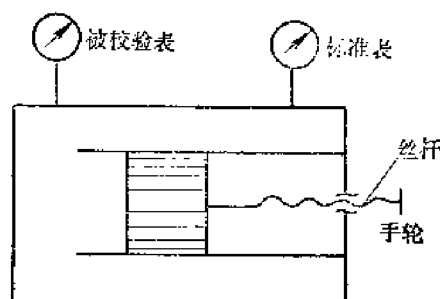
1.4　求空气在 20℃，100bar 时的密度。

1.5　什么叫流体的粘性，流体怎样会有粘性？为什么温度对液体和气体粘度的影响正好相反？

1.6　已知某油液在 20℃时为 10°E，在 80℃时为 3.5°E，试求温度为 60℃时的运动粘度。

1.7　某矿物油在 20℃及1大气压时粘度为$\nu=20$c·St，求在 50℃及 210bar 时以 bar·s 为单位的动力粘度，设油的比重为 0.88。

1.8　如图示，根据标准压强表来校正一般压强表的仪器，仪器内充满$K=1.2\times10^4$bar 的油液，活塞直径$d=1$cm　螺距$t=2$mm，当压强为1大气压时仪器内油液体积为200ml，问要在机内形成210bar 压强时，手轮需摇若干转？



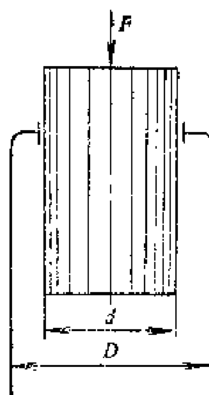
习题　1.8

2.1　什么是静压强的二个特性。

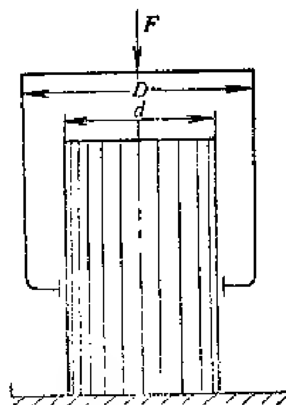
2.2　流体内静压强由哪二部分组成，它们是否都能在连通的流体内到处传递？

2.3　求在 5000m 深处海水密度，设海面上海水的比重为 1.026，海水的体积弹性模量约为$K=2.1\times10^4$bar。

2.4　液压缸直径$D=150$mm，柱塞直径$d=100$mm，液压缸中充满油液，如果柱塞上作用 50000N 的力，不计油液的重量，求液压缸中压强。



习题　2.4



习题　2.5

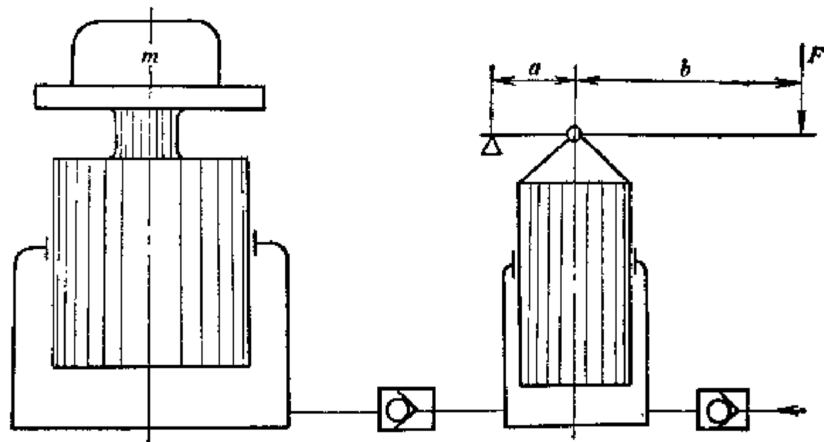
2.5 如图所示$D=150$mm，$d=100$mm，$F=50000$ N，不计油液重量求油缸内压强。

2.6 如图 2-13(b)所示，容器A内充满水，如果$z_A=2$ m，U形测压计汞柱读数为40cm，求容器内真空度。

2.7 如图 2-13(c)所示，容器A及B中均为比重等于1.2的溶液，设$z_A=1$ m，$z_B=0.5$m，汞柱高差$h=50$cm，求压差。

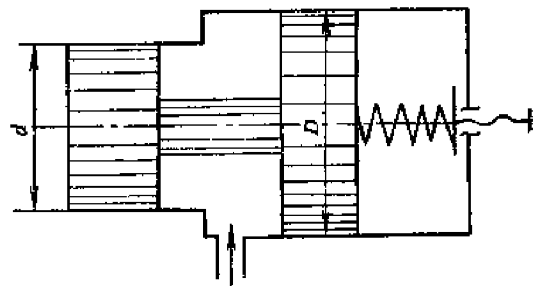
2.8 用图 2-14 所示的微压计测压，如果读数精度为0.5mm，当测压范围为100～200mm液柱时，要求测量误差不超过±0.2%，试确定θ角。

2.9 一千斤顶，如图所示，大活塞直径120mm，小活塞直径10mm，杠杆尺寸为$a=25$mm，$b=300$mm，如果要顶起$m=5000$kg 的质量，求力F。



习题 2.9

2.10 安全阀调压 50bar 时，求弹簧子压缩量，设弹簧刚度$k_s=10$ N/mm，活塞直径$D=22$mm，$d=20$mm。



习题 2.10

2.11 直径$D=400$mm的圆形容器，充水高度$a=300$mm，悬于直径$d=200$mm的柱塞上：

(i) 设容器本身的质量为50kg，不计容器与柱塞间的摩擦力，求容器内液面上的真空度。

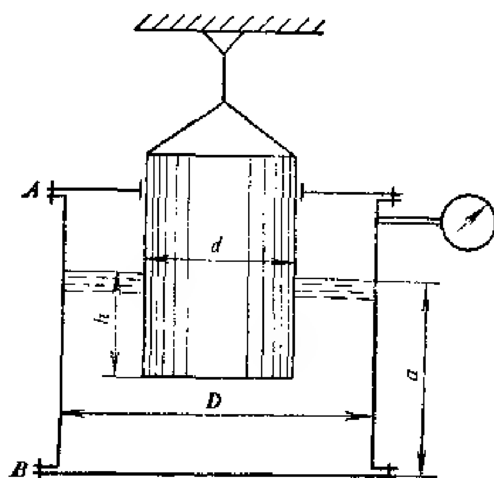
(ii) 设$h=100$mm，求螺栓A及B中的力。

(iii) 柱塞的淹没深度h对计算结果的影响如何?

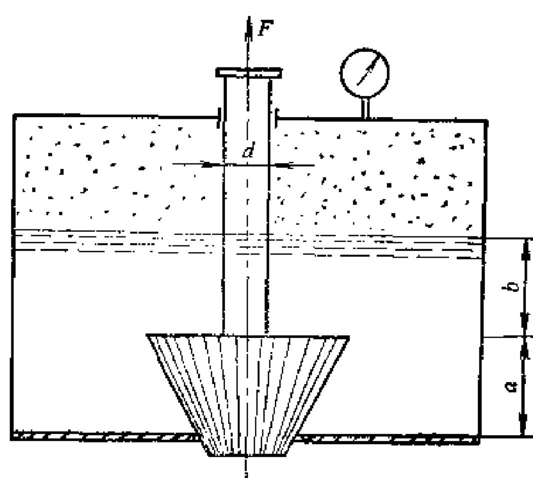
2.12 油箱底部有锥阀，尺寸为$D=100$mm，$d=50$mm，$a=100$mm，$d_1=25$mm，箱内油位高于阀芯$b=50$mm，不计阀芯自重和阀芯运动的摩擦力，油液比重$S=0.83$。当压强表读数为0.1bar时，提起阀芯所需的初始力F为多少?

2.13 一增压器$d_1=210$mm，$d_2=200$mm，$d_3=110$mm，$d_4=100$mm，可动部分质量为$m=200$kg，摩擦阻力等于工作柱塞全部传递力的10%，如果进口压强$p_1=50$bar，求出口压强p_2。

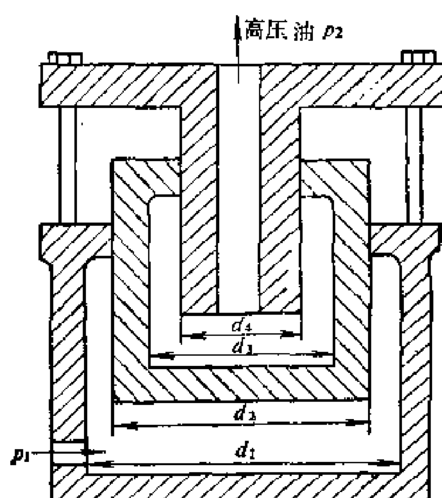
2.14 铸造一直径$D=1000$mm，长为1200mm壁厚$b=20$mm的半圆柱形铸件，在浇铸时型箱上作用着由于铁水压强而产生的向上推力，试求型箱上所需重块的质量m，铸模浇口尺寸为$d_1=100$mm，$d_2=30$mm，$h=80$mm，已知$H=900$mm，型箱质量为4000kg。



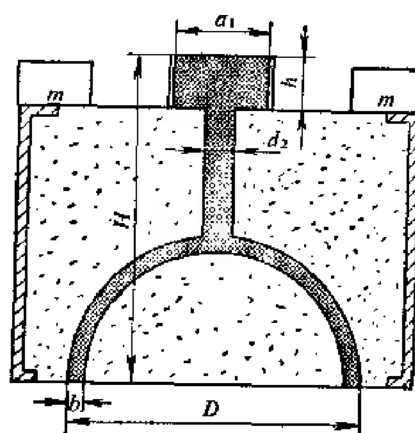
习题　2.11



习题　2.12



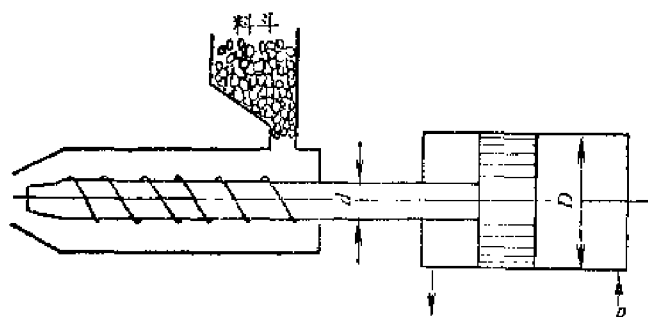
习题　2.13



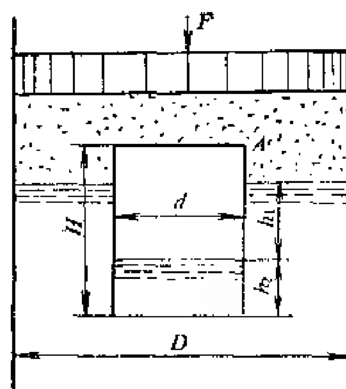
习题　2.14

2.15　一塑料注射器，当液压泵提供的压强为 $p=65\text{bar}$，如想得到 1200bar 的注射压强，注射器的柱塞直径比 D/d 应为多少？如果小柱塞直径 $d=4.2\text{mm}$，求活塞直径 D。

2.16　如图 2-26 所示，如果活塞直径为 100mm，活塞杆直径为 50mm，要求得到 5×10^4 N的力，溢流阀调压应为多少？



习题　2.15



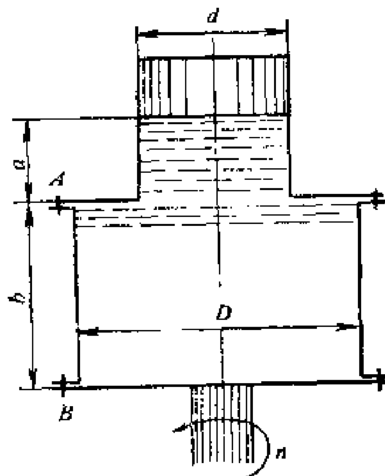
习题　2.17

2.17　底部开口的圆柱形容器A，直径$d=50$mm，$H=100$mm，漂浮于$D=100$mm的圆筒内的水中，试确定：

（i）容器A的质量，设圆筒内液面为大气压，深度$h_1=40$mm。

(ii) 如果要使容器A全部沉入水中，应在活塞上加多大F力，不计活塞的质量，设初始深度$h_2=20$mm。

2.18　如图所示，$D=400$mm，$d=200$mm，$b=350$mm，装水高度$a+b=520$mm，液面活塞质量为50kg，当回转速度为450rpm时，求螺栓A和B内的力，不计活塞间的摩擦阻力。



习题　2.18

3.1　流体运动有几种类型，它们的特点是什么？

3.2　流体的运动实质上是组成流体的质点的运动，但为什么大多数情况下，我们不采用跟纵质点的办法来研究流体的运动？

3.3　说明流线与迹线的区别。流线具有怎样的性质？

3.4　直角座标与圆柱座标的关系为

$$r^2=x^2+y^2,\quad \theta=\operatorname{arctg}\frac{y}{x},\quad z=z$$

（i）利用这些关系，将$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0$变换为$\frac{u_r}{r}+\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0$

(ii) 利用这些关系，将$\omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)$变换为

$$\omega_z=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+\frac{1}{r}\left(u_\theta-\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)\right]$$

提示：$u_x=f(r,\theta)$，$u_y=f(r,\theta)$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}=\frac{\partial u_x}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}=\cos\theta\frac{\partial u_x}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial u_x}{\partial \theta}$$

u_x，u_y与u_r及u_θ的关系可由（3-4）式求得。

3.5　流场内任意点速度为：

$$u_x=-\frac{ky}{x^2+y^2},\quad u_y=\frac{kx}{x^2+y^2},\quad u_z=0,$$

求这流场的流线。

3.6　下列流场哪些满足连续性方程并存在势函数

（1）$u_x=kx$，$u_y=-ky$

（2）$u_x=ky$，$u_y=kx$

（3）$u_x=A\ln xy$，$u_y=\frac{Ay}{x}$

（4）$u_x=x^3\sin y$，$u_y=3x^2\cos y$

（5）$u_r=2r\sin\theta\cos\theta$，$u_\theta=2r\sin^2\theta$

（6）$u_x = x^2 + 2xy$，$u_y = y^2 + 2xy$

3.7 下列二流场是否相同

$$\Psi = 2xy + y$$

$$\Phi = x^2 + x - y^2$$

3.8 假定一流场的速度梯度方阵

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

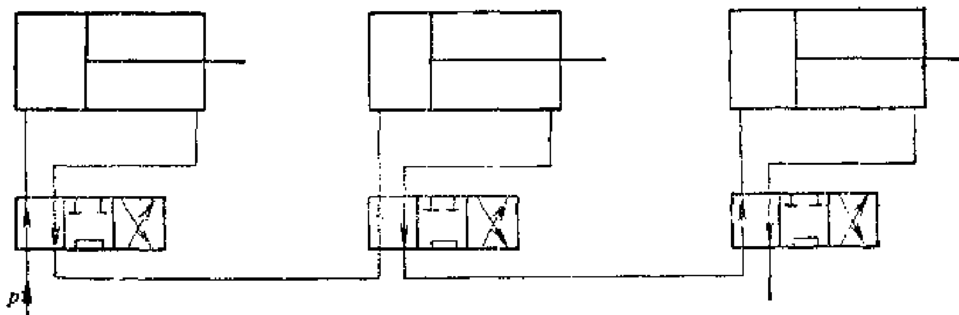
问这流场是否有势。

3.9 已知一流场的流函数

$$\Psi = -U\left(1 - \frac{a^2}{x^2 + y^2}\right)(-x\sin\alpha + y\cos\alpha)$$

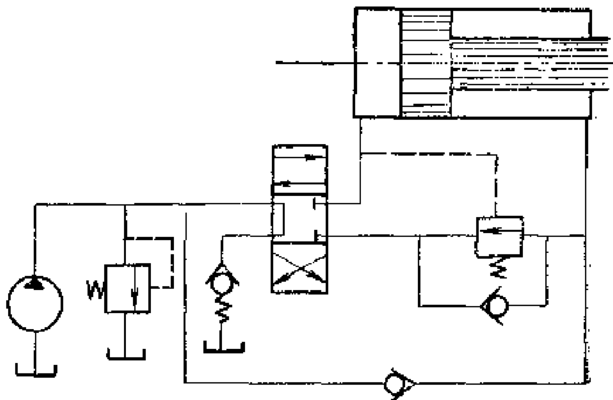
求速度势函数Φ。

3.10 三个液压缸串联，活塞直径均为100mm，活塞杆直径均为65mm，由100bar，25 l/min的油泵供油，如果液压缸上负载F相同，求F和三个活塞的运动速度，如果方向阀切换，活塞反向运动时，求各活塞的运动速度。



习题 3.10

3.11 某工作母机采用差动回路以获得快进-工进-快退的工作循环，工进时负载为4800N如果用25bar 6 l/min的齿轮泵供油，溢流阀调压为22bar，背压为5 bar，求液压缸直径，设活塞杆与活塞直径比为0.5，求快进快退时活塞速度。如果要求快进快退时速度相等，求活塞杆直径应为多少？



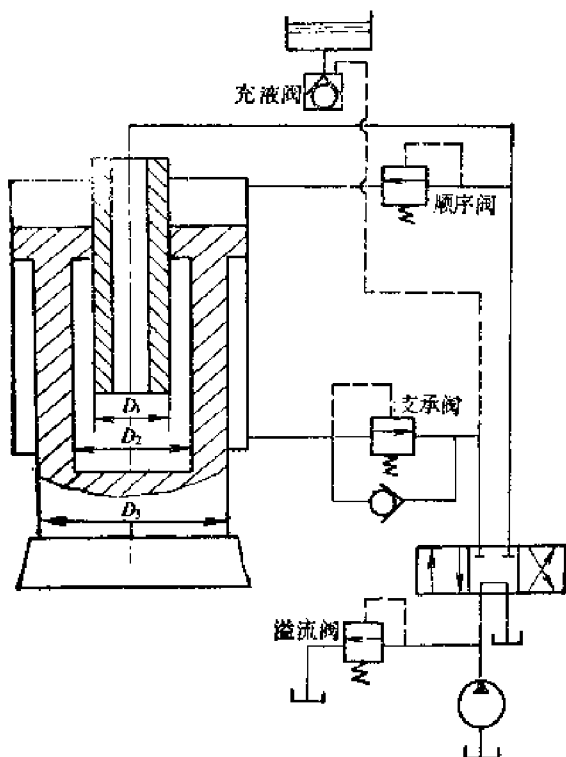
习题 3.11

3.12 压制力为2.5×10^6N的油压机采用快速送进油路，液压缸内径$D = 400$mm，活塞杆外径$D_3 = 360$mm，内腔$D_2 = 160$mm，导管外径$D_1 = 120$mm，活塞和活动横梁质量为2×10^3kg，问支承阀，溢流阀调压应为多

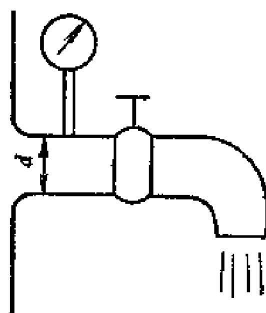
少？如果油泵流量为 15 l/min，活塞快速下行，快速回程速度各为多少？充液阀流量又为多少？

4.1 当阀门关闭时压强表读数为 2.8bar，而在阀门打开时压强表读数为 0.6bar，如果 $d=12$mm，求流量 Q。

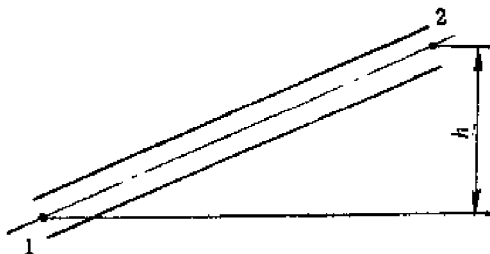
4.2 一管道输送 $S=0.88$ 的油液，已知 $h=15$m，如果测得压强如下，求油液流动方向：



习题 3.12



习题 4.1



习题 4.2

（i）$p_1=4.5$bar，$p_2=4$ bar；

（ii）$p_1=4.5$bar，$p_2=2.5$bar。

4.3 齿轮泵从油箱吸油，如果齿轮泵按装在油面之上 0.4m，泵的流量为 25 l/min，吸油口直径 $d=30$mm，设滤网及管道内总的压降为 0.3bar，油液比重 $S=0.88$，求进口压强。

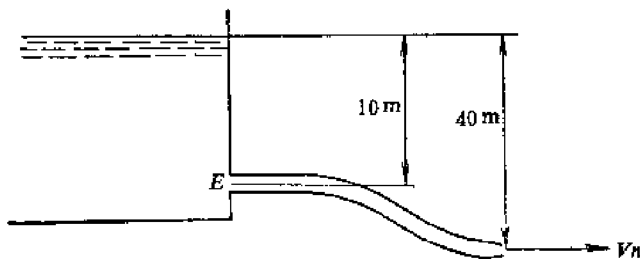
4.4 高压油泵从油箱吸油，排油压强为 210bar，全部经溢流阀回入油箱，如果油液比重 $S=0.85$，问油温将上升多少？

4.5 如图所示，设管端喷嘴直径 $d_n=50$mm，管道直径 100mm，不计管路损失，求：

（1）喷嘴出流速度 v_n 及流量；

（2）E 处的流速和压强；

（3）为了增大流量，喷嘴直径能否增大，最大喷嘴直径为多少？



习题 4.5

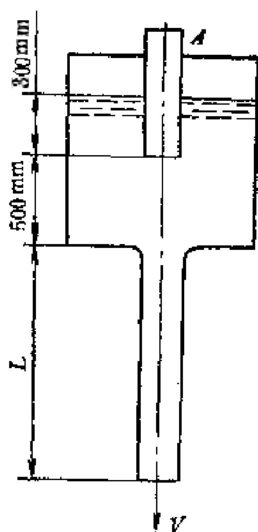
4.6 如图所示，在密闭容器中插入一通大气的 A 管，求最大出流速度 v 和最大出流速度时的长度 L

4.7 试证明不计摩阻损失时，等断面U形管内液柱的振荡周期 T 为

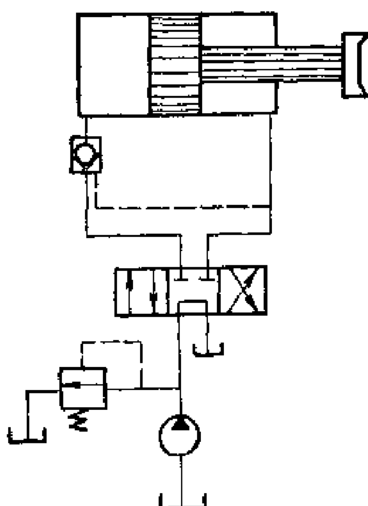
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$$

式中 l 为U形管中液柱的总长。

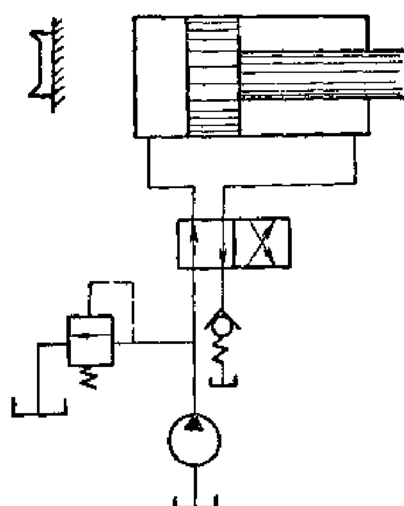
4.8 某液压夹具要求夹紧力为 5×10^4 N，试比较采用25bar齿轮泵及63bar叶片泵时液压缸尺寸各为多少。如果完全松开到最终夹紧的行程为40mm，要求在5秒内完成整个动作，求齿轮泵和叶片泵方案的流量和功率各为多少？



习题 4.6



习题 4.8



习题 4.9

4.9 液压缸直径为100mm，活塞杆直径为56mm，工作行程300mm，负载 10^5 N，工进速度5mm/s，工进结束保压2分钟，然后回程停留30秒而重复循环，如果液压缸摩擦阻力1000N，工进时液压缸背压为5 bar，液压泵流量为10 l/min，压强为160bar，液压泵效率为88%，求：

（1）配用电机功率；

（2）各工序的功率损失；

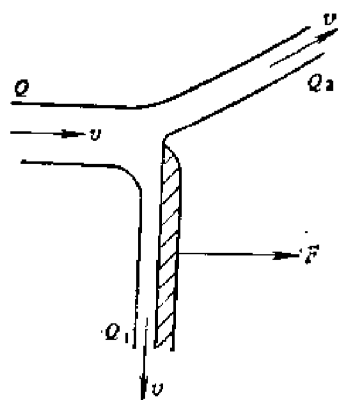
（3）试评论一下这个系统是否合理。

4.10 将一平板探入水的自由射流之内，并垂直于射流的轴线，该平板截去射流的流量的一部分 Q_1，并引起射流的剩余部分偏转 α 角，已知射流速度 $v=30$ m/s，全部流量 $Q=36$ l/s，$Q_1=12$ l/s，求 α 角及平板上的作用力 F。

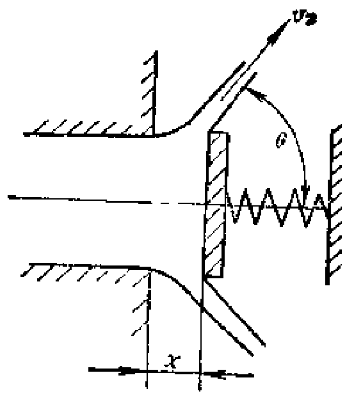
4.11 一安全阀，阀座直径 $d=25$mm，当油流压强为50bar时阀的开度 $x=5$ mm，流量为 $Q=600$ l/min，如果阀的开启压强为43bar，油液比重为0.9，弹簧刚度 $k=20$ N/mm，求油液出流角 θ。

4.12 管内紊流时断面上的流速分布为

$$\frac{u}{u_{max}} = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{1/7}$$



习题 4.10



习题 4.11

求动能修正系数，r_0 为管道断面半径。

4.13 机翼单位翼展的升力 L_1 和阻力 D_1 与平均弦长 l，机翼面积 A，飞行速度 U，空气密度 ρ，粘度 μ 和声速 c 有关，试用量纲分析法求它们的函数关系。

4.14 向心滑动轴承的摩擦力 F_f 与转速 n，润滑油粘度 μ，轴径 D，径向间隙 c，负载压强 p（单位投影面积上的负载）有关，试用量纲分析法，求出它们的函数关系。

4.15 在设计时速为 150 公里的汽车时，需在风洞中进行模型试验以确定空气的阻力，如果实际的汽车高为 1.5 m，风洞中最大风速可达 60 m/s，求模型的高度应为若干？如果测得模型上迎面阻力为 1500 N，求实际汽车上的阻力。

4.16 为了观察210 bar液压阀内的流动情况，拟采用透明材料做阀体进行试验，由于材料强度的原因，试验压强不得超过 5 bar，问采用什么办法进行试验？

5.1 层流与紊流有什么本质区别？

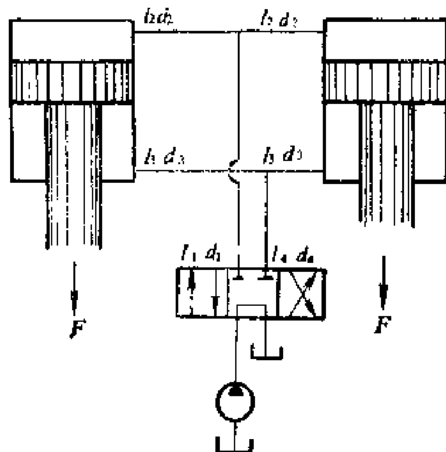
5.2 说明雷诺数的物理意义，为什么雷诺数很大时阻力系数与雷诺数无关？

5.3 什么叫附面层？附面层内外的流动有什么区别？

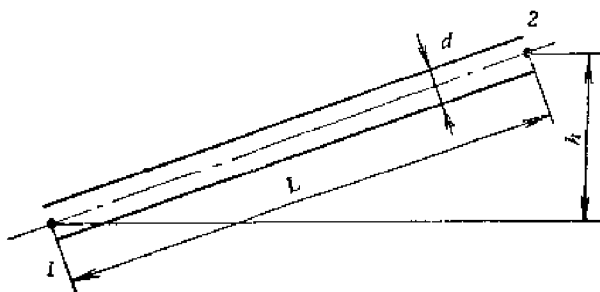
5.4 试简述潜体阻力的形成。

5.5 如图所示，液压缸直径为 50mm，要求在活塞运动时维持 $F=15000\,\text{N}$，求活塞运动速度为 0.1 m/s 时液压泵供油压强，设 $l_1=3\,\text{m}$，$l_2=2.5\,\text{m}$，$l_3=2.5\,\text{m}$，$l_4=3\,\text{m}$，$d_1=d_4=12\,\text{mm}$，$d_2=d_3=10\,\text{mm}$，油液粘度为 20°E，活塞杆直径为 30mm。

5.6 如图所示，$h=15\,\text{m}$，$p_1=4.5\,\text{bar}$，$p_2=2.5\,\text{bar}$，$d=10\,\text{mm}$，$L=20\,\text{m}$，油液粘度



习题 5.5



习题 5.6

关

$\mu = 40cP$，比重 $S = 0.88$，求流量 Q

5.7　某管路长 500 m，直径为 100mm，当流量为 240 l/min 时，要求传递功率为 40kW，求管道进口压强和管道的输送效率。

5.8　浇铸系统是由浇口，直浇道，横浇道及给料口所组成，如图所示，设 $H = 500mm$，浇入的铁水质量流量 $\dot{m} = 11.5kg/s$，铁水比重为 6.8 为了不使空气从砂型中渗入，直浇铸系统中不应产生真空，设 $h = 100mm$（在直浇道进口处压强最小，不应小于大气压），局部阻力系数为 $\zeta_1 = 0.06$，$\zeta_2 = 1.3$ 及 $\zeta_3 = 0.1$，求直浇道和给料口面积。

5.9　某工厂用长为 240 m 的铸铁管从水库取水，要求最小流量为 5 m^3/min，水管出水口在水库水位以下 26 m 处，求管道直径 d。

5.10　空气在光滑水平管中输送，管长 500 m，管径 50mm，$\lambda = 0.016$，进口处绝对压强 10bar，温度 20℃，流速为 30 m/s，求沿此管每隔 100 m 的压差，设

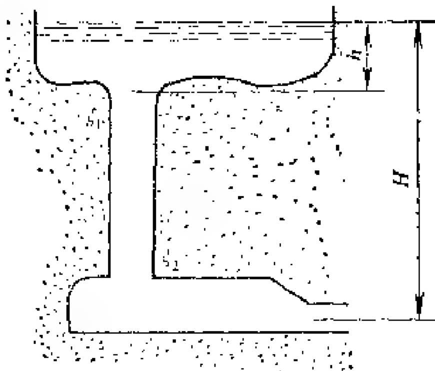
（1）流体作为不可压缩的；

（2）流体是可压缩的，且为等温流动；

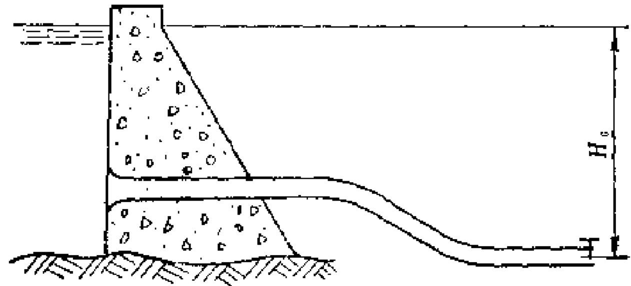
（3）流体是可压缩的，且为绝热流动。

5.11　一汽车在运动方向的最大断面积为 $2m^2$，如果阻力系数 $C_D = 0.3$，求环境温度为 20℃，时速为 120 公里时克服风阻所需的功率。

5.12　水库放水管长 $l = 50m$，直径 $d = 60mm$，水头 $H_0 = 4$ m，由于管端阀突然开启，管内平均流速将从关闭时的 $v = 0$ 变化为 H_0 下的恒定流速 v_0，试确定管中流速随时间增长的规律，并计算。



习题　5.8



习题　5.12

（1）阀门开启后 2 秒时管中的流速；

（2）阀门开启后 2 秒内流出的体积。

设管中流动为紊流，摩阻系数 $\lambda = 0.03$，不计局部阻力。

提示：在某瞬时管中流速为 v，列出非恒定流柏努利方程

$$H_0 = \frac{v^2}{2g} + \lambda \frac{l}{d}\frac{v^2}{2g} + \frac{1}{g}\int_0^l \frac{\partial v}{\partial t} ds$$

管中流动达恒定状态时，管中流速为 v_0，柏努利方程为

$$H_0 = \frac{v_0^2}{2g} + \lambda \frac{l}{d}\frac{v_0^2}{2g}$$

上两式相等并用分离变量法求解。

6.1 通过节流装置或阀口的流动状态希望是层流还是紊流，为什么？

6.2 孔口出流的基本特征是什么？

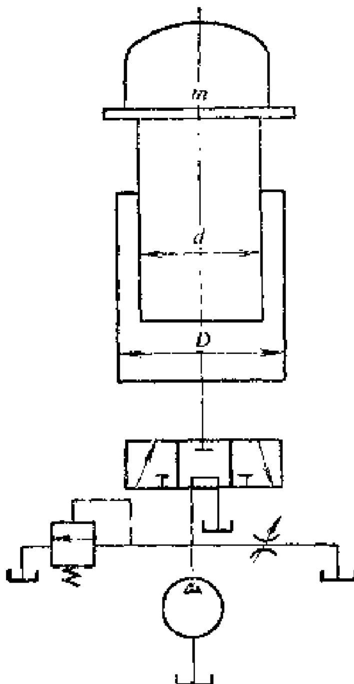
6.3 水箱侧壁上有一 $d=100$mm 的薄壁孔口，在 3.6m的水头下出流量为41 l/s，用分厘卡量得收缩断面直径为 80mm，求收缩系数，出流系数，和流速系数。

6.4 水从水箱侧壁 $d=10$mm 的薄壁锐缘孔口流入大气，水箱中水位保持在距孔口中心线上为 2 m，测得流量为 $Q=0.294$ l/s，射流某一断面中心座标为 $x=3$ m和 $y=1.2$m，求出流系数，流速系数，收缩系数和阻力系数。

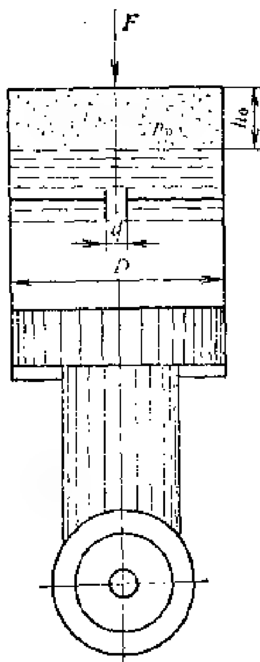
6.5 如图所示柱塞直径 $d=150$mm，液压缸直径 $D=180$mm，提举质量 $m=8600$kg，如果节流阀调节开度为 10mm²，管路压降为 $\Delta p=KQ^2$，系数 $K=1.82\times10^{-6}\frac{\text{bar}\cdot\text{s}^2}{\text{cm}^6}$，设油泵供油 40 l/min，求提升速度，油液比重 $S=0.88$。

6.6 飞机起落架的油气减震器如图所示，阻尼孔尺寸为 $l=12$mm，$d=3$ mm，活塞直径 $D=120$mm，油液比重 $S=0.9$，如果减震器内空气的初始压强为 32bar，所占高度 $h_0=150$mm，试确定在一突然作用的不变负载 $F=5\times10^4$ N 下，缸的沉降时间和沉降量。

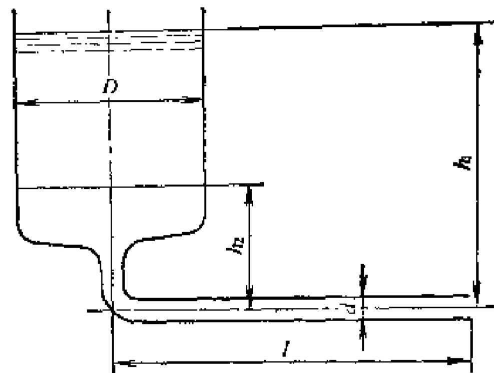
6.7 一粘度计如图所示。$D=50$mm，细管直径 $d=2$ mm，长 $l=40$mm，设在20分内油位从 $h_1=50$mm 下降至 $h_2=25$mm，求油液粘度。



习题 6.5



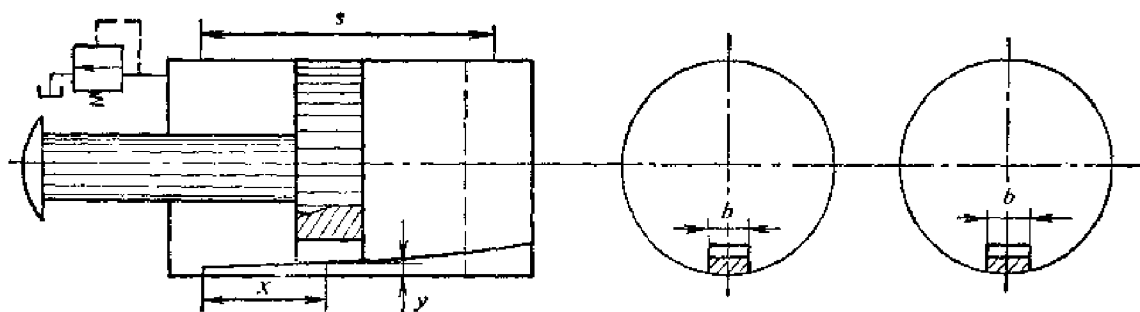
习题 6.6



习题 6.7

6.8 为了应付火车的事故停车，在支线尽头处设有双缸液压缓冲器，如图所示。火车的动能使缸内油液通过活塞上的节流小孔而损耗。设火车质量为500吨，制动时速度 $v_0=7.2$km/hr，制动应在 $s=0.8$m 距离内完成，液压缸直径 $D=300$mm，左侧压强保持为 $p_0=3$ bar。节流孔呈矩形，宽度 b 为 52mm，为了使制动过程呈等减速，节流孔断面积由高度 y 随 x 而变的楔条控制，设孔口流量系数为 0.6，求楔条表面的方程 $y=f(x)$。

提示：制动时活塞呈等减速，其减速度为



习题 6.8

$$a = \frac{v_0^2}{2s}$$

在 x 处的活塞运动速度为

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2ax}$$

活塞运动时排挤的流量应该即为经过节流孔的流量。由此即可求出 y 与 x 的关系。

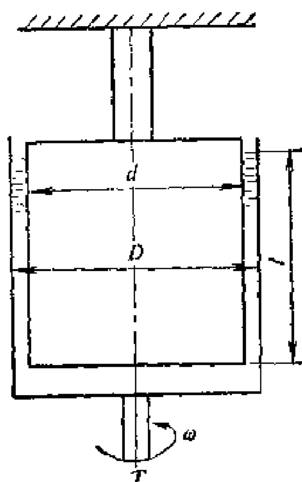
7.1 在讨论缝隙流动问题时我们作了哪些假设，这些假设是否合理?

7.2 一粘度计如图所示，$D = 100$mm，$d = 98$mm，$l = 200$mm，当转速为每秒 8 转时，测得扭矩 T 为 40N·cm，求油液的粘度 μ。

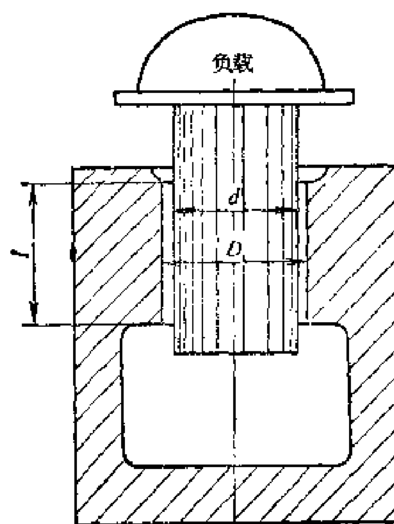
7.3 如图所示装置，已知活塞与负载质量为 120kg，活塞直径 $d = 39.8$mm，$D = 40$mm，$l = 40$mm，油液粘度 $\nu = 0.2\text{cm}^2/\text{s}$，比重 $S = 0.88$ 求活塞和负载的下降速度和缝隙中的速度分布规律。

7.4 如图所示，柱塞直径 $d = 29.93$mm，缸径 $D = 30$mm，如果负载和活塞的质量为 40kg，测得在 82 秒内活塞下降 10mm，油液粘度 $\nu = 0.294\text{cm}^2/\text{s}$，比重 $S = 0.89$，已知 $l = 15$cm，求偏心比 ε。

7.5 汽车上用的滤油器由一组环形平板叠成滤芯，平板之间缝隙 $\delta = 0.20$mm，环形平板外径 $D = 75$mm，内径 $d = 30$mm，平板数共为 21 片，过滤油液的粘度为 6°E，求流量为 0.2 l/s 时滤油器的压强损失。



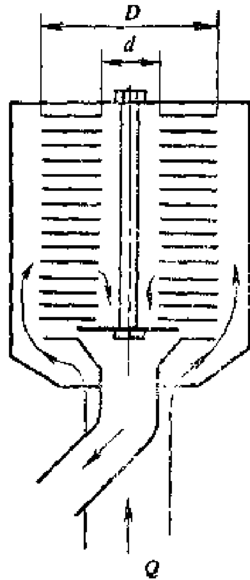
习题 7.2



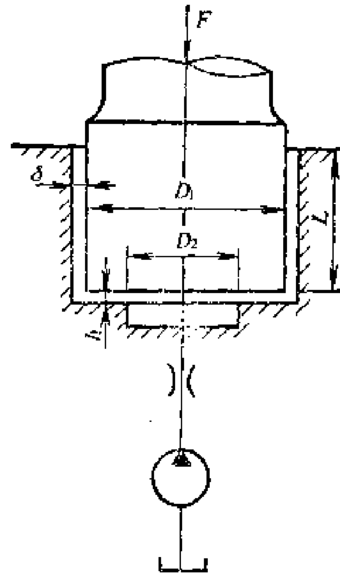
习题 7.3，7.4

7.6　一静压轴承，轴向负载$F=6500\text{N}$，轴承尺寸如下：

$D_1=80\text{mm}$，$L=100\text{mm}$，$D_2=40\text{mm}$，轴承径向间隙$\delta=0.25\text{mm}$。泵将5°E的油通过直径$d=10\text{mm}$，长$l=3\ \text{m}$的管道及$d_0=3.5\text{mm}$的小孔节流阻尼器送入轴承，如果要求$h=0.2\text{mm}$，求泵的流量和压强。油液比重为$S=0.88$。



习题　7.5



习题　7.6

8.1　在讨论润滑理论时，我们作了哪些假设，这些假设是否合理？

8.2　流体动力润滑中建立油膜压强的条件是什么？

8.3　滑动密封装置的泄漏和密封条件是什么？

8.4　说明密封准数G的物理意义，G值对密封装置的泄漏有什么影响？

8.5　轴径为75mm，长为75mm的滑动轴承，半径间隙$c=0.075\text{mm}$，负载为4100N，润滑油粘度为$\nu=0.7\text{cm}^2/\text{s}$，比重$S=0.86$。如果不计侧向流动，求轴承的功率损耗。

8.6　一推力块长$L=60\text{mm}$，与运动面成$\alpha=2°$，运动面与推力块的相对速度为$3\ \text{m/s}$，润滑油粘度$\mu=0.08\text{Pa·s}$，最小油膜厚度$h_2=0.2\text{mm}$，求最大压强，压强中心和承载能力。

9.1　静压支承的基本原理是什么？试说明它的优缺点。

9.2　试举你所知道的静压支承实例，并说明其原理。

9.3　什么叫静压支承的刚度，影响支承刚度的因素有哪些？

9.4　在静止油液中受刚度$k_s=5\ \text{N/cm}$的弹簧作用的阀门，在开度$h_0=5\ \text{mm}$位置处开始降落，如果阀门在关闭状态时弹簧的预压缩量为25mm，阀座尺寸为$d_0=60\text{mm}$，$D=80\text{mm}$，油液粘度$\mu=0.02\text{Pa·s}$，设不计阀门降落时弹簧中力的变化，求阀门的降落时间。

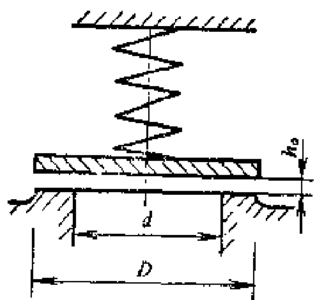
9.5　一平面推力轴承，轴的推力头直径为$D=140\text{mm}$，最大负载$F=2\times10^3\text{N}$，运行时负载可能在$1.5\times10^3\text{N}$到$2\times10^3\text{N}$之间变动，如果采用静压轴承方式，油膜厚度不得小于$7.5\times10^{-2}\text{mm}$，求最大负载时的流量，油腔压强和临界起动压强，如果采用毛细管，小孔口和恒流量阀作为进口阻尼，设供油压强p_s较最大负载时油腔压强大3 bar，试确定这三种阻尼器的规格，并求当负载$F=1.5\times10^3\text{N}$和$2\times10^3\text{N}$时采用上述三种阻尼器时的油膜厚度和刚度。根据上述计算试提出油泵的规格。设油液粘度$\nu=50\text{c·St}$，比重S为0.88，油腔

直径 $D_0=0.5D$。

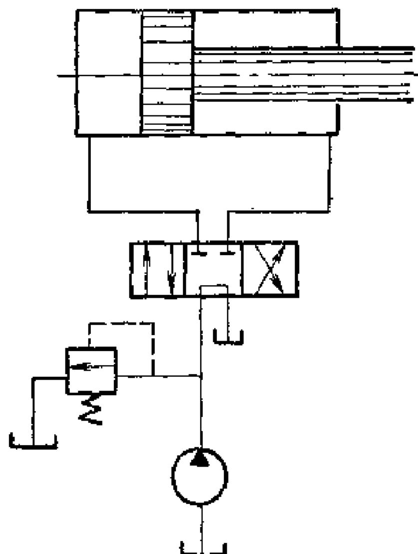
9.6 试任选一现在柱塞式液机，对其滑履进行核算。

10.1 在什么条件下管路系统可以与电路相模拟?

10.2 在什么条件下可以忽略管路系统的液阻，为什么?



习题 9.4



习题 10.3

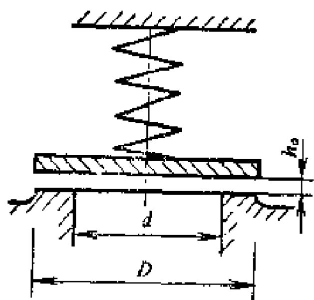
10.3 一液压系统如图所示，采用7缸柱塞泵供油，泵的转速为1500rpm，管道内径为10mm，油液比重为0.88，液压缸直径为80mm，活塞杆直径为40mm，行程为100mm，问管道应避开怎样的长度。

直径 $D_0=0.5D$。

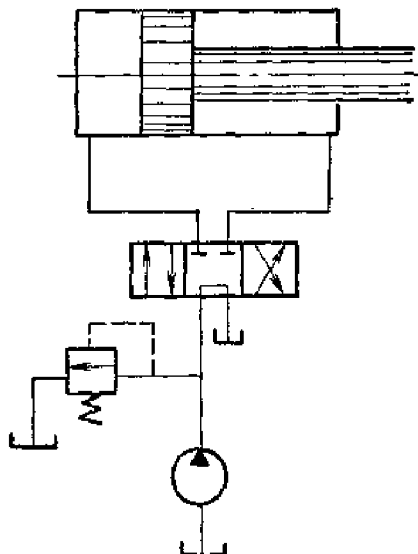
9.6 试任选一现在柱塞式液机，对其滑履进行核算。

10.1 在什么条件下管路系统可以与电路相模拟？

10.2 在什么条件下可以忽略管路系统的液阻，为什么？



习题 9.4



习题 10.3

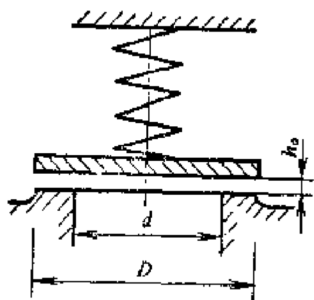
10.3 一液压系统如图所示，采用7缸柱塞泵供油，泵的转速为1500rpm，管道内径为10mm，油液比重为0.88，液压缸直径为80mm，活塞杆直径为40mm，行程为100mm，问管道应避开怎样的长度。

直径 $D_0=0.5D$。

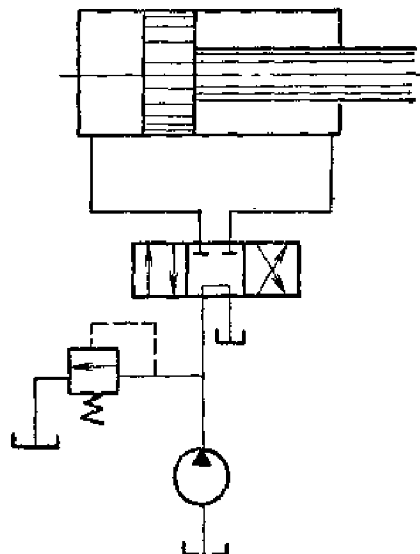
9.6 试任选一现在柱塞式液机,对其滑履进行核算。

10.1 在什么条件下管路系统可以与电路相模拟?

10.2 在什么条件下可以忽略管路系统的液阻，为什么?



习题 9.4



习题 10.3

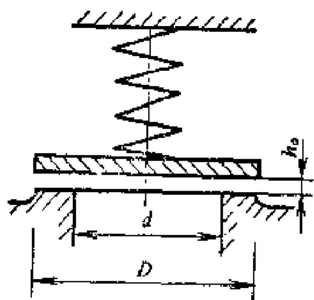
10.3 一液压系统如图所示，采用7缸柱塞泵供油，泵的转速为1500rpm，管道内径为10mm，油液比重为0.88，液压缸直径为80mm，活塞杆直径为40mm，行程为100mm,问管道应避开怎样的长度。

直径 $D_0=0.5D$。

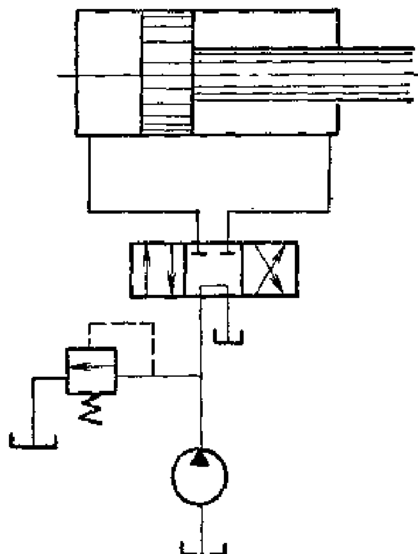
9.6 试任选一现在柱塞式液机，对其滑履进行核算。

10.1 在什么条件下管路系统可以与电路相模拟?

10.2 在什么条件下可以忽略管路系统的液阻，为什么?



习题 9.4



习题 10.3

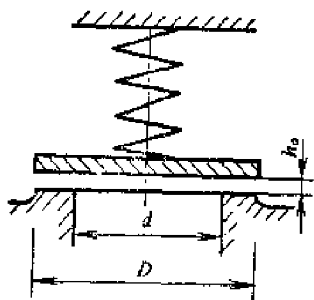
10.3 一液压系统如图所示，采用7缸柱塞泵供油，泵的转速为1500rpm，管道内径为10mm，油液比重为0.88，液压缸直径为80mm，活塞杆直径为40mm，行程为100mm，问管道应避开怎样的长度。

直径 $D_0=0.5D$。

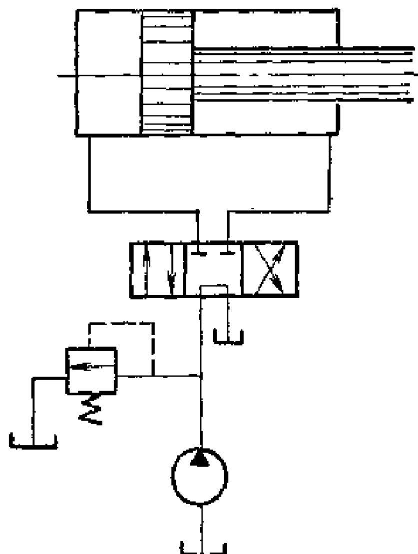
9.6 试任选一现在柱塞式液机，对其滑履进行核算。

10.1 在什么条件下管路系统可以与电路相模拟？

10.2 在什么条件下可以忽略管路系统的液阻，为什么？



习题 9.4



习题 10.3

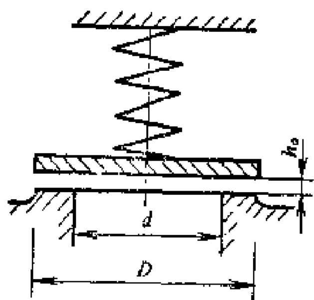
10.3 一液压系统如图所示，采用7缸柱塞泵供油，泵的转速为1500rpm，管道内径为10mm，油液比重为0.88，液压缸直径为80mm，活塞杆直径为40mm，行程为100mm，问管道应避开怎样的长度。

直径 $D_0 = 0.5D$。

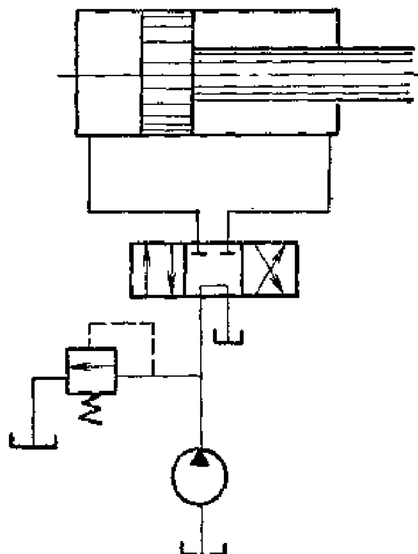
9.6 试任选一现在柱塞式液机，对其滑履进行核算。

10.1 在什么条件下管路系统可以与电路相模拟？

10.2 在什么条件下可以忽略管路系统的液阻，为什么？



习题 9.4



习题 10.3

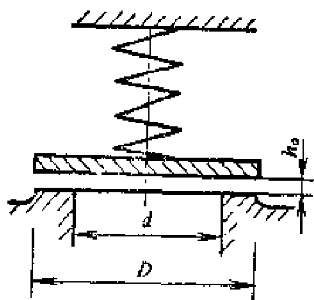
10.3 一液压系统如图所示，采用7缸柱塞泵供油，泵的转速为1500rpm，管道内径为10mm，油液比重为0.88，液压缸直径为80mm，活塞杆直径为40mm，行程为100mm，问管道应避开怎样的长度。

直径 $D_0=0.5D$。

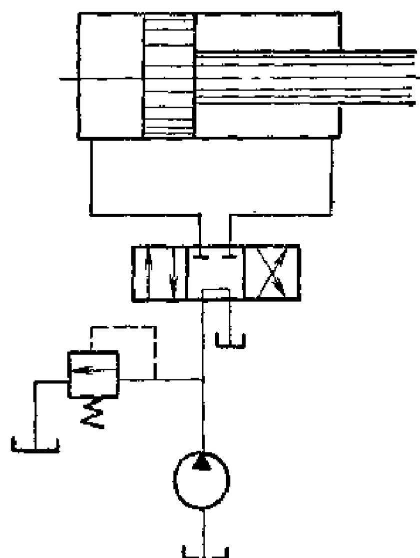
9.6 试任选一现在柱塞式液机，对其滑履进行核算。

10.1 在什么条件下管路系统可以与电路相模拟？

10.2 在什么条件下可以忽略管路系统的液阻，为什么？



习题 9.4



习题 10.3

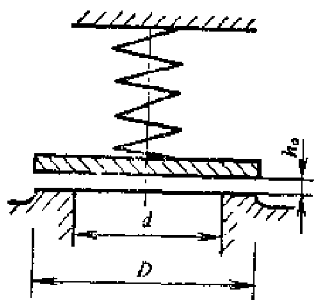
10.3 一液压系统如图所示，采用7缸柱塞泵供油，泵的转速为1500rpm，管道内径为10mm，油液比重为0.88，液压缸直径为80mm，活塞杆直径为40mm，行程为100mm，问管道应避开怎样的长度。

直径 $D_0 = 0.5D$。

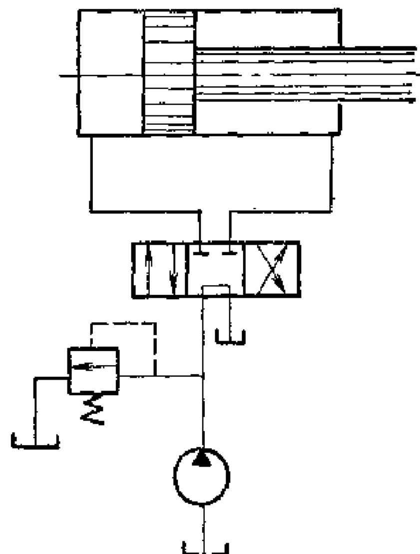
9.6 试任选一现在柱塞式液机，对其滑履进行核算。

10.1 在什么条件下管路系统可以与电路相模拟？

10.2 在什么条件下可以忽略管路系统的液阻，为什么？



习题 9.4



习题 10.3

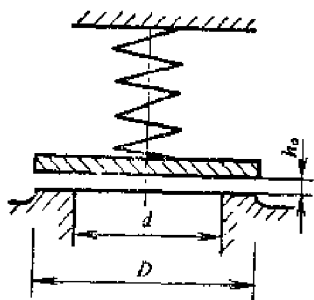
10.3 一液压系统如图所示，采用7缸柱塞泵供油，泵的转速为1500rpm，管道内径为10mm，油液比重为0.88，液压缸直径为80mm，活塞杆直径为40mm，行程为100mm，问管道应避开怎样的长度。

直径 $D_0=0.5D$。

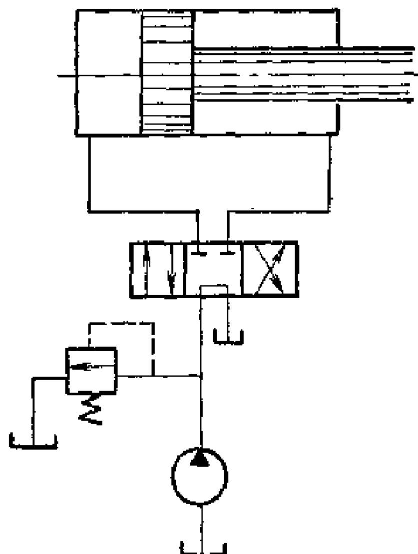
9.6 试任选一现在柱塞式液机,对其滑履进行核算。

10.1 在什么条件下管路系统可以与电路相模拟?

10.2 在什么条件下可以忽略管路系统的液阻，为什么?



习题 9.4



习题 10.3

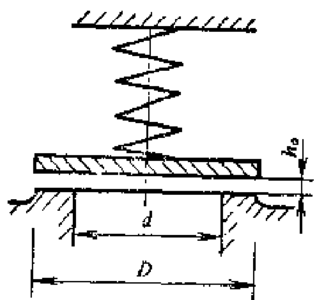
10.3 一液压系统如图所示，采用7缸柱塞泵供油，泵的转速为1500rpm，管道内径为10mm，油液比重为0.88，液压缸直径为80mm，活塞杆直径为40mm，行程为100mm，问管道应避开怎样的长度。

直径 $D_0 = 0.5D$。

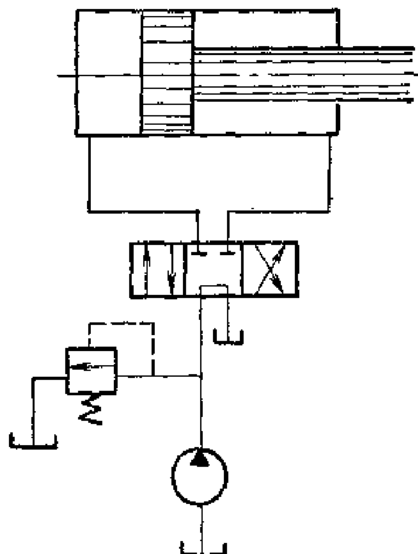
9.6 试任选一现在柱塞式液机，对其滑履进行核算。

10.1 在什么条件下管路系统可以与电路相模拟?

10.2 在什么条件下可以忽略管路系统的液阻，为什么?



习题 9.4



习题 10.3

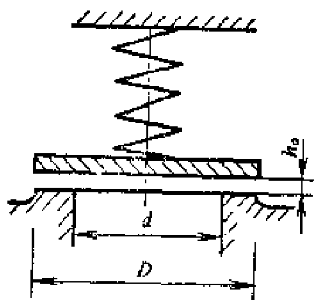
10.3 一液压系统如图所示，采用7缸柱塞泵供油，泵的转速为1500rpm，管道内径为10mm，油液比重为0.88，液压缸直径为80mm，活塞杆直径为40mm，行程为100mm，问管道应避开怎样的长度。

直径 $D_0 = 0.5D$。

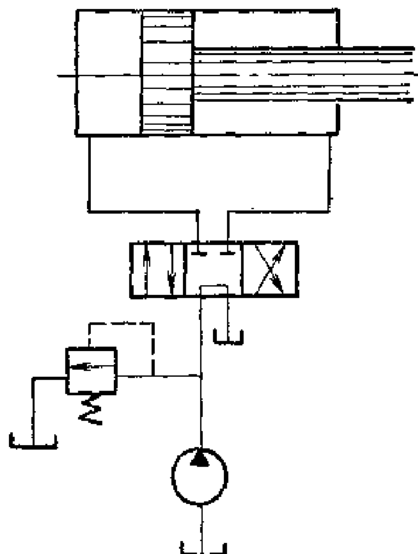
9.6 试任选一现在柱塞式液机,对其滑履进行核算。

10.1 在什么条件下管路系统可以与电路相模拟?

10.2 在什么条件下可以忽略管路系统的液阻，为什么?



习题 9.4



习题 10.3

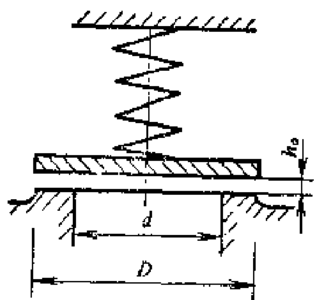
10.3 一液压系统如图所示，采用7缸柱塞泵供油，泵的转速为1500rpm，管道内径为10mm，油液比重为0.88，液压缸直径为80mm，活塞杆直径为40mm，行程为100mm,问管道应避开怎样的长度。

直径 $D_0 = 0.5D$。

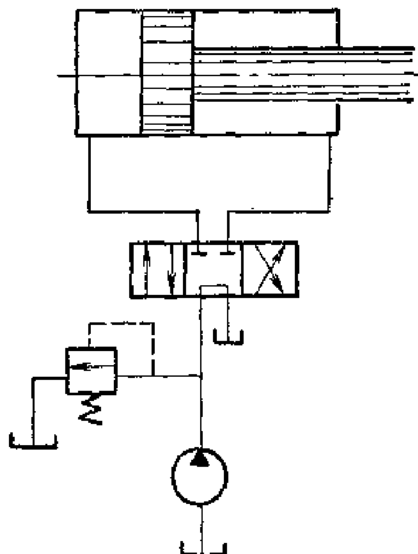
9.6 试任选一现在柱塞式液机，对其滑履进行核算。

10.1 在什么条件下管路系统可以与电路相模拟?

10.2 在什么条件下可以忽略管路系统的液阻，为什么?



习题 9.4



习题 10.3

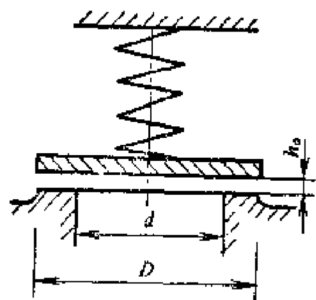
10.3 一液压系统如图所示，采用7缸柱塞泵供油，泵的转速为1500rpm，管道内径为10mm，油液比重为0.88，液压缸直径为80mm，活塞杆直径为40mm，行程为100mm，问管道应避开怎样的长度。

直径 $D_0=0.5D$。

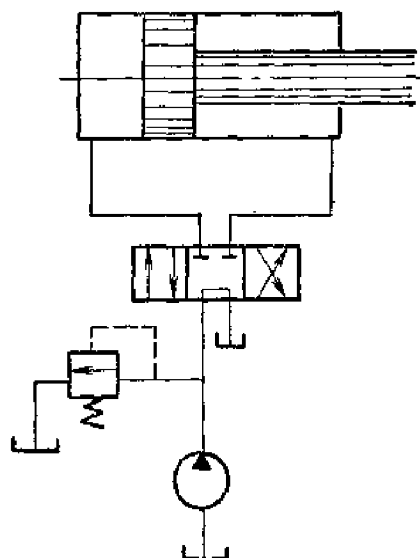
9.6 试任选一现在柱塞式液机，对其滑履进行核算。

10.1 在什么条件下管路系统可以与电路相模拟？

10.2 在什么条件下可以忽略管路系统的液阻，为什么？



习题 9.4



习题 10.3

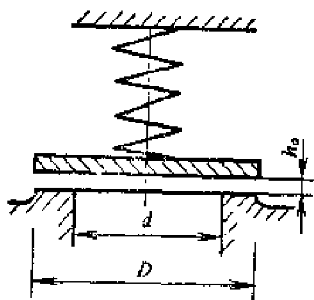
10.3 一液压系统如图所示，采用7缸柱塞泵供油，泵的转速为1500rpm，管道内径为10mm，油液比重为0.88，液压缸直径为80mm，活塞杆直径为40mm，行程为100mm，问管道应避开怎样的长度。

直径 $D_0 = 0.5D$。

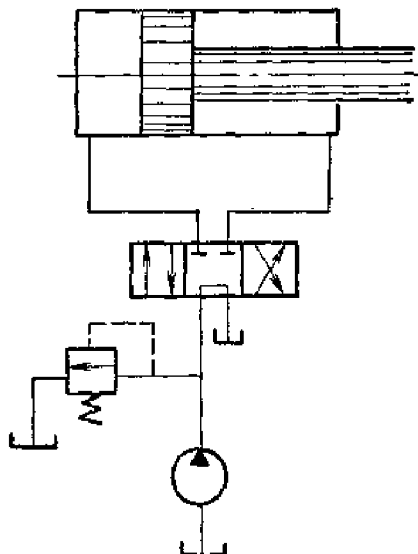
9.6 试任选一现在柱塞式液机，对其滑履进行核算。

10.1 在什么条件下管路系统可以与电路相模拟？

10.2 在什么条件下可以忽略管路系统的液阻，为什么？



习题 9.4



习题 10.3

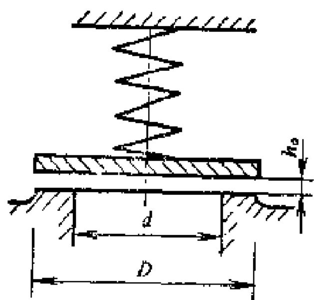
10.3 一液压系统如图所示，采用7缸柱塞泵供油，泵的转速为1500rpm，管道内径为10mm，油液比重为0.88，液压缸直径为80mm，活塞杆直径为40mm，行程为100mm，问管道应避开怎样的长度。

直径 $D_0=0.5D$。

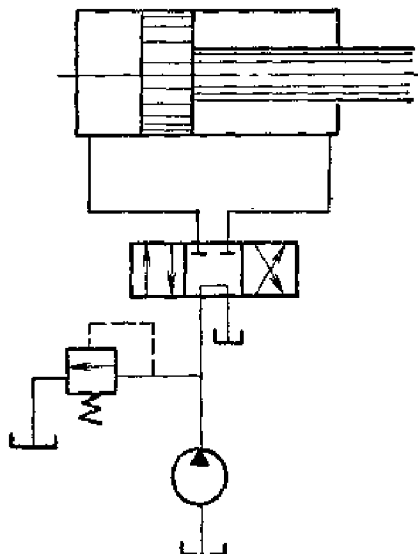
9.6 试任选一现在柱塞式液机，对其滑履进行核算。

10.1 在什么条件下管路系统可以与电路相模拟?

10.2 在什么条件下可以忽略管路系统的液阻，为什么?



习题 9.4



习题 10.3

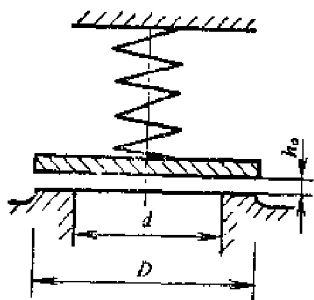
10.3 一液压系统如图所示，采用7缸柱塞泵供油，泵的转速为1500rpm，管道内径为10mm，油液比重为0.88，液压缸直径为80mm，活塞杆直径为40mm，行程为100mm，问管道应避开怎样的长度。

直径 $D_0=0.5D$。

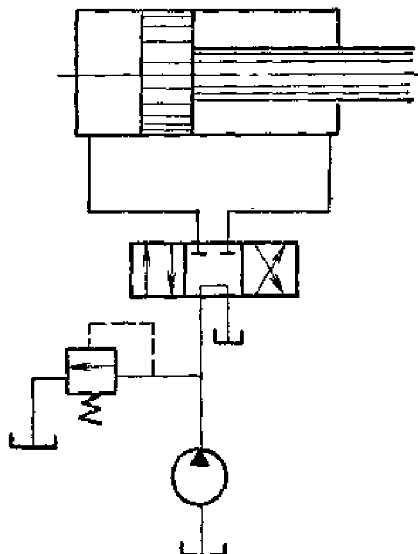
9.6 试任选一现在柱塞式液机，对其滑履进行核算。

10.1 在什么条件下管路系统可以与电路相模拟?

10.2 在什么条件下可以忽略管路系统的液阻，为什么?



习题 9.4



习题 10.3

10.3 一液压系统如图所示，采用7缸柱塞泵供油，泵的转速为1500rpm，管道内径为10mm，油液比重为0.88，液压缸直径为80mm，活塞杆直径为40mm，行程为100mm，问管道应避开怎样的长度。